المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
للجهة الشرقية
النيابة الإقليمية - وجدة -

# جميع دروس الأولى باك آداب
# مع تمارين
# وأمثلة وأنشطة محلولة

# إعداد : نجيب عثماني

## (أستاذ الثانوي تأهيلي الدرجة الممتازة)

## السنة الدراسية : 2017/2016

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

أكاديمية الجهة

# الدرس الأول : الحساب العددي

الأستاذ: نجيب عثماني

**مستوى:السنة الأولى من سلك الباكالوريا**
- **شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
**شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

## مذكرة رقم 2
## محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية

| محتوى البرنامج | القدرات المنتظرة | توجيهات تربوية |
|---|---|---|
| ـ العبارات؛ العمليات على العبارات؛ المكممات؛<br>ـ الاستدلالات لرياضية: الاستدلال بالخلف؛ الاستدلال بفصل الحالات؛ الاستدلال بالتكافؤ. | ـ التمكن من استعمال الاستدلال المناسب حسب الوضعية المدروسة؛<br>ـ التمكن من صياغة براهين واستدلالات رياضية واضحة وسليمة منطقيا؛<br>ـ دراسة صحة عبارة منطقية؛<br>ـ إدراك مدلول عبارة منطقية وإعطاء نفيها. | ـ ينبغي تقريب العبارات والقوانين المنطقية وطرائق الاستدلال انطلاقا من أنشطة متنوعة ومختلفة مستقاة من الرصيد المعرفي للتلميذ ومن وضعيات رياضية سبق له التعامل معها ولا يشكل الجانب الرياضي عقبة أمام تناولها؛<br>ـ ينبغي تجنب البناء النظري لهذه المبادئ والإفراط في استعمال جداول الحقيقة؛<br>ـ إن درس المنطق لا ينتهي بانتهاء هذا الفصل بل ينبغي استثمار نتائجه، كلما سنحت الفرصة لذلك، بمختلف فصول المقرر اللاحقة. |

**نشاط1:**

1. أنقل الجدول التالي ثم ضع العلامة "X" في الخانة المناسبة .

| | صحيح | خاطئ |
|---|---|---|
| كل زوجي قابل للقسمة على 4 | | X |
| مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي | X | |
| $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ | | X |
| اذا كان $n^2$ عددا فرديا فان $n$ عدد فردي | X | |
| المعادلة : $x^2=-1$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$ | | X |
| جميع المستقيمات المتعامدة في الفضاء متقاطعة | | X |
| 114516مضاعف للعدد4 | X | |
| $\left((-2)^2=-4\right)$ | | X |

2. هل توجد من بين الجمل الواردة في الجدول أعلاه جمل صحيحة و خاطئة في آن واحد ؟

**الجواب** : كل النصوص الرياضيةاما صحيحة و إما خاطئة وتسمى عبارات

## I. العبارات و العمليات على العبارات

### 1. العبارات

نسمي عبارة كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا و إما خاطئا نرمز عادة لعبارة بأحد الرموز $p$ أو $q$ أو $r$ ......

غالبا ما نعبر عن حقيقة عبارة بجدول يسمى جدول حقيقة عبارة :

الرمز 1 يعني أن العبارة $p$ صحيحة

و الرمز 0 يعني أن العبارة $p$ خاطئة

جدول حقيقة عبارة

| $p$ |
|---|
| 1 |
| 0 |

### 2. العمليات على العبارات

**ب.نفي عبارة**

نعتبر العبارة : " 3 عدد زوجي " $p$

ما قيمة حقيقة العبارة $p$

حدد نفي العبارة $p$ نرمز لها ب $\overline{p}$

ما قيمة حقيقة العبارة $\overline{p}$

إذن نفي عبارة $p$ هو كل عبارة تكون صحيحة إذا كانت $p$ خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت $p$ صحيحة نرمز لنفي العبارة $p$ بالرمز $\overline{p}$ أو $\neg p$

جدول حقيقة نفي عبارة

| $p$ | $\overline{p}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

**أمثلة:**

حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية:

- $p$ $\left((-2)^2=4\right)$
- $q$ $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

**الأجوبة:** $p$ عبارة صحيحة : $\overline{p}$ : $\left((-2)^2\neq 4\right)$

$q$عبارة خاطئة : $\overline{q}$ : $\left(\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\right)$

## ج. عطف عبارتين

عطف عبارتين $p$ و $q$ هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : ($p$ و $q$) والتي تكون صحيحة فقط ا إذا كانت العبارتان $p$ و $q$ صحيحتين معا.

| $p$ | $q$ | $p$ و $q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

جدول حقيقة العطف المنطقي

**أمثلة:** حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

- $\left(\left(-2\right)^2=4\right)$ و $\left(\sqrt{3}\geq 1\right)$
- $\left(\frac{7}{2}>3\right)$ و $\frac{1}{2}\in\mathbb{N}$

**تمرين:** حدد قيمة حقيقة العبارات الآتية :

$\left(\left(-2\right)^2>3\right)$ و $\left(\sqrt{3}\geq 1\right)$ $A$ $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}>3\right)$ و $\sqrt{2}\in Q$ $B$

الأجوبة: $A$ عبارة صحيحة : لأنها مكونة من عبارتين صحيحتين

$A$ عبارة صحيحة : لأنها مكونة من عبارتين صحيحتين

$B$ عبارة خاطئة : لأنها عطف عبارة صحيحة مع خاطئة

## د. فصل عبارتين

فصل عبارتين $p$ و $q$ هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : ($p$ أو $q$)

والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارتان $p$ و $q$ خاطئتين معا.

| $p$ | $q$ | $p$ أو $q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

جدول حقيقة الفصل المنطقي

**أمثلة:** حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

- $\left(\left(-2\right)^2=4\right)$ أو $\left(\sqrt{3}\geq 1\right)$ $p$
- $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\prec 3\right)$ أو $\frac{1}{2}\in\mathbb{N}$ $q$

**تمرين:** حدد قيمة الحقيقة و العبارة النافية لكل عبارة من العبارات الآتية :

$A$ $\left(\sqrt{4}=2\right)$ أو $\left(\frac{1}{2}\in\mathbb{N}\right)$

$B$ $\left(\left(-2\right)^2>3\right)$ أو 3عدد فردي)

$C$ $\left(\sqrt{2}\leq 1\right)$ أو $\left(\pi=3.14\right)$)

**الأجوبة:** $A$ عبارة صحيحة : لأن $\left(\sqrt{4}=2\right)$ عبارة صحيحة

$B$ عبارة صحيحة : لأنها فصل عبارتين صحيحتين

$C$ عبارة خاطئة : لأنها فصل عبارتين خاطئتين

$\overline{A}$ $\left(\sqrt{4}\neq 2\right)$ و $\left(\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}\right)$

$\overline{B}$ $\left(\left(-2\right)^2\leq 3\right)$ و 3عدد زوجي) $\overline{C}$ $\left(\sqrt{2}>1\right)$ و$\left(\pi\neq 3.14\right)$)

**تمرين:** حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$A$ 2 عدد فردي $\Rightarrow$ $\left(0,1\in\mathbb{N}\right)$

$B$ $n>4 \Rightarrow n>2$

**الأجوبة:** $A$ عبارة صحيحة و $B$ عبارة صحيحة

نشاط: أتمم ملأ الجدول التالي :

**نتيجة :** العبارتان $\left(p\Rightarrow q\right)$ و $q$ أو $\overline{p}$ متكافئتان

## ه. استلزام عبارتين

استلزام عبارتين $p$ و $q$ هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $\left(p \Rightarrow q\right)$ والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت $p$ صحيحة و $q$ خاطئة

جدول حقيقة الاستلزام المنطقي

| $p$ | $q$ | $p\Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

**ملاحظات**

- العبارة : $\left(p \Rightarrow q\right)$ تقرأ : " $p$ تستلزم $q$ " أو " إذا كانت $p$ فان $q$ "
- العبارة : $\left(q \Rightarrow p\right)$ تسمى الاستلزام العكسي للاستلزام $\left(p \Rightarrow q\right)$

**أمثلة:** حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$p$ $\left(\sqrt{3}\geq 1\right)\Rightarrow\left(\left(-2\right)^2=-4\right)$

$q$ $-1\in\mathbb{N}\Rightarrow\left(\sqrt{5}\prec 3\right)$

## و. تكافؤ عبارتين

تكافؤ عبارتين $p$ و $q$ هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $\left(p \Leftrightarrow q\right)$ والتي تكون صحيحة فقط اذا كانت العبارتان $p$ و $q$ صحيحتين معا أو خاطئتين معا.

العبارة : $\left(p \Leftrightarrow q\right)$ تقرأ : " $p$ تكافئ $q$ " أو " $p$ إذا وفقط إذا كان $q$ "

| $p$ | $q$ | $p\Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

جدول حقيقة التكافؤ المنطقي

**أمثلة:** حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$p$ $\left(2\sqrt{3}\geq\sqrt{10}\right)\Leftrightarrow\left(\left(5\sqrt{2}\right)^2=50\right)$

$q$ $0;5\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\left(\sqrt{5}\geq 3\right)$

## II. المكممات

### 1. أنشطة :

**نشاط1:** نعتبر التعبير التالي : $\left(x\in\mathbb{R}\right); x^2-x\geq 0$

- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=2$
- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=\frac{1}{2}$
- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=-1$

الأجوبة : من أجل $x=2$ نجد : $2\geq 0$ ومنه نحصل على عبارة صحيحة من أجل $x=2$ نجد : $-\frac{1}{4}\geq 0$

ومنه نحصل على عبارة خاطئة

من أجل $x=\frac{1}{2}$ نجد : $-\frac{1}{4}\geq 0$ ومنه نحصل على عبارة خاطئة

من أجل $x=-1$ نجد : $2\geq 0$ ومنه نحصل على عبارة صحيحة

إذن التعبير: $(x\in R);x^2-x\geq0$ يصبح صحيحا من أجل بعض قيم $x$ من $\mathbb{R}$ خاطئ من أجل بعض قيم $x$

نقول أننا أمام دالة عبارية تحتوي على متغير $x$ ينتمي إلى المجموعة $\mathbb{R}$

نكتب : $\exists x\in\mathbb{R}/x^2-x\geq0$ ونقرأ يوجد $x$ من $\mathbb{R}$ بحيث $x^2-x\geq0$

**نشاط2:** نعتبر التعبير التالي : $(n\in\mathbb{N});n^2\geq0$

- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $n=2$
- هل توجد قيم ل : $n$ لا تحقق التعبير السابق؟

الأجوبة : من أجل $n=2$ نحصل :على عبارة صحيحة

نلاحظ أننا نحصل على عبارة صحيحة مهما تكن قيمة المتغير $n$

نكتب : $\forall n\in\mathbb{N}/n^2\geq0$

## 2. العبارات المكممة

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\exists x\in E, A(x)$ " ونقرأ : " يوجد على الأقل $x$ من $E$ يحقق الخاصية $A(x)$ " وتكون العبارة " $\exists x\in E, A(x)$ " صحيحة إذا وجد على الأقل $x$ من $E$ يحقق الخاصية $A(x)$

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\forall x\in E, A(x)$ " ونقرأ : " مهما يكن $x$ من $E$ لدينا $A(x)$ "

وتكون العبارة " $\forall x\in E, A(x)$ " صحيحة إذا كانت جميع عناصر $E$ تحقق الخاصية $A(x)$.

**أمثلة:** حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$A$ "$(\forall x\in\mathbb{R});x^2>0$"

$B$ "$(\forall n\in\mathbb{N});2^n>5(n+1)$"

$C$ " $\exists x\in\mathbb{N}, 2x-1=0$ "

$D$ "$(\forall n\in\mathbb{N});\frac{n}{4}\notin\mathbb{N}$"

**تمرين:** حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

1. $\forall x\in\mathbb{R}/x\geq0$
2. " $\exists x\in\mathbb{N}, 2x-4=0$ "
3. " $\exists x\in\mathbb{R}, x^2+1=0$
4. $(\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\in\mathbb{N}$
5. $(\exists x\in\mathbb{Z});\frac{x}{4}\in\mathbb{Z}$

**الأجوبة:** 1) صحيحة 2) صحيحة 3) خاطئة 4) خاطئة 5) صحيحة

**تمرين2:** حدد العبارة النافية للعبارات الآتية :

1) $(\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\in\mathbb{N}$ 2) $(\exists x\in\mathbb{Z}):\frac{x}{4}\in\mathbb{Q}$ و $x^2-2=0$

3) توجد نافذة في المؤسسة مكسورة

4) كل الأشجار غير مثمرة في المؤسسة

**الأجوبة:** 1) $(\exists n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\notin\mathbb{N}$ 2) $(\forall x\in\mathbb{Z}):\frac{x}{4}\notin\mathbb{Q}$ أو $x^2-2\neq0$

3) كل نوافذ المؤسسة غير مكسورة

4) توجد شجرة مثمرة في المؤسسة

# III. الاستدلالات الرياضية

## 1. الاستدلال الاستنتاجي :

**مثال :** ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن: $\sqrt2<x<5\Rightarrow3<x^2+1<26$

**الأجوبة** :نفترض أن : $\sqrt2<x<5$ ونبين أن : $3<x^2+1<26$

لدينا : $\sqrt2<x<5$ اذن : $2<x^2<25$ اذن : $3<x^2+1<26$

ومنه : $\sqrt2<x<5\Rightarrow3<x^2+1<26$

**تمرين4:** ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن : $2\sqrt3<x<10\Rightarrow9<x^2-3<97$

**الأجوبة** :نفترض أن : $2\sqrt3<x<10$ ونبين أن : $9<x^2-3<97$

لدينا : $2\sqrt3<x<10$ اذن : $12<x^2<100$ اذن : $9<x^2-3<97$

ومنه : $2\sqrt3<x<10\Rightarrow9<x^2-3<97$

## 2. الاستدلال بالمثال المضاد :

مثال : بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

$p$ "$(\forall x\in\mathbb{R}^*);x+\frac{1}{x}\geq2$"

الجواب : نعتبر: $x=-2$ لدينا : $-2+\frac{1}{-2}=-\frac{5}{2}<2$ اذن : $p$ خاطئة

**تمرين:** بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

$p$ "$(\forall x\in\mathbb{R});x^2\geq x$"

الجواب : نعتبر: $x=\frac{1}{2}$ لدينا : $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$ اذن : $p$ خاطئة

## 3. الاستدلال بالتكافؤ:

**مثال:** بين أن : $a^2+b^2\geq2ab$ $(\forall a\in\mathbb{R});(\forall b\in\mathbb{R})$

الجواب :نستعمل الاستدلال بالتكافؤ:

$a^2+b^2\geq2ab\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\geq0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(a-b)^2\geq0$ و هذا صحيح لأن المربع دائما موجب

وبالتالي: $a^2+b^2\geq2ab$ $(\forall a\in\mathbb{R});(\forall b\in\mathbb{R})$

## 4. الاستدلال بفصل الحالات :

**مثال:** باستعمال الاستدلال بفصل الحالات:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E):|3x-6|=1$

الجواب :ندرس اشارة : $3x-6$

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3x-6$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

الحالة 1: اذا كانت : $x\geq2$ فان : $3x-6\geq0$ ومنه : $(E):|3x-6|=1$

$\Leftrightarrow3x-6=1\Leftrightarrow3x=7\Leftrightarrow x=\frac{7}{3}\in S$

الحالة 2: اذا كانت : $x\leq2$ فان : $3x-6\leq0$ ومنه : $(E):|3x-6|=1$

$\Leftrightarrow-(3x-6)=1\Leftrightarrow-3x+6=1\Leftrightarrow-3x=-5\Leftrightarrow x=\frac{5}{3}\in S$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\left\{\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right\}$

## 5. الاستدلال بالخلف :

لكي نبرهن أن عبارة صحيحة نفترض أن العبارة خاطئة ونحاول الحصول على تناقض مع المعطيات

**مثال1:** بين باستعمال الاستدلال بالخلف أن : $\forall x\in\mathbb{R}/\frac{x^2-1}{x^2+1}\neq1$

**الجواب :** نفترض أن : $\exists x\in\mathbb{R}/\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$

يعني $x^2-1=x^2+1$ يعني $-1=+1$ و هذا غير صحيح

**ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي :** $\forall x\in\mathbb{R}/\frac{x^2-1}{x^2+1}\neq1$

**تمرين:** $n\in\mathbb{N}$ **بين أنه اذا كان** $n^2$ عدد زوجي فان : $n$ عدد زوجي

**الجواب :** نفترض أن : $n$ عدد فردي أي أن : $\exists k\in\mathbb{N}/n=2k+1$

ومنه : $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1$

أي : $n^2$ عدد فردي و هذا يتناقض مع المعطيات : $n^2$ عدد زوجي

**ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي :** $n$ عدد زوجي

| أكاديمية الجهة | الدرس الثاني : الحساب العددي | الأستاذ: نجيب عثماني |
|---|---|---|

**مستوى:السنة الأولى من سلك الباكالوريا**

- **شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
- **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

**محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية**

| محتوى البرنامج | القدرات المنتظرة | توجيهات تربوية |
|---|---|---|
| **3.1.** التناسبية؛ النسب المئوية؛ السلم. | - توظيف التناسبية لمعالجة وضعيات متنوعة. | - يتم التذكير بمفهوم التناسبية وبالمفاهيم المرتبطة به وتثبيتها في وضعيات تخدم خصوصيات هاتين الشعبتين. |
| **3.2.**<br>ـ المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى أو الثانية بمجهول واحد؛<br>- إشارة ثلاثية الحدود من الدرجة الثانية؛<br>ـ نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين. | - حل معادلات ومتراجحات تؤول في حلها إلى معادلات ومتراجحات من الدرجة الأولى أو الثانية بمجهول واحد؛<br>ـ حل نظمات من الدرجة الأولى بمجهولين باستعمال مختلف الطرائق المتاحة؛<br>ـ ترييض وضعيات تتضمن مقادير متغيرة تؤول في حلها إلى حل معادلات أو متراجحات أو نظمات. | - إن حل معادلات ومتراجحات من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية بمجهول واحد وحل نظمات من معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين قد سبقت ممارستهما لذا يجب تجنب تقديمهما من جديد.<br>- ينبغي تدعيم وتثبيت جميع هذه المفاهيم من خلال أنشطة متنوعة هادفة ومختارة ومن خلال مسائل ينبغي ترييضها تكون مستقاة من الحياة العامة أو من مواد التخصص بغية إكساب التلاميذ المهارات والقدرات المنتظرة.<br>- تعتبر المعادلات والمتراجحات البارامترية خارج المقرر. |

## I. التناسبية والنسب المئوية والسلم

**تمهيد :**

املأ الجدول التالي :

| وزن التفاح | 1Kg | 2 Kg | 3Kg | 4Kg |
|---|---|---|---|---|
| ثمن التفاح | | 18dh | | |

نقول هناك تناسب بين ثمن الشراء ووزن التفاح ومعامل التناسب هو 6

**لأن :** $9=\frac{9}{1}=\frac{18}{2}=\frac{27}{3}=\frac{36}{4}$

**تعريف :** $a$ و $b$ و $c$ و $d$ أعداد حقيقية بحيث $bd\neq 0$

نقول إن الأعداد $a$ و $b$ متناسبة مع $c$ و $d$ على التوالي إذا وفقط

إذا كان : $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

**مثال1 :** حدد العدد الحقيقي $x$ إذا علمت أن الأعداد: $x+1$ و 3 متناسبة مع $x$ و 2 على التوالي

**تمرين 1:** اشترت خديجة سروالا وقميصا بمجموع قدره 105dh اذا علمت أن ثمن السروال و القميص متناسبان على التوالي مع الأعداد 6 و 9 فاحسب ثمن القميص والسروال

**الجواب :**

**ليكن** $x$ ثمن السروال و y ثمن القميص

**بما أن :** ثمن السروال و القميص متناسبان على التوالي مع الأعداد 9 و 6

فان : $\frac{x}{9}=\frac{y}{6}$ اذن : $\frac{x}{9}=\frac{y}{6}=\frac{x+y}{15}=\frac{105}{15}=7$

اذن : $\frac{x}{9}=7$ و $\frac{y}{6}=7$ يعني $x=63$ و $y=42$

**مثال2 :** يتكون قسم من 40 تلميذا منهم 15 من الإناث

حدد النسبة المئوية للإناث و الذكور في هذا القسم

**الجواب : نسبة الاناث :** $t\%=\left(\frac{15}{40}\right)\times 100=0.375\times 100=37.5\%$

**نسبة الذكور :** $t\%=\left(\frac{25}{40}\right)\times 100=0.625\times 100=62.5\%$

**مثال3 :** ارتفع ثمن البنزين من 5.20 DH الى 5.98 DH للتر الواحد

ما نسبة المئوية الزيادة؟

**الجواب :**

$$t\%=\left(\frac{5.98-5.20}{5.20}\right)\times 100=\frac{0.98}{5.20}\times 100=0.15\times 100=15\%$$

**تمرين2 :** ارتفع ثمن منزل من 500000 DH الى 600000DH

ما نسبة المئوية الزيادة؟

**الجواب:** $t\%=\left(\frac{600000-500000}{500000}\right)\times 100=0.2\times 100=20\%$

**تمرين3:** انخفض ثمن آلة حاسبة من 150 DH الى 135 DH

ما نسبة المئوية للتخفيض؟

**الجواب:** $t\%=\left(\frac{150-135}{150}\right)\times100=\frac{15}{150}\times100=0.1\times100=10\%$

**تمرين4 :** ثمن كتاب هو 60 DH اذا علمت أن نسبة التخفيض هي $t\%=20\%$

ما ثمن كتاب بعد التخفيض؟

**الجواب :** ثمن كتاب بعد التخفيض هو :

$$A=60-\left(\frac{20}{100}\right)\times60=60-12=48$$

**تمرين5 :** يبلغ ثمن حذاء رياضي 170DH وثمن بذلة رياضية 230DH

زيد في ثمن الحذاء بنسبة 6% وخفض في ثمن البذلة الرياضية بنسبة 8 % أحسب الثمن الجديد للحذاء والبذلة

**الجواب :** ثمن الحذاء الرياضي بعد الزيادة هو :

$$A=170+\left(\frac{6}{100}\right)\times170=170+10,2=182,2DH$$

ثمن البذلة الرياضية بعد التخفيض هي :

$$B=230-\left(\frac{8}{100}\right)\times230=230-18,4=211,6DH$$

**مثال4:** اذا علمت أن طول طريق سيار على خريطة ذات السلم $\frac{1}{1000000}$ هو 0.1m

ما الطول الحقيقي للطريق السيار؟

**الجواب :** الطول الحقيقي للطريق السيار هو :

$$A=0.1\times1000000=100000m=100km$$

## II. المعادلات و المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

### أ. المعادلات من الدرجة الأولى

**أمثلة :** حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $-2x+22=0$ 2) $3(2x+5)=6x-1$

3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$ 4) $9x^2-16=0$

5) $(2x+3)(9x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$

6) $\frac{2x+2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5x-2}{2}+\frac{1}{3}$

7) $x^3-x=0$

الجواب:1) $-2x+22=0$ يعني $-2x+22-22=-22$

يعني $-2x=-22$

يعني $-2x\times\left(\frac{1}{-2}\right)=-22\times\left(\frac{1}{-2}\right)$

يعني $x=11$ ومنه: $S=\{11\}$ وتسمى مجموعة حلول المعادلة

2) $3(2x+5)=6x-1$ يعني $6x+15=6x-1$

يعني $6x-6x=-1-15$ يعني $0x=-16$ يعني $0=-16$

وهذا غير ممكن ومنه : $S=\varnothing$

3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$ يعني

$4x-8=6x-2x-8$

يعني $4x-4x+8-8=0$ يعني $0=0$

ومنه :كل عدد حقيقي هو حل لهذه المعادلة وبالتالي : $S=\mathbb{R}$

4)أمامنا معادلة من الدرجة الثانية

طريقة 1: (التعميل) $9x^2-16=0$ يعني $(3x)^2-4^2=0$

يعني $(3x-4)(3x+4)=0$ يعني $3x+4=0$ أو $3x-4=0$

يعني $3x=-4$ أو $3x=4$ يعني $x=\frac{-4}{3}$ أو $x=\frac{4}{3}$

ومنه : $S=\left\{-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right\}$

طريقة 2: $9x^2-16=0$ يعني $9x^2=16$ يعني $x^2=\frac{16}{9}$

يعني $x=\sqrt{\frac{16}{9}}$ أو، $x=\sqrt{\frac{16}{9}}$ يعني $x=\frac{4}{3}$ أو، $x=-\frac{4}{3}$

**تمرين6:** حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $\frac{x+1}{2}+4=\frac{2x-5}{10}+\frac{2(x+10)}{5}$

2) $x^3-4x=0$

3) $(5x-7)(3x-10)=0$

**الجواب:** 1) $\frac{x+1}{2}+4=\frac{2x-5}{10}+\frac{2(x+10)}{5}$ ( نوحد المقامات )

يعني $\frac{5x+5}{10}+\frac{40}{10}=\frac{2x-5}{10}+\frac{4x+40}{10}$

يعني $\frac{5x+5+40}{10}=\frac{2x-5+4x+40}{10}$

يعني $5x+5+40=2x-5+4x+40$ يعني $-x=-10$

يعني $x=10$ ومنه: $S=\{10\}$

2) $x^3-4x=0$ يعني $x(x^2-4)=0$ (التعميل)

يعني $x=0$ أو $x^2-4=0$ يعني $x=0$ أو $x^2=7$

يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{4}$ أو $x=-\sqrt{4}$ ومنه:

$S=\{-2,0,2\}$

3) $(5x-7)(3x-10)=0$ يعني $5x-7=0$ أو $3x-10=0$

يعني $x=\frac{7}{5}$ أو $x=\frac{10}{3}$ ومنه: $S=\left\{\frac{7}{5},\frac{10}{3}\right\}$

### ب. المتراجحات من الدرجة الأولى

**مثال1:** حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المتراجحات التالية:

1) $-2x+12>0$ 2) $5x-15\le0$

**أجوبة:** 1) $-2x+12>0$ $-2x+12=0$ يكافئ $x=6$

و بما أن: $a=-2$ و $a<0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

| $x$ | $-\infty$ | 6 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-2x+12$ | | 0 | $-$ <br> $+$ |

و منه فان : $S=]-\infty;6[$

2) $5x-15\le0$ $5x-15=0$ يكافئ $x=3$

و بما أن: $a=5$ و $a>0$ فان جدول الإشارة هو كالتالي:

| $x$ | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $5x-15=0$ | $-$ | 0 | $+$ |

و منه فان : $S=]-\infty;6[$

**مثال2:** حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المتراجحات التالية:

1) $4x^2-9\ge0$ 2) $(1-x)(2x+4)>0$

**أجوبة:** 1) $4x^2-9\ge0$

$4x^2-9=0$ يعني $(2x)^2-3^2=0$ يعني

$(2x-3)(2x+3)=0$

يعني $2x+3=0$ أو $2x-3=0$ يعني $x=\frac{-3}{2}$ أو $x=\frac{3}{2}$

**الطريقة :** في جدول نعطي إشارة كل عامل على الشكل $ax+b$ ثم استنتج إشارة الجداء أو الخارج مع ترتيب تزايدي للقيم التي ينعدم فيها كل عامل.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $2x-3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(2x-3)(2x+3)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

و منه فان : $S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

2) $(1-x)(2x+4)>0$

$(1-x)(2x+4)=0$ يعني $2x+4=0$ أو $1-x=0$ يعني

$x=-2$ أو $x=1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+4$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $1-x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $(1-x)(2x+4)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

و منه فان : $S=]-2;1[$

## III.المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

**مثال1:** المعادلة $3x^2+x+2=0$ ليس لها حلا في $\mathbb{R}$ . لأن $\Delta\prec0$ $(\Delta=1-4\times3\times2=-23)$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S=\phi$.

**مثال 2:** المعادلة $x^2-10x+25=0$ لها حل وحيد لأن $\Delta=0$ $(\Delta=10^2-4\times25=0)$. حل هذه المعادلة هو: $-\frac{b}{2a}=5$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S=\{5\}$.

**مثال 3:** نعتبر المعادلة $x^2-3x+2=0$ لدينا $\Delta=9-4\times2=1$ بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما: $x_1=\frac{3-1}{2}=1$ و $x_2=\frac{3+1}{2}=2$ و منه $S=\{1;2\}$.

**تمرين 7:** حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $6x^2-7x-5=0$ $\Delta\succ0$ 2) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ $\Delta=0$

3) $3x^2+x+2=0$ $\Delta\prec0$ 4) $4x^2-8x+3=0$

5) $x^2-4x+2=0$ 6) $x^2+5x+7=0$

7) $2x^2-4x+6=0$ 8) $x^2-4x-21=0$

9) $3x^2-6x+3=0$

**الأجوبة:** $6x^2-7x-5=0$ $a=6$ و $b=-7$ و $c=-5$

$$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times6\times(-5)=49+120=169=(13)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1=\frac{-(-7)+\sqrt{169}}{2\times6}=\frac{7+13}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$

$x_2=\frac{7-13}{12}=\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{5}{3},-\frac{1}{2}\right\}$

(2 $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ $a=2$ و $b=-2\sqrt{2}$ و $c=1$

$$\Delta=b^2-4ac=\left(-2\sqrt{2}\right)^2-4\times2\times1=8-8=0$$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه المعادلة تقبل **حلا وحيدا هو:**

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-\left(-2\sqrt{2}\right)}{2\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

(3 $3x^2+x+2=0$ $a=3$ و $b=1$ و $c=2$

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times3\times2=1-24=-23<0$$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان المعادلة ليس لها حل في** $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

(4 $4x^2-8x+3=0$ $a=4$ و $b=-8$ و $c=3$

$$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times3\times(4)=84-8=16=(4)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\times4}$ و $x_2=\frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times4}$

$x_1=\frac{8+4}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ و $x_2=\frac{8-4}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ ومنه: $S=\left\{\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\}$

(5 $x^2-4x+2=0$ $a=1$ و $b=-4$ و $c=2$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times(1)=16-8=8>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{8}}{2\times1}$ و $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{8}}{2\times1}$

$x_1=\frac{4+2\sqrt{2}}{2}=\frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}=2+\sqrt{2}$

$x_2=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=\frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}=2-\sqrt{2}$ ومنه: $S=\left\{2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right\}$

(6 $x^2+5x+7=0$ $a=1$ و $b=5$ و $c=7$

$$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times1\times7=25-28=-3<0$$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان المعادلة ليس لها حل في** $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

(7 $2x^2-4x+6=0$ $a=2$ و $b=-4$ و $c=6$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times6=16-48=-32<0$$

بما أن $\Delta\prec0$ **فان المعادلة ليس لها حل في** $\mathbb{R}$ ومنه: $S=\varnothing$

(8 $x^2-4x-21=0$ $a=1$ و $b=-4$ و $c=-21$

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-21)=16+84=100=(10)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{100}}{2\times1}$ و $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{100}}{2\times1}$

$x_1=\frac{4+10}{2}=\frac{14}{2}=7$ و $x_2=\frac{4-10}{2}=\frac{-6}{2}=-3$ ومنه:

$S=\{-3,7\}$

9) $3x^2-6x+3=0$ و $a=3$ و $b=-6$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times3\times3=36-36=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا مزدوجا هو :

$x=\frac{-b}{2a}$ يعني $x=\frac{-(-6)}{2\times3}=\frac{6}{6}=1$ ومنه: $S=\{1\}$

## IV. إشارة ثلاثية الحدود $ax^2+bx+c$:

**الحالة1:** إذا كان $\Delta\succ0$ و $x_1$ و $x_2$ هما جذري ثلاثية الحدود فان:

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)=ax^2+bx+c$ | | اشارة a | 0 | عكس اشارة a | 0 | اشارة a | |

**الحالة2:** إذا كان $\Delta=0$ : و $x_1$ هو الجذر الوحيد المزدوج فان:

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)=ax^2+bx+c$ | | اشارة a | 0 | اشارة a | |

**الحالة3:** إذا كان $\Delta\prec0$ فان إشارة $P(x)$ هي إشارة العدد $a$

فان:

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $P(x)=ax^2+bx+c$ | | اشارة a | |

**مثال1:**

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=2x^2-3x+1$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $2x^2-3x+1\geq0$

**أجوبة:** 1) $P(x)=2x^2-3x+1$ $a=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{3+1}{4}=1$ و $x_2=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$ ومنه:

| $x$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | + | 0 | − | 0 | + | |

2) حل المتراجحة : $S=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

**مثال2:**

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=-2x^2+4x-2$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $-2x^2+4x-2\leq0$

**أجوبة:** 1) $P(x)=-2x^2+4x-2$ $a=-2$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times(-2)\times(-2)=16-16=0$

بما أن $\Delta=0$ فان هذه الحدودية لها جذر وحيد هو:

$x_1=\frac{-(4)}{2\times(-2)}=1$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)=-2x^2+4x-2$ | | − | 0 | − | |

2) حل المتراجحة : $S=\mathbb{R}$

**مثال3:**

1. أدرس إشارة الحدودية $P(x)=3x^2+6x+5$
2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $3x^2+6x+5<0$

**أجوبة:** 1) $P(x)=3x^2+6x+5$ $a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$ ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $P(x)=3x^2+6x+5$ | | + | |

2) حل المتراجحة : $S=\varnothing$

**تمرين8:** حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $2x^2-4x+6\geq0$ 2) $4x^2-8x+3\leq0$ 3) $x^2-3x-10<0$

**أجوبة:** 1) $2x^2-4x+6\geq0$ $a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=16-48=-32<0$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $P(x)=3x^2+6x+5$ | | + | |

ومنه: $S=\mathbb{R}$

2) $4x^2-8x+3\leq0$ $a=4$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{8+4}{2\times4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ و $x_2=\frac{8-4}{8}=\frac{1}{2}$ ومنه:

| $x$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x^2-8x+3$ | + | 0 | − | 0 | + | |

$S=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

3) $x^2-3x-10<0$ $a=4$

$\Delta=b^2-4ac=49>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان للحدودية جذرين هما:

$x_1=5$ و $x_2=-2$ ومنه:

| $x$ | | $-2$ | | $5$ | | $+\infty$ $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x^2-8x+3$ | + | 0 | − | 0 | + | |

$S=]-2,5[$

## V. النظمات:

نعتبر النظمة: $(S):\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ حيث $a$ و $b$ و $a'$ و $b'$ و $c'$ أعداد حقيقية. هناك عدة طرق لحل نظمة سبق أن درست طريقتين هما طريقة التعويض و التأليفة الخطية طبعا هناك طريقة أخرى انتبه

**a. طريقة التعويض :**

**مثال:** حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}4x+y=10\\-5x+2y=-19\end{cases}$

**الجواب :** نبحث عن $y$ في المعادلة الأولى مثلا

$4x+y=10$ يعني $y=10-4x$

ونعوض $y$ بقيمتها في المعادلة الثانية

يعني $-5x+2y=-19$ يعني $-5x+2(10-4x)=-19$

يعني $-5x-8x=-19-20$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض $x$ ب $3$ في المعادلة $y=10-4x$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

**b. طريقة التأليفة الخطية**

**مثال:** حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمة التالية : $\begin{cases}4x+y=10\\-5x+2y=-19\end{cases}$

**الجواب :**

نضرب المعادلة الأولى في العدد $(-2)$ فنحصل على :

$\begin{cases}-8x-2y=-20\\-5x+2y=-19\end{cases}$ وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

يعني $-8x-2y-5x+2y=-20-19$ يعني $-13x=-39$ يعني $x=3$

ونعوض $x$ ب $3$ في المعادلة $4x+y=10$ فنجد $y=-2$

و منه: $S=\{(3,-2)\}$

**c. طريقة المحددة :تعريف و خاصية:** العدد الحقيقي $ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة $(S)$ و نكتب: $\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\a' & b'\end{vmatrix}$

• إذا كان $\Delta=0$ فان النظمة $(S)$ قد لا يكون لها أي حل, و قد يكون لها عدد لا منته من الحلول.

• إذا كان $\Delta\neq0$ فان النظمة $(S)$ تسمى نظمة كرامر و تقبل حلا وحيدا هو الزوج $(x,y)$ حيث:

$x=\dfrac{\begin{vmatrix}c & b\\c' & b'\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{cb'-c'b}{\Delta}$ و $y=\dfrac{\begin{vmatrix}a & c\\a' & c'\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{ac'-a'c}{\Delta}$ .

هذه الطريقة تسمى طريقة المحددة.

**مثال:** طريقة المحددة:

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة: $(1)\begin{cases}x+2y=4\\-x+4y=2\end{cases}$

**الجواب :** محددة النظمة $(1)$ هي: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\-1 & 4\end{vmatrix}=6\neq0$ و منه النظمة تقبل حلا وحيدا: هو $x=\dfrac{\begin{vmatrix}4 & 2\\2 & 4\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{12}{6}=2$ و $y=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 4\\-1 & 2\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{6}{6}=1$ و

منه: $S=\{(2,1)\}$

**تمرين 9:** حل في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ النظمات التالية :

1) $\begin{cases}2x-y=-1\\3x+2y=9\end{cases}$

2) $\begin{cases}x-2y=-4\\-2x+3y=5\end{cases}$  3) $\begin{cases}-7x-3y=4\\4x+5y=-2\end{cases}$

**أجوبة :**

1) $\begin{cases}2x-y=-1\\3x+2y=9\end{cases}$ نبحث عن $y$ في المعادلة الأولى مثلا

$2x-y=-1$ يعني $y=2x+1$

ونعوض $y$ بقيمتها في المعادلة الثانية

$3x+2(2x+1)=9$ يعني $-5x+2y=-19$

يعني $7x+2=9$ يعني $7x=7$ يعني $x=1$

ونعوض $x$ ب $1$ في المعادلة $y=2x+1$ فنجد $y=3$

و منه: $S=\{(1,3)\}$

2) $\begin{cases}x-2y=-4\\-2x+3y=5\end{cases}$

نضرب المعادلة الأولى في العدد $(2)$ فنحصل على :

$\begin{cases}2x-4y=-8\\-2x+3y=5\end{cases}$ وبجمع المعادلتين طرف لطرف نجد:

$2x-4y-2x+3y=-8+5$ يعني $-y=-3$ يعني $y=3$

ونعوض $y$ ب $3$ في المعادلة $x-2y=-4$ فنجد $x=2$

و منه: $S=\{(2,3)\}$

3) محددة النظمة $(1)$ هي: $\Delta=\begin{vmatrix}-7 & -3\\4 & 5\end{vmatrix}=-35+12=-23\neq0$

و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:

هو $x=\dfrac{\begin{vmatrix}4 & -3\\-2 & 5\end{vmatrix}}{\Delta}=-\dfrac{14}{23}$ و $y=\dfrac{\begin{vmatrix}-7 & 4\\4 & -2\end{vmatrix}}{\Delta}=-\dfrac{2}{23}$

و منه: $S=\left\{\left(-\dfrac{14}{23},-\dfrac{2}{23}\right)\right\}$

## تمارين للبحث

**تمرين 1 :** حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $2x^2-4x+6=0$  2) $4x^2-8x+3=0$

3) $3x^2-6x+3=0$  4) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

5) $x^2-4x+2=0$  6) $x^2+5x+7=0$

**تمرين 2 :** 1)حل جبريا النظمة التالية : $\begin{cases}x+y=14\\5x+3y=50\end{cases}$ .

2) ملأ شخص أربع عشرة قنينة بخمس لترات من عصير فواكه . إذا علمت أن القنينات نوعان : قنينات سعة كل واحدة منها $0,5$ لترا و قنينات سعة كل واحدة منها $0,3$ لترا، حدد عدد القنينات من كل نوع .

**تمرين 3 :**

1) حل المعادلة : $(2x-3)(4-3x)=0$ .

2) حل المتراجحة : $5x-2<2(x+5)$ .

3) اشترى شخص محسبة و كتابا بثمن 153 درهما. إذا علمت أن نصف ثمن المحسبة ينقص بثمانية عشر درهما عن ثلثي ثمن الكتاب، أحسب ثمن المحسبة .

**تمرين 4 :**

1) حل النظمة : $\begin{cases}x+y=20\\2x+5y=61\end{cases}$ .

2) يتوفر أحمد على 61 درهما موزعة على 20 قطعة نقدية بعضها من فئة درهمين ، والبعض الآخر من فئة خمسة دراهم. أحسب عدد القطع النقدية من كل فئة

**تمرين 5 :**

1) أ) حل المعادلة التالية : $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{5}{6}=x-\dfrac{3}{2}$ .

ب)حـل المتراجحة التالية : $2-3x>x+7$ .

2) أ) حـل النظمة : $\begin{cases}3x+5y=72\\ x+y=20\end{cases}$ .

ب) واجب زيارة أحد المتاحف هو 3 دراهم للأطفال و 5 دراهم للكبار.
أدى فوج من 20 زائر مبلغ 72 درهما لزيارة هذا المتحف.
حدد عدد الأطفال و عدد الكبار في هذا الفوج .

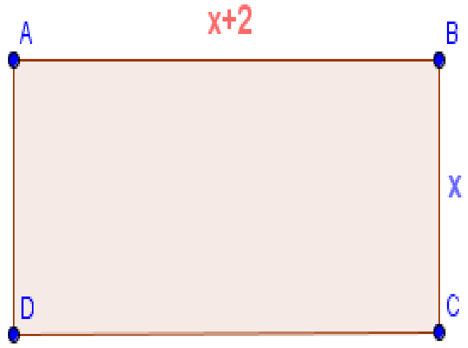
1) $\begin{cases}2x-5y=-13\\ 3x+2y=9\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-2y=1\\ -2x+4y=-2\end{cases}$

# تـريـيـض وضـعـيـات :

**نشاط**

**أحسب طول عرض مستطيل اذا علمت أن طوله يزيد عن عرضه ب $2cm$**
وأن مساحته تساوي $15cm^2$

## الجواب




**ليكن $x$ عرض مستطيل اذن طوله هو : $x+2$**
ومنه مساحته هي :

$$S=x(x+2)=15$$

ومنه نحصل عن معادلة من الدرجة الثانية :

$$x^2+2x-15=0$$

: $a=1$ و $c=-15$ و $b=2$

$$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4\times1\times(-15)=64>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **و** $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-2+8}{2\times1}=3$ **و** $x_2=\dfrac{-2-8}{2\times1}=-5<0$

ومنه: بما أن عرض مستطيل لا يمكن أن يكون سالبا :

نأخذ $x=3$

وبالتالي طوله هو: 5 cm

أكاديمية الجهة

# الدرس الثالث :
# عموميات حول الدوال

الأستاذ: نجيب عثماني

**مستوى:السنة الأولى من سلك الباكالوريا**

- **شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
- **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

**محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية**

| محتوى البرنامج | القدرات المنتظرة | توجيهات تربوية |
|---|---|---|
| - الدالة الزوجية؛ الدالة الفردية؛ التأويل المبياني؛<br>- الدالة المكبورة، الدالة المصغورة؛ الدالة المحدودة؛<br>- مقارنة دالتين؛ التأويل المبياني؛<br>- رتابة دالة عددية؛ معدل التغير؛<br>- مطاريف دالة | - مقارنة تعبيرين باستعمال مختلف التقنيات؛<br>- استنتاج تغيرات دالة أو القيم القصوية والدنوية لدالة انطلاقا من تمثيلها المبياني أو من جدول تغيراتها؛<br>- المزاوجة بين قراءة وتأويل بعض التمثيلات المبيانية وبين بعض خاصيات الدوال. | - ينبغي تعويد التلاميذ على استنتاج تغيرات دالة عددية انطلاقا من تمثيلها المبياني؛ كما ينبغي الاهتمام بإنشاء المنحنيات؛<br>- يمكن في حدود الإمكان استعمال الآلات الحاسبة والبرانم المعلوماتية المدمجة في الحاسوب التي تمكن من دراسة الدوال. |

## I. تذكير

**تمرين 1:**

حدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

1) $f(x)=3x^2-x+1$ (2 $g(x)=\frac{x^3}{2x-4}$

3) $h(x)=\frac{5x+10}{x^2-9}$ (4 $m(x)=\sqrt{2x-4}$

**الجواب:** 1) $f(x)=3x^2-x+1$

يعني $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $g(x)=\frac{x^3}{2x-4}$ يعني $D_g=\{x\in\mathbb{R}/2x-4\neq 0\}$

$2x-4=0$ يعني $2x=4$ يعني $x=2$ ومنه $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$

3) $g(x)=\frac{x^3}{2x-4}$ يعني $D_g=\{x\in\mathbb{R}/2x-4\neq 0\}$

$2x-4=0$ يعني $2x=4$ يعني $x=2$

ومنه $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$

**تمرين 2:** حدد مجموعة تعريف الدالة $f$ في الحالات التالية:

1) $f(x)=x^3-3x^2-5x+10$ (2 $f(x)=\frac{x^2+x-1}{4x-12}$

3) $f(x)=\frac{x+10}{4x^2-1}$ (4 $f(x)=\frac{7x-1}{x^3-2x}$

5) $f(x)=\frac{x-5}{2x^2-5x-3}$ (6 $f(x)=\sqrt{-3x+6}$

**الجواب:** 1) $f(x)=x^3-3x^2-5x+10$

يعني $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $f(x)=\frac{x^2+x-1}{4x-12}$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/4x-12\neq 0\}$

$4x-12=0$ يعني $4x=12$ يعني $x=3$ ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

3) $f(x)=\frac{x+10}{4x^2-1}$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/4x^2-1\neq 0\}$

$4x^2-1=0$ يعني $(2x)^2-1^2=0$ يعني $(2x-1)(2x+1)=0$

يعني $2x-1=0$ أو $2x+1=0$ يعني $x=\frac{1}{2}$ أو $x=-\frac{1}{2}$ ومنه

$D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$

4) $f(x)=\frac{7x-1}{x^3-2x}$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^3-2x\neq 0\}$

$x^3-2x=0$ يعني $x(x^2-2)=0$ يعني $x^2-3=0$ أو $x=0$

يعني $x^2=3$ أو $x=0$ يعني $x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$ أو $x=0$

ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{3};0;\sqrt{3}\}$

5) $f(x)=\frac{x-5}{2x^2-5x-3}$ يعني

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-5x-3\neq 0\}$

$2x^2-5x-3=0$ نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=-5$ و $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times(-3)=25+24=49=(7)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3$ و $x_2=\frac{(-5)-\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{5-7}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

ومنه: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};3\right\}$

6) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/-3x+6\geq 0\}$

$-3x+6\geq 0$ يعني $-3x\geq -6$ يعني $x\leq\frac{-6}{-3}$ يعني $x\leq 2$ ومنه $D_m=]-\infty;2]$

**تمرين 3:** أدرس زوجية الدالة $f$ في الحالات التالية: 1) $f(x)=3x^2$ . 2) $f(x)=\frac{4}{x}$ 3) $f(x)=2x^5-3x$ 4) $f(x)=\frac{x^4-2}{2x^2-1}$ 5) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

**تمرين 4:** نعتبر الدوال $f$ و $g$ المعرفة كالتالي:

$$g(x)=\frac{3x}{9x^2-1}$$

1) حدد $(D_g)$ مجموعة تعريف الدالة $g$.

2) أدرس زوجية الدالة $g$. و أعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

**الأجوبة:** 1) $g(x)=\frac{x^4}{9x^2-1}$ $D_g=\{x\in\mathbb{R}/9x^2-1\neq 0\}$

$9x^2-1=0$ يعني $x=-\frac{1}{3}$ أو $x=\frac{1}{3}$ ومنه:

$D_g=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}$

2) دراسة زوجية الدالة $g$ :

2) أ) لكل $x$ من $D_g=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $D_g=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}$.

ب) $g(-x)=\frac{3(-x)}{9(-x)^2-1}=-\frac{3x}{9x^2-1}=-g(x)$ ومنه $g$ دالة فردية

التأويل المبياني: النقطة $O$ مركز تماثل لمنحنى الدالة $g$.

**التأويلات المبيانية**

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي $x$ و $C_f$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

❖ تكون $f$ دالة زوجية إذا و فقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل المنحنى $C_f$.

❖ تكون $f$ دالة فردية إذا و فقط إذا كانت النقطة $O$ مركز تماثل المنحنى $C_f$.

## II. الدالة المكبورة و الدالة المصغورة و الدالة المحدودة

**نشاط :** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي: $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

1. حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$
2. بين أن: $f(x)\leq 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$
3. بين أن: $0\leq f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$
4. ماذا تستنتج؟ماذا نقول عن الدالة $f$ ؟

**الأجوبة:** 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=-1$ و هذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

$D_f=\mathbb{R}$

2) نعلم أن: $x^2\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن: $x^2+1\geq 0+1$ يعني $x^2+1\geq 1$

يعني $\frac{1}{x^2+1}\leq 1\Leftrightarrow f(x)\leq 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

نقول $f$ دالة مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 1

سؤال: هل الدالة $f$ مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 2؟ نعم

3) نعلم أن: $x^2\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن: $x^2+1\geq 0+1$ يعني $x^2+1\geq 1$

يعني $0\leq f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

نقول $f$ دالة مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 0

سؤال: هل الدالة $f$ مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد -1؟ نعم

4)نستنتج أن: $0\leq f(x)\leq 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن : $f$ مكبورة و مصغورة على $\mathbb{R}$ نقول $f$ دالة محدودة على $\mathbb{R}$

### ز. تعريف

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$.

- نقول إن $f$ دالة مكبورة على مجال $I$ إذا وجد عدد حقيقي $M$ بحيث: $\forall x\in I\quad f(x)\leq M$
- نقول إن $f$ دالة مصغورة على مجال $I$ إذا وجد عدد حقيقي $m$ بحيث: $\forall x\in I\quad f(x)\geq m$
- نقول إن $f$ دالة محدودة على مجال $I$ إذا كانت مكبورة و مصغورة على المجال $I$.

**تمرين 5:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2-2x+5$

بين أن الدالة $f$ مصغورة بالعدد 4

**الجواب :** يكفي أن نبين أن: $4\leq f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن نحسب الفرق: $f(x)-4=x^2-2x+5-4=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$

ومنه: $4\leq f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

وبالتالي $f$ مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 4

**تمرين 6:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي: $f(x)=-2x^2+4x+1$

بين أن الدالة $f$ مكبورة بالعدد 3

**الجواب :** يكفي أن نبين أن: $f(x)\leq 3$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن نحسب الفرق: $3-f(x)=3-(-2x^2+4x+1)=3+2x^2-4x-1$

$3-f(x)=2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2\geq 0$

ومنه: $f(x)\leq 3$ $\forall x\in\mathbb{R}$

وبالتالي $f$ مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 3

## III.مطاريف دالة عددية

**نشاط1:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^2+2$

1. أحسب: $f(0)$
2. أحسب: $f(x)-f(0)$ وماذا تستنتج؟

**الأجوبة:** 1) $D_f=\mathbb{R}$ و $f(0)=2$

2) $f(x)-f(0)=x^2+2-2=x^2$

نعلم أن: $0\leq x^2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن: $f(x)-f(0)\geq 0$

يعني $f(0)\leq f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

نقول $f(0)$ هي قيمة دنيا للدالة $f$ على $\mathbb{R}$

**نشاط2:** لتكن $f$ دالة معرفة ب: $f(x)=-x^2+2x+1$.

1) أحسب $f(1)$ و $f(1)-f(x)$ مهما تكن $x$ من $\mathbb{R}$.

2) ماذا تستنتج؟

**الأجوبة:** 1) $D_f=\mathbb{R}$ و $f(1)=2$

$f(1)-f(x)=2-(-x^2+2x+1)=2+x^2-2x-1$

$f(1)-f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\ge 0$

اذن: $f(1)\ge f(x)$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}$

نقول $f(1)$ هي قيمة قصوى للدالة $f$ على $\mathbb{R}$

**تعريف:** لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$ و $a$ عنصرا من المجال $I$

▪ نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة $f$ على المجال $I$, إذا كان: $\forall x\in I \quad f(x)\le f(a)$

▪ نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة $f$ على المجال $I$, إذا كان: $\forall x\in I \quad f(x)\ge f(a)$

**تمرين 7:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$f(x)=x^2+4$

1) حدد $D_f$

2) أحسب: $f(0)$

3) بين أن $f(0)$ هي قيمة دنيا للدالة $f$ على $\mathbb{R}$

**تمرين 8:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$f(x)=-x^2+1$

1) حدد $D_f$

2) أحسب: $f(0)$

3) بين أن $f(0)$ هي قيمة قصوى للدالة $f$ على $\mathbb{R}$

## IV. مقارنة دالتين

**نشاط1:** لتكن الدالتين العدديتين $f$ و $g$ المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=2x-1$ و $g(x)=x^2$

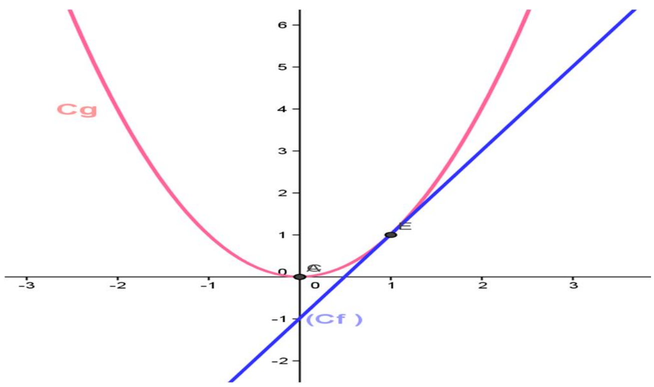
1. املأ الجدولين التاليين ومثل الدالتين $f$ و $g$ في نفس المعلم

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | -1 | 1 |

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

2. أدرس اشارة الفرق: $g(x)-f(x)$ وماذا تستنتج مبيانيا؟

**الأجوبة:** 1) $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية




2) $g(x)-f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\ge 0$ ومنه $g(x)\ge f(x)$

نقول أننا قمنا بمقارنة للدالتين $f$ و $g$ وجدنا أن: $g\ge f$

مبيانيا نلاحظ أن منحنى الدالة $g$ يوجد فوق منحنى الدالة $f$

**1. تعريف :**

لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين و $D_f$ و $D_g$ على التوالي مجموعة تعريفهما.

نقول إن $f$ تساوي $g$ ونكتب $f=g$ إذا وفقط إذا كان :

$D_g=D_f$ و $f(x)=g(x)$ $\quad(\forall x\in D_f)$

2. **تعريف :** لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين معرفتين على مجال $I$ . نقول إن $f$ أصغر من أو يساوي $g$ على مجال $I$ ونكتب $f\le g$ إذا وفقط إذا كان :

$(\forall x\in I)\quad f(x)\le g(x)$

3. **التأويل الهندسي :** $f\le g$ على مجال $I$ يعني هندسيا أن منحنى الدالة $f$ يوجد تحت منحنى الدالة $g$ على المجال $I$ .

**ملحوظة :**

- $f<g$ على المجال $I$

إذا وفقط إذا كان : $(\forall x\in I)\ f(x)<g(x)$

- $f\ge 0$ على المجال $I$

إذا وفقط إذا كان : $(\forall x\in I)\ f(x)\ge 0$

## V. رتابة دالة عددية

- يمكن دراسة رتابة دالة $f$ على مجال $I$ بدراسة إشارة معدل التغير : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

مع $x_1$ و $x_2$ عنصرين مختلفين من $I$

- نقول إن $f$ دالة رتيبة على $I$ إذا كانت $f$ تزايدية قطعا أو تناقصية قطعا على مجال $I$.

**نشاط1:** لتكن الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=4x-3$

1) حدد $D_f$

2) أدرس رتابة $f$

3) حدد جدول تغيرات الدالة $f$

**أجوبة :**

1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) ليكن: $x_1\in\mathbb{R}$ و $x_2\in\mathbb{R}$ بحيث $x_1\ne x_2$

نحسب معدل تغير الدالة $f$ : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(4x_2-3)-(4x_1-3)}{x_2-x_1}=\frac{4x_2-4x_1}{x_2-x_1}=\frac{4(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

ومنه : $T=4\ge 0$ وبالتالي الدالة $f$ تزايدية على $\mathbb{R}$

3) جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | |

**نشاط2:** لتكن الدالة $g$ المعرفة كالتالي : $g(x)=-3x+2$

1) حدد $D_g$

2) أدرس رتابة $g$

3) حدد جدول تغيرات الدالة $g$

**أجوبة :**

1) $D_g=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2)ليكن : $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 \neq x_2$

نحسب معدل تغير الدالة $g$ : $\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$

$$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(-3x_2+2)-(-3x_1+2)}{x_2-x_1} = \frac{-3x_2+3x_1}{x_2-x_1} = \frac{-3(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 2 | 8 | 18 |

ومنه : $T = -3 \leq 0$ وبالتالي الدالة $g$ تناقصية على $\mathbb{R}$

3)جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g(x)$ | ↘ |

**تمرين 9:** لتكن الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x) = 12x - 7$

1) حدد $D_f$

2) أدرس رتابة $f$

3) حدد جدول تغيرات الدالة $f$

**تمرين 10:** لتكن $f$ دالة معرفة ب: $f(x) = 2x^2$ .

1) حدد $D_f$ مجموعة تعريف الدالة $f$ .

2) أدرس زوجية الدالة $f$

3) أحسب معدل تغير الدالة $f$

4) أدرس رتابة الدالة $f$ على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0]$

5) وحدد جدول تغيرات الدالة $f$ .

6) حدد مطا ريف الدالة $f$

7) أرسم التمثيل المبياني للدالة $f$

**أجوبة :** 1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) أ) لكل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$ .

ب) $f(-x) = 2(-x)^2 = 2x^2 = f(x)$

ومنه $f$ دالة زوجية

3)حساب معدل تغير الدالة $f$

$$T = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{2x_2^2-2x_1^2}{x_2-x_1} = \frac{2(x_2^2-x_1^2)}{x_2-x_1}$$

$$T = \frac{2(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1} = 2(x_2+x_1)$$

4) أ) دراسة رتابة الدالة $f$ على المجال $[0;+\infty[$ :

ليكن : $x_1 \in [0;+\infty[$ و $x_2 \in [0;+\infty[$

اذن $T = 2(x_2+x_1) \geq 0$

ومنه الدالة $f$ تزايدية على $[0;+\infty[$

ب) دراسة رتابة الدالة $f$ على المجال $]-\infty;0]$ :

ليكن : $x_1 \in ]-\infty;0]$ و $x_2 \in ]-\infty;0]$

اذن $T = 2(x_2+x_1) \leq 0$

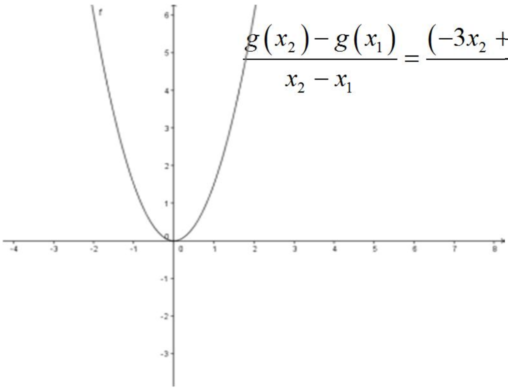
ومنه الدالة $f$ تناقصية على $]-\infty;0]$

5)حدد جدول تغيرات الدالة $f$ .

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | 0 | ↗ |

6) $f$ تقبل قيمة دنيا عند $x_0 = 0$

7) رسم التمثيل المبياني للدالة $f$



الأستاذ: نجيب عثماني

# الدرس الرابع : المتتاليات العددية

أكاديمية الجهة

**مستوى: السنة الأولى من سلك الباكالوريا**

- **شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
- **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

**محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية**

| | | |
|---|---|---|
| - المتتاليات العددية؛<br>- المتتاليات الحسابية؛<br>- المتتاليات الهندسية | - التعرف على متتالية حسابية أو هندسية وتحديد أساسها وحدها الأول؛<br>- حساب الحد العام لمتتالية هندسية أو لمتتالية حسابية؛<br>- حساب مجموع $n$ حدا متتابعة من متتالية حسابية أو متتالية هندسية؛<br>- استعمال المتتاليات الحسابية و المتتاليات الهندسية في حل مسائل متنوعة. | - يتم تقديم مفهوم المتتاليات من خلال وضعيات مناسبة<br>- يعتبر أي بناء نظري لمفهوم المتتالية خارج المقرر؛<br>- يشكل درس المتتاليات فرصة لتعويد التلاميذ على استعمال الأدوات المعلوماتية. |

## I. المتتاليات الحسابية

**نشاط1:** لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

1) $0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10$ , .............

2) $6 , 3 , 0 , -3 , -6 , -9 , -12$ , .............

3) $1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243$ , .............

4) $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \frac{1}{32}$ , .............

$1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36$, .............

ليكن $I$ هو $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$

**نشاط2:** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n+3$

*1. أحسب حدها الأول* $u_0$

*2. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية* $(u_n)_{n\geq 0}$

*الجواب :* $u_0 = 2\times 0+3 = 3$ و $u_1 = 2\times 1+3 = 5$

$u_2 = 2\times 2+3 = 4+3 = 7$ و $u_3 = 2\times 3+3 = 9$

نلاحظ أن فرق حدين متتاليين هو العدد 2

### *1. تعريف :*

نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي $r$ بحيث :

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r$$

العدد الحقيقي $r$ يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$

**مثال:** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n-1$$

1. أحسب حدها الأول $u_0$
2. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$
3. أحسب $u_{n+1} - u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

*الجواب :* $u_0 = 2\times 0-1 = 0-1 = -1$

$u_1 = 2\times 1-1 = 2-1 = 1$

$u_2 = 2\times 2-1 = 4-1 = 3$

$u_3 = 2\times 3-1 = 6-1 = 5$

نلاحظ أن فرق حدين متتاليين هو العدد 2

$u_{n+1} - u_n = (2(n+1)-1)-(2n-1) = (2n+2-1)-(2n-1)$

اذن: $= (2n+2-1)-(2n-1) = (2n+1)-(2n-1) = 2n+1-2n+1$

$u_{n+1} - u_n = 2 = r$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هي حسابية أساسها : $r = 2$

**تمرين1:** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n+3$$

1. أحسب : $u_{n+1} - u_n$
2. ماذا تستنتج ؟

**تمرين2:** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة كالتالي : $u_n = \frac{n+3}{4}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

بين أن المتتالية $(u_n)$ حسابية وحدد أساسها وحدها الأول

**الجواب :** $u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)+3}{4} - \frac{n+3}{4} = \frac{1}{4} = r$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ هي حسابية أساسها $\frac{1}{4} = r$

وحدها الأول : $u_0 = \frac{3}{4}$

### *1. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :*

إذا كانت $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $r$ وحدها الأول $u_0$

فان : $u_n = u_0 + nr$

***نتيجة :*** إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها $r$

فان : $u_n = u_p + (n-p)r$ لكل $n \geq n_0$ و $p \geq n_0$

**تمرين3**: لتكن $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و $u_6=31$

1) أحسب $u_0$ 2) أكتب $u_n$ بدلالة $n$ 3) أحسب : $u_{2015}$ ثم $u_{2016}$

**أجوبة**: 1) لدينا $(u_n)$ حسابية اذن : $u_n=u_0+nr$

ومنه : $u_6=u_0+6\times\frac{1}{2}$ **يعني** $31=u_0+3$ **يعني** $28=u_0$

2) $u_n=u_0+nr$ يعني $u_n=28+\frac{n}{2}$

3) $u_{2015}=28+\frac{2015}{2}=\frac{2071}{2}$ و

$u_{2016}=28+\frac{2016}{2}=28+1008=1036$

**تمرين4**: لتكن $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $r$ و بحيث $u_0=5$ و $u_{100}=-45$

1) حدد $r$ 2) أحسب : $u_{2015}$ و $u_{2016}$

**أجوبة**: 1) لدينا $(u_n)$ حسابية اذن : $u_n=u_0+nr$

ومنه : $u_{100}=u_0+100r$ **يعني** $-45=5+100r$ **يعني** $-50=100r$ **يعني** $r=-\frac{1}{2}$

2) $(u_n)$ حسابية اذن : $u_n=u_0+nr$ يعني $u_{2015}=5+2015\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

يعني $u_{2015}=5-\frac{2015}{2}$ يعني $u_{2015}=\frac{10-2015}{2}=\frac{-2005}{2}$ ومنه

$u_{2016}=\frac{-2005}{2}+\frac{-1}{2}=\frac{-2006}{2}=-1003$

## 2. مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية

نضع $S_n=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots+u_n$ حيث $n\succ p\ge n_0$

لدينا $S_n=(n-p+1)\left(\frac{u_n+u_p}{2}\right)$

المجموع $S_n=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots+u_n$ يحتوي على $(n-p+1)$ حد

**مثال**: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\ge1}$ الذي أساسها $r=3$ وحدها الأول $u_0=5$

1) أكتب $u_n$ بدلالة $n$ وحدد $u_8$ و $u_{13}$

2) أحسب المجموع التالي : $S=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{13}$

**أجوبة** : 1) وبما أن $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها الأول $u_0=5$

فان : $u_n=u_0+(n-0)r$ أي: $u_n=5+3(n-0)$ أي: $u_n=3n+5$

ومنه : $u_8=3\times8+5=29$

2) $S=u_0+u_1+\cdots+u_{13}=(13-0+1)\frac{u_0+u_{13}}{2}$

$S=14\frac{u_0+u_{13}}{2}=\frac{14}{2}(5+u_{13})$ ومنه نحسب: $u_{13}=3\times13+5=44$

وبالتالي: $S=7(5+44)=7\times49=343$

**تمرين5**:

1. لتكن $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0=1$

أحسب المجموع التالي : $S_1=u_3+u_4+u_5+\cdots+u_{30}$

2. لتكن $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $r=-2$ و حدها الأول $u_0=4$

أحسب المجموع التالي : $S_2=u_7+u_8+u_9+\cdots+u_{25}$

الجواب: 1) $S_1=u_3+u_4+u_5+\cdots+u_{30}=(30-3+1)\frac{u_3+u_{30}}{2}$

$S_1=(28)\frac{u_3+u_{30}}{2}$

وبما أن $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0=1$

فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=1+(n-0)\frac{1}{2}$ أي: $u_n=1+\frac{n}{2}$

ومنه نحسب: $u_3=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ و: $u_{30}=1+\frac{30}{2}=\frac{32}{2}=16$

وبالتالي: $S_1=(28)\frac{u_3+u_{30}}{2}=14\left(\frac{5}{2}+16\right)=14\left(\frac{37}{2}\right)=7\times37=259$

2) $S_2=u_7+u_8+u_9+\cdots+u_{25}=(25-7+1)\frac{u_7+u_{25}}{2}=(19)\frac{u_7+u_{25}}{2}$

وبما أن $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $r=-2$ وحدها الأول $u_0=4$ فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=4+(n-0)(-2)$ أي: $u_n=4-2n$

نحسب: $u_7=4-2\times7=4-14=-10$

و $u_{25}=4-2\times25=4-50=-46$

وبالتالي: $S_2=(19)\frac{u_7+u_{25}}{2}=(19)\frac{-10+-46}{2}=(19)\frac{-56}{2}=19\times-28=-532$

**تمرين6**: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\ge1}$ الذي أساسها $r=2$ وحدها الأول $u_0=3$

1) أكتب $u_n$ بدلالة $n$ وحدد $u_1$ و $u_{10}$

2) أحسب المجموع التالي : $S=u_1+u_1+u_2+\cdots+u_{10}$

**أجوبة** : 1) وبما أن $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول $u_0=3$ فان : $u_n=u_0+(n-0)r$ أي: $u_n=3+2(n-0)$

أي: $u_n=2n+3$ ومنه : $u_1=5$ و $u_{10}=23$

2) $S=u_1+u_1+\cdots+u_{10}=(10-1+1)\frac{u_1+u_{10}}{2}$

$S=10\frac{5+23}{2}=10\times\frac{28}{2}=10\times14=140$

**تمرين7**: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\ge1}$ الذي أساسها $r=4$ وحدها الأول $u_0=-2$

1) أكتب $u_n$ بدلالة $n$ وحدد $u_1$ و $u_6$

2) أحسب المجموع التالي : $S=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_6$

**أجوبة** : 1) وبما أن $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $r=4$

وحدها الأول $u_0=-2$

فان : $u_n=u_0+(n-0)r$ أي: $u_n=-2+4(n-0)$

أي: $u_n=4n-2$

ومنه : $u_1=2$ و $u_6=22$

2) $S=u_1+u_1+\cdots+u_6=(6-1+1)\frac{u_1+u_6}{2}$

$S=6\frac{2+22}{2}=6\times\frac{24}{2}=6\times12=72$

## II. المتتاليات الهندسية

**نشاط1:** لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

1. $1\,,\,3\,,\,9\,,\,27\,,\,81\,,\,243\,,\,..........$
2. $1\,,\,-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{4}\,,\,-\frac{1}{8}\,,\,\frac{1}{16}\,,\,-\frac{1}{32}\,,\,...........$

**نشاط2:** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n=2\times3^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$
2. أحسب $\frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

**الجواب:** (1

$u_0=2\times3^0=2\times1=2$ و $u_1=2\times3^1=6$ و $u_2=2\times3^2=18$ و $u_3=2\times3^3=54$

(2 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2\times3^{n+1}}{2\times3^n}=\frac{3^{n+1}}{3^n}=\frac{3^n\times3^1}{3^n}=3^1=3=q$

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $u_0=2$

### 1. تعريف:

نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي $q$

بحيث : $u_{n+1}=qu_n \quad \forall n\ge n_0$

العدد الحقيقي $q$ يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$

**تمرين8:** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge0}$ بحيث: $u_n=5\times3^{2n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

بين أن $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية و حدد أساسها $q$ و حدها الأول

**الجواب :** $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{5\times3^{2n+3}}{5\times3^{2n+1}}=\frac{3^{2n+3}}{3^{2n+1}}=3^{(2n+3)-(2n+1)}=3^2=9=q$

اذن: المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ هندسية أساسها $q=9$ وحدها الأول $u_0=15$

**تمرين9:** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

بين أن $(u_n)$ متتالية هندسية و حدد أساسها و حدها الأول

### 2. صيغة الحد العام للمتتاليات بدلالة $n$ :

إذا كانت $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $q$ غير منعدم وحدها الأول $u_{n_0}$ فان :

$$u_n=u_{n_0}q^{n-n_0}$$

**نتيجة :** إذا كانت $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية هندسية أساسها $q$ غير منعدم فان :

$u_n=u_mq^{n-m}$ لكل $n\ge n_0$ و $m\ge n_0$

**تمرين10:** لتكن $(u_n)$ متتالية هندسية بحيث : $u_5=\frac{243}{2}$ و $u_2=\frac{9}{2}$

حدد $q$ أساس المتتالية $(u_n)$ و أكتب $u_n$ بدلالة $n$

**الجواب :** لدينا $(u_n)$ متتالية هندسية اذن : $u_n=u_mq^{n-m}$

ومنه : اذن: $u_5=u_2q^{5-2}$ يعني $\frac{243}{2}=\frac{9}{2}q^3$

يعني $q^3=\frac{243}{9}$ يعني $q^3=27$ يعني $q=3$

لدينا أيضا : $u_n=u_2q^{n-2}$ يعني $u_n=\frac{9}{2}3^{n-2}=\frac{3^2\times3^{n-2}}{2}=\frac{3^{n-2+2}}{2}=\frac{3^n}{2}$

**تمرين11:** نعتبر المتتالية الهندسية $(u_n)$ بحيث حدها الأول $u_0=81$

وأساسها : $q=\frac{1}{3}$

1) أكتب $u_n$ بدلالة $n$ 2) أحسب $u_1$ و $u_2$ و $u_3$

3) حدد العدد الصحيح الطبيعي $n$ بحيث $u_n=1$

الأجوبة: 1) نعلم أن $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية

أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $u_0=81$

اذن: $u_n=u_0q^{n-0}$ ومنه: $u_n=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

(2 $u_1=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{81}{3}=27$ و $u_2=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{81}{9}=9$

و $u_3=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{81}{27}=3$

(3 $u_n=1$ يعني $81\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=1$ يعني $81\times\frac{1}{3^n}=1$ يعني

$\frac{81}{3^n}=1$ يعني $81=3^n$ يعني $n=4$

**تمرين12:** نعتبر المتتالية الهندسية $(u_n)$

بحيث حدها الأول $u_0=5$ و $u_3=40$

1. تحقق أن أساس المتتالية $(u_n)$ هو $q=2$
2. أكتب $u_n$ بدلالة $n$ و أحسب $u_4$
3. حدد العدد الصحيح الطبيعي $n$ بحيث $u_n=160$

الأجوبة : 1) نعلم أن $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية اذن :

اذن: $u_3=u_0q^{3-0}$ يعني $40=5q^3$ يعني $q^3=\frac{40}{5}$

يعني $q^3=8$ يعني $q=2$

(2 $u_n=5\times(2)^n$

$u_1=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{81}{3}=27$ و $u_2=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{81}{9}=9$

و $u_4=5\times(2)^4=5\times16=80$

(3 $u_1=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{81}{3}=27$ و $u_2=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{81}{9}=9$

و $u_5=2\times u_4=2\times80=160$ ومنه : $n=5$

### 3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية هندسية أساسها $q$ غير منعدم

نضع $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$

إذا كان $q\ne1$ فان : $S_n=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

**مثال:** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالصيغة التالية :

$u_{n+1}=3\times U_n$ و $u_0=2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\ge0}$ هندسية
2. عبر عن $U_n$ بدلالة n
3. أحسب المجموع : $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_5$

الجواب: 1) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3\times u_n}{u_n}=3=q$

اذن: المتتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $u_0=3$

(2 $(u_n)_{n\ge0}$ هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $u_0=3$

اذن: $u_n=u_0q^{n-0}$ أي: $u_n=3\times(3)^n=3^1\times(3)^n=(3)^{n+1}$

3) $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_5 = u_1 \times \frac{1-q^{5-1+1}}{1-q} = u_1 \times \frac{1-q^5}{1-q}$

$u_1 = 3^{1+1} = 3^2 = 9$

$S_n = 9 \times \frac{1-3^5}{1-3} = 9 \times \frac{1-3^5}{-2} = 9 \times \frac{1-243}{-2} = 9 \times \frac{-242}{-2} = 1029$

**تمرين13:** لتكن $(u_n)$ متتالية هندسية بحيث : $u_5 = 486$

و $u_7 = 4374$ و أساسها $q \succ 0$

1)حدد أساس المتتالية $(u_n)$ 2) أحسب $u_0$ و $u_{10}$

3) أكتب $u_n$ بدلالة $n$ 4) أحسب **المجموع التالي** : $S = u_0 + u_5 + \cdots + u_{2009}$

**أجوبة :** $(u_n)$ متتالية هندسية اذن: $u_7 = u_5 q^{7-5}$ **يعني** : $q^2 = \frac{4374}{486} = 9$

يعني : $q = 3$ أو $q = -3$ وحسب المعطيات : $q \succ 0$

اذن: $q = 3$

2) $(u_n)$ متتالية هندسية اذن: $u_5 = u_0 q^{5-0}$ **يعني** $486 = u_0 3^5$ **يعني**

$u_0 = \frac{486}{3^5} = \frac{486}{243} = 2$

$u_{10} = u_7 q^{10-7}$ **يعني** $u_{10} = u_7 q^3$ **يعني** $u_{10} = 4374 \times 3^3 = 4374 \times 27 = 118098$

3) $u_n = u_0 q^{n-0}$ **يعني** $u_n = 2 \times 3^n$

4) $S_n = u_0 + u_1 + u_1 + \cdots + u_{2009} = u_0 \times \frac{1-q^{20095-0+1}}{1-q} = u_0 \times \frac{1-q^{2010}}{1-q}$

$S_n = 2 \times \frac{1-3^{2010}}{1-3} = -\left(1-3^{2010}\right) = 3^{2010} - 1$

**تمرين14:** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة التالية :

$u_0 = 3$ و $\forall n \in \mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية
2. أعبر عن $U_n$ بدلالة n
3. أحسب المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_6$

أكاديمية الجهة

الدرس الخامس :

# التعداد

الأستاذ: نجيب عثماني

## مستوى:السنة الأولى من سلك الباكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

**محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية**

| محتوى البرنامج | القدرات المنتظرة | توجيهات تربوية |
|---|---|---|
| - المبدأ العام للتعداد،<br>- عدد الترتيبات، عدد التبديلات، عدد التأليفات.<br>- خاصيات الأعداد $C_n^p$؛<br>- تطبيقات:<br>السحب تآنيا؛ السحب بإحلال؛ السحب بدون إحلال. | - توظيف شجرة الاختيارات في حالات تعدادية<br>- تطبيق التعداد في حل مسائل متنوعة. | - ينبغي تقديم التعداد بواسطة مبدأي الجداء والجمع وتقنية الشجرة.<br>- ينبغي تنويع الأنشطة المستقاة من الحياة اليومية. |

## I. المبدأ الأساسي للتعداد:

**نشاط1:** نتذكر أن لقطعة نقدية وجهين : $P$ و $F$

نرمي قطعة نقدية مرة واحدة

**ماهي نتائج هذه التجربة ؟**

يمكن الحصول على : $P$ أو $F$

$P$ هي امكانية و $F$ هي امكانية أخرى

اذن لهذه التجربة إمكانيتين فقط اذن مجموعة الامكانيات هي :

$\Omega=\{P;F\}$ والكتابة : $card(\Omega)=2$ (إمكانيتين فقط)

تقرأ رئيسي المجموعة $\Omega$

**نشاط2:** نرمي قطعة نقدية مرتين متتاليتين

**ماهي نتائج هذه التجربة ؟**

يمكن الحصول على : $PP$ أو $FF$ أو $FP$ أو $PF$

$PP$ هي **امكانية** و $FF$ هي امكانية أخرى

اذن لهذه التجربة 4 امكانيات فقط اذن مجموعة الامكانيات هي :

$\Omega=\{PP;FF;PF;FP\}$

ولدينا : $card(\Omega)=4$ (4 امكانيات فقط)

يمكن لنا استعمال شجرة الإمكانيات للبحث عن كل الامكانيات

| الرمية الأولى | الرمية الثانية |
|---|---|
| 2 | 2 |

$card(\Omega)=2\times2=4$ <u>مبدأ الجذاء</u>

<u>**تمرين1**</u> : أو **نشاط3:** نرمي قطعة نقدية ثلاث مرات متتالية

أرسم شجرة الامكانيات

حدد كون الامكانيات $\Omega$ وحدد $card(\Omega)$

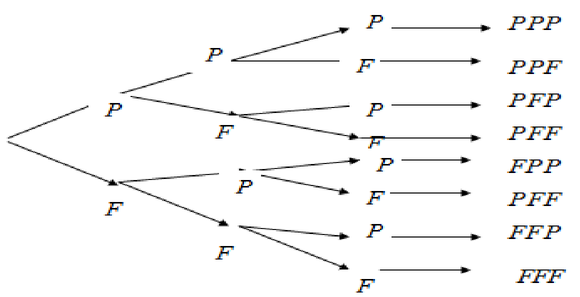
الأجوبة : هذه التجربة لا يمكن توقع نتيجتها مسبقا وبشكل أكيد ومنه هي **تجربة عشوائية**

**ماهي نتائج هذه التجربة ؟**

يمكن الحصول على : $PPP$ أو $FFF$ أو ......

$PPP$ هي **امكانية** و $FFF$ هي امكانية أخرى و ........

1)حدد كل الامكانيات و عددها :يمكن لنا استعمال ***<u>شجرة الإمكانيات</u>***




2) اذن لهذه التجربة 8 امكانيات فقط اذن فضاء الامكانيات هو :

$\Omega=\{PPP;PPF;PFP;PFF;FPP;FPF;FFP;FFF\}$

3) $card(\Omega)=8$ (8 امكانيات فقط)

| الرمية الأولى | الرمية الثانية | الرمية الثالثة |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 |

<u>مبدأ الجذاء</u>

### المبدأ:

لتكن $E$ تجربة تتطلب نتائجها اختيارين.

إذا كان الاختيار الأول يتم ب $n_1$ طريقة مختلفة,والاختيار الثاني يتم ب $n_2$ طريقة مختلفة. فان عدد النتائج الممكنة هو الجداء: $n_1\times n_2$.

**تمرين2** : نعتبر الأرقام التالية : 1 و 3 و 5
حدد عدد الأعداد المكونة من رقمين الذي يمكن تكوينه باستعمال الأرقام السابقة فقط

**الجواب :** رقم الوحدات يمكن اختياره ب ثلاث كيفيات مختلفة كذلك رقمالعشرات

| رقم الوحدات | رقم العشرات |
|---|---|
| 3 | 3 |

وحسب المبدأ الأساسي للتعداد فان عدد الأعداد المكونة من رقمين الذي يمكن تكوينه هو: $card(\Omega)=3\times 3=9$

## II. الترتيبات - التبديلات -التأليفات:

### 1. الترتيبات

**نشاط1** : نعتبر الأرقام التالية : 1 و 2 و 6
حدد عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين الذي يمكن تكوينه باستعمال الأرقام السابقة فقط

**الجواب :** رقم الوحدات يمكن اختياره ب ثلاث كيفيات مختلفة لكن رقم العشرات فقط بكيفيتين مختلفتين

| رقم الوحدات | رقم العشرات |
|---|---|
| 3 | 2 |

وحسب المبدأ الأساسي للتعداد فان عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين الذي يمكن تكوينه هو: $card(\Omega)=3\times 2=6$

العدد : 21 عدد يمكن تكوينه ويسمى ترتيبة
العدد : 12 عدد يمكن تكوينه ويسمى ترتيبة
العدد : 61 عدد يمكن تكوينه ويسمى ترتيبة
العدد : 16 عدد يمكن تكوينه ويسمى ترتيبة
كم عدد الترتيبات ؟ هناك 6 ترتيبات ممكنة
نرمز لعدد الترتيبات ب : $A_3^2=3\times(3-1)=3\times 2=6$

**تعريف1**:عدد الترتيبات بدون تكرار ل $p$ عنصر من بين $n$ عنصرا, حيث $1\le p\le n$ هو $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)$ . نرمز لهذا العدد بالرمز $A_n^p$. و لدينا:

$$A_n^p=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)$$

***أمثلة :*** أحسب : $A_4^2$ و $A_5^3$ و $A_7^4$ و $\frac{A_6^3\times A_{10}^4}{A_{10}^5}$

**الجواب:** $A_4^2=4\times 3=12$ $A_5^3=5\times 4\times 3=60$

$A_7^4=7\times 6\times 5\times 4=840$

$$\frac{A_6^3\times A_{10}^4}{A_{10}^5}=\frac{6\times 5\times 4\times 10\times 9\times 8\times 7}{10\times 9\times 8\times 7\times 6}=\frac{5\times 4}{1}=20$$

**تمرين3** : لتشغيل الهاتف المحمول يجب الضغط على الأزرار الأربعة التي تحمل الأرقام المكونة للقن السري حسب ترتيبها وإلا سيغلق تلقائيا
1. ما عدد الأقنان السرية الممكنة إذا علمت أن الأرقام المكونة لها لا يمكننا تكرارها
2. ما عدد الأقنان السرية الممكنة إذا علمت أن الأرقام المكونة لها لا يمكننا تكرارها وتتكون فقط من الأرقام التالية : 1 و 2 و 3 و 4

**الجواب:**
$A_{10}^4=10\times 9\times 8\times 7=5040$
$A_4^4=4\times 3\times 2\times 1=24$

### 2. التبديلات

**نشاط1** : نعتبر الأرقام التالية : 4 و 5 و 6
حدد عدد الأعداد المكونة من ثلاث أرقام مختلفة الذي يمكن تكوينه باستعمال الأرقام السابقة فقط

**الجواب :** رقم الوحدات يمكن اختياره ب ثلاث كيفيات مختلفة لكن رقم العشرات فقط بكيفيتين مختلفتين و رقم المئات بكيفية وحيدة

| رقم الوحدات | رقم العشرات | رقم المئات |
|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 |

وحسب المبدأ الأساسي للتعداد فان عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين الذي يمكن تكوينه هو: $card(\Omega)=3\times 2\times 1=6$

العدد : 465 عدد يمكن تكوينه ويسمى تبديلة
العدد : 456 عدد يمكن تكوينه ويسمى تبديلة
العدد : 564 عدد يمكن تكوينه ويسمى تبديلة
العدد : 546 عدد يمكن تكوينه ويسمى تبديلة
كم عدد التبديلات ؟ هناك 6 تبديلات ممكنة
نرمز لعدد التبديلات لثلاث أعداد ب : $3!=3\times 2\times 1=6$ ويقرأ 3 عاملي

**تعريف2**:عدد التبديلات ل $n$ عنصر من بين $n$ عنصر هو:

$$A_n^n=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1$$

نرمز للجذاء $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1$ بالرمز $n!$ , و يقرأ:" $n$ عاملي", و اصطلاحا نضع $0!=1$.

***أمثلة :*** أحسب : $4!$ و $5!$ و $7!$ و $\frac{10!\times 5!}{6!\times 8!}$

**الجواب:**
$4!=4\times 3\times 2\times 1=24$ و $5!=5\times 4\times 3\times 2\times 1=120$
$7!=7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1=5040$

$$\frac{10!\times 5!}{6!\times 8!}=\frac{10\times 9\times 8!\times 5!}{6\times 5!\times 8!}=\frac{10\times 9}{6}=\frac{10\times 3\times 3}{3\times 2}=\frac{10\times 3}{2}=15$$

**تمرين4** : ما عدد الكلمات من ستة حروف لها معنى أو لا , و التي يمكن كتابتهما باستعمال جميع حروف الكلمة " المغرب"

**تمرين5** : ما عدد الكلمات من أربع حروف لها معنى أو لا , و التي يمكن تكوينها باستعمال الحروف التالية فقط
S و I و D و A

### 3. التأليفات

**نشاط1** : نعتبر المجموعة التالية : $E=\{a;b;c;d\}$
حدد عدد أجزاء المجموعة $E$ التي تحتوي على ثلاث عناصر

**الجواب :**
هو: $card(E)=4$

الجزء : $A_1=\{a;b;c\}$ يمكن تكوينه ويسمى تأليفة
العدد : $A_2=\{a;b;d\}$ عدد يمكن تكوينه ويسمى تأليفة
الجزء : $A_3=\{b;c;d\}$ يمكن تكوينه ويسمى تأليفة
العدد : $A_4=\{a;c;d\}$ عدد يمكن تكوينه ويسمى تأليفة
كم عدد التأليفات ؟ هناك 4 تبديلات ممكنة
نرمز لعدد التأليفات لثلاث أعداد مختارة من بين 4 ب : $C_4^3=4$

**تعريف3:** ليكن $n$ عنصرا من $\mathbb{N}$. و لتكن $E$ مجموعة تحتوي على $n$ عنصر.
كل جزء من $E$ يتكون من $p$ عنصر (حيث $0 \le p \le n$) يسمى تأليفة ل $p$ عنصر من $E$.

## 4. خاصيات الأعداد $C_n^p$:

لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$، و لكل $p$ من $\mathbb{N}$ بحيث $0 \le p \le n$ ، لدينا:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\times(n-p)!}$$

ولدينا: $C_n^p = C_n^{n-p}$ و $C_n^0 = 1$ و $C_n^n = 1$ و
$C_n^1 = n$ و $C_n^{n-1} = n$

**أمثلة :** أحسب : $C_4^2$ و $C_5^2$ و $C_7^4$ و $C_{12}^3$ و $C_7^3$ و $C_5^3$
و $C_{12}^1$ و $C_7^7$ و $C_5^0$ و $C_5^4$

**الجواب :**

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\times3\times2!}{2!2!} = \frac{4\times3}{2!} = 6$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\times4\times3!}{2!3!} = \frac{5\times4}{2!} = 10$$

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\times6\times5\times4!}{4!3!} = \frac{7\times6\times5}{3!} = 35$$

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{9!3!} = \frac{12\times11\times10\times9!}{9!3!} = \frac{12\times11\times10}{3!} = 220$$

$C_7^3 = C_7^4 = 35$ و $C_5^3 = C_5^2 = 10$ و $C_{12}^1 = 12$

$C_7^7 = 1$ و $C_5^0 = 1$ و $C_5^4 = 5$

**تمرين6 :** لاجتياز امتحان شفوي على كل مترشح أن يجيب على سؤالين مسحوبين عشوائيا من بين خمس أسئلة مقترحة
**سؤال :** حدد عدد الإمكانيات
**الجواب :** $C_5^2 = 10$

**تمرين7 :** $E = \left\{2,5,6,7,1,0,\frac{3}{4}\right\}$ $A = \{6,7,1,0\}$

$B = \left\{\frac{3}{4},2,7,6,1\right\}$ $C = \left\{\frac{3}{4},5\right\}$ $D = \{2\}$

1. تحقق أن $A$ و $B$ و $C$ و $D$ أجزاء من $E$.
2. حدد: $\overline{A}, A\cup B, A\cap B$
3. حدد عدد أجزاء $E$ التي تحتوي على ثلاث عناصر
4. حدد عدد أجزاء $E$ التي تحتوي على أربع عناصر

**تمرين8 :** أحسب : $C_6^2$ و $C_8^3$ و $C_{12}^4$ و $C_{11}^3$ و $C_8^5$ و $C_6^4$
و $C_{10}^1$ و $C_8^8$ و $C_{12}^0$ و $C_{11}^8$

**تمرين9 :** أحسب : $4!$ و $5!$ و $7!$ و $C_{10}^2$
و $C_{13}^2$ و $C_{13}^4$ و $C_{12}^3$ و $A_8^5$ و $A_7^3$ و $A_7^4$

و $\frac{12!\times7!}{10!\times8!}$ و $\frac{A_8^2\times A_{10}^4}{A_8^5}$ و $\frac{12!}{10!}$ : , $\frac{8!\times3}{7!}$

$\frac{9!\times7!}{5!\times8!}$ و $\frac{10^9}{5^8}$ و $\frac{A_9^4}{A_9^2}$ و $\frac{C_7^4\times C_{10}^8}{C_{10}^7}$ و $\frac{9!\times5!}{8!\times3!}$

## 3. تطبيقات

**مثال1: السحب تآنيا- التأليفات**

يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 5 كرات حمراء
نسحب كرتين من الصندوق *في آن واحد*

1. حدد عدد السحبات الممكنة أو عدد الامكانيات أوحدد $card(\Omega)$ حيث $\Omega$ هو فضاء الإمكانيات
2. حدد عدد امكانيات سحب كرتين بيضاوين
3. حدد عدد امكانيات سحب كرتين حمراوين
4. حدد عدد امكانيات سحب كرتين من نفس اللون
5. حدد عدد امكانيات سحب كرتين من لون مختلف

الأجوبة: 1) $28 = \frac{8\times7}{2!} = \frac{8\times7\times6!}{2!6!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8!}{2!(8-2)!} =$

$card(\Omega) = C_8^2$

2) $C_3^2 = 3$ 3) $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\times4\times3!}{2!3!} = \frac{5\times4}{2!} = 10$

4) سحب كرتين من نفس اللون أي سحب كرتين بيضاوين أو كرتين حمراوين $C_3^2 + C_5^2 = 3+10 = 13$

5) سحب كرتين من لون مختلف أي سحب كرة واحدة بيضاء **و** كرة واحدة حمراء $C_3^1\times C_5^1 = 3\times5 = 15$

**تمرين10 :** يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 5 كرات حمراء و 3 كرات سوداء
نسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق *في آن واحد*

1. حدد عدد السحبات الممكنة أو عدد الامكانيات أوحدد $card(\Omega)$ حيث $\Omega$ هو فضاء الإمكانيات
2. حدد عدد امكانيات سحب ثلاث كرات بيضاء
3. حدد عدد امكانيات سحب ثلاث كرات سوداء "
4. حدد عدد امكانيات سحب ثلاث كرات حمراء "
5. حدد عدد امكانيات سحب ثلاث كرات من نفس اللون
6. حدد عدد امكانيات سحب ثلاث كرات من لون مختلف

الجواب: 1) $card(\Omega) = C_{12}^3$ ومنه

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12\times11\times10\times9!}{3!9!} = \frac{12\times11\times10}{3!} = \frac{6\times2\times11\times10}{6} = 220$$

2) $C_4^3 = 4$ 3) $C_3^3 = 1$

4) $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\times4\times3!}{2!3!} = \frac{5\times4}{2!} = 10$

5) سحب 3 كرات من نفس اللون أي سحب 3 كرات بيضاء أو 3 كرات حمراء أو 3 كرات سوداء
أي $C_4^3 + C_5^3 + C_3^3 = 4+10+1 = 15$

6) سحب 3 كرات من لون مختلف يعني سحب كرة واحدة حمراء وواحدة سوداء كرة واحدة بيضاء $C_3^1\times C_4^1\times C_5^1 = 3\times4\times5 = 60$

**تمرين11** : يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء و 3 كرات سوداء

نسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق *في آن واحد*

1. حدد عدد السحبات الممكنة أو عدد الامكانيات أوحدد $card(\Omega)$ حيث $\Omega$ هو فضاء الإمكانيات
2. حدد عدد امكانيات سحب ثلاث كرات بيضاء
3. حدد عدد امكانيات سحب ثلاث كرات حمراء "
4. حدد عدد امكانيات سحب ثلاث كرات من نفس اللون
5. حدد عدد امكانيات سحب ثلاث كرات من لون مختلف
6. حدد عدد امكانيات سحب كرة واحدة سوداء فقط
7. حدد عدد امكانيات سحب كرتين حمراوين فقط

الأجوبة1) $card(\Omega)=C_{10}^{3}$

$$C_{10}^{3}=\frac{10!}{3!(10-3)!}=\frac{10!}{3!7!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{3!7!}=\frac{10\times9\times8}{6}=\frac{5\times2\times3\times3\times8}{6}=120$$

2) $C_3^3=1$ لأننا نعلم ن : $C_n^n=1$

3) $C_4^3=4$ لأننا نعلم ن : $C_n^{n-1}=n$

4)سحب 3 كرات من نفس اللون أي سحب 3 كرات بيضاء أو 3 كرات حمراء أو 3 كرات سوداء

أي $C_3^3+C_4^3+C_3^3=1+4+1=6$

5) سحب 3 كرات من لون مختلف يعني سحب كرة واحدة حمراء وواحدة سوداء كرة واحدة بيضاء

$C_3^1\times C_4^1\times C_3^1=3\times4\times3=36$

6)سحب كرة واحدة سوداء فقط يعني كرة واحدة سوداء وكرتين غير سوداوين يعني مسحوبة من بين الألوان الأخرى

$C_3^1\times C_7^2=3\times C_7^2$

نحسب $C_7^2$ $\quad C_7^2=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7!}{2!5!}=\frac{7\times6\times5!}{2!5!}=\frac{7\times6}{2!}=21$

**ومنه** عدد الامكانيات هو : $C_3^1\times C_7^2=3\times21=63$

7)سحب كرتين حمراوين فقط يعني سحب كرتين حمراوين وكرة ثالثة من بين الألوان الأخرى

$C_6^1\times C_4^2=6\times C_4^2$

$$C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\times3\times2!}{2!2!}=\frac{4\times3}{2!}=6$$

**ومنه** عدد الامكانيات هو : $C_6^1\times C_4^2=6\times6=36$

**تمرين12** : يحتوي صندوق غير كاشف على كرتين سوداوين مرقمتين 1 و 2

و يحتوي أيضا على 5 كرات صفراء مرقمة 1 و 2 و3 و4و5

نسحب عشوائيا كرتين من الصندوق *في آن واحد*

1. حدد عدد السحبات الممكنة أو عدد الامكانيات
2. حدد عدد امكانيات سحب كرتين صفراوين
3. حدد عدد امكانيات سحب كرتين من نفس اللون
4. حدد عدد امكانيات الحصول على رقمين زوجيين
5. حدد عدد امكانيات سحب كرتين مختلفتين اللون

**الأجوبة:1)**

$$card\Omega=C_7^2=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7!}{2!5!}=\frac{7\times6\times5!}{2!5!}=21$$

(2 $\quad C_5^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times4\times3!}{2!3!}=\frac{5\times4}{2!}=10$

(3 $\quad C_2^2+C_5^2=1+10=11$

(4 $\quad C_3^2=3$

5)سحب 3 كرات من لون مختلف يعني سحب كرة واحدة حمراء وواحدة سوداء كرة واحدة بيضاء

$C_3^1\times C_4^1\times C_5^1=3\times4\times5=60$

**تمرين13** : يحتوي صندوق على إحدى عشرة كرة: 4 بيضاء و 5 سوداء و كرتان زرقاوان. نسحب عشوائيا و ثانيا ثلاث كرات من الصندوق (يعني سحب ثلاث كرات في آن واحد).

1. ما عدد السحبات الممكنة أو عدد الامكانيات؟
2. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على ثلاث كرات من نفس اللون؟
3. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على كرتين بيضاوين بالضبط؟

**مثال2:السحب بدون إحلال- الترتيبات بدون تكرار**

يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق

1. حدد عدد السحبات الممكنة أو عدد الامكانيات أوحدد $card(\Omega)$ حيث $\Omega$ هو فضاء الإمكانيات
2. حدد عدد امكانيات سحب كرتين بيضاوين
3. حدد عدد امكانيات سحب كرتين سوداوين
4. حدد عدد امكانيات سحب كرتين من نفس اللون
5. حدد عدد امكانيات سحب كرتين من لون مختلف

**الجواب:**1) $card(\Omega)=A_7^2=7\times6=42$

(2 $A_3^2=3\times2=6$ $\quad$ (3 $A_4^2=4\times3=12$

(4 سحب كرتين من نفس اللون أي سحب كرتين بيضاوين أو كرتين سوداوين $A_3^2+A_4^2=3\times2+4\times3=18$

5)سحب كرتين من لون مختلف أي سحب كرة واحدة بيضاء **و** كرة واحدة سوداء $C_3^1\times C_4^1=3\times4=12$

**تمرين14** : يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق

1. حدد عدد السحبات الممكنة أو عدد الامكانيات أوحدد $card(\Omega)$ حيث $\Omega$ هو فضاء الإمكانيات
2. حدد عدد امكانيات سحب ثلاث كرات بيضاء
3. حدد عدد امكانيات سحب ثلاث كرات سوداء
4. حدد عدد امكانيات سحب ثلاث كرات من نفس اللون

**الجواب:**1) $card(\Omega)=A_9^3=9\times8\times7=504$

(2 $A_4^3=4\times3\times2=24$ $\quad$ **(3** $A_5^3=5\times4\times3=60$

**(4** $A_4^3+A_5^3=4\times3\times2+5\times4\times3=24+60=84$

**مثال3:السحب بإحلال- الترتيبات بتكرار:**

يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبإحلال كرتين من الصندوق :

1. حدد عدد السحبات الممكنة أو عدد الامكانيات أوحدد $card\left(\Omega\right)$ حيث $\Omega$ هو فضاء الإمكانيات
2. حدد عدد امكانيات سحب كرتين بيضاوين
3. حدد عدد امكانيات سحب كرتين سوداوين
4. حدد عدد امكانيات سحب كرتين من نفس اللون
5. حدد عدد امكانيات سحب كرتين من لون مختلف

**الجواب:1)** $card\left(\Omega\right) = = 7\times 7 = 7^2 = 49$

2) $3\times 3 = 9$ (3 $4\times 4 = 16$

4) $3\times 3 + 4\times 4 = 25$

5) $49 - 25 = 24$

**تمرين15** : يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبإحلال كرتين من الصندوق :

1. حدد عدد السحبات الممكنة أو عدد الامكانيات
2. حدد عدد امكانيات سحب كرتين بيضاوين
3. حدد عدد امكانيات سحب كرتين سوداوين
4. حدد عدد امكانيات سحب كرتين من نفس اللون
5. حدد عدد امكانيات سحب كرتين من لون مختلف

**الجواب:1)**

**1)** $card\left(\Omega\right) = = 9\times 9 = 9^2 = 81$

2) $4\times 4 = 16$ (3 $5\times 5 = 25$

4) $4\times 4 + 5\times 5 = 41$

5) $81 - 41 = 40$

## تمارين للبحث

**تمرين 1:** يحتوي صندوق على إحدى عشرة كرة: 4 بيضاء و 5 سوداء و كرتان زرقاوان. نسحب عشوائيا و ثانيا ثلاث كرات من الصندوق (يعني سحب ثلاث كرات في آن واحد).

4. ما عدد النتائج الممكنة؟
5. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على ثلاث كرات من نفس اللون؟
6. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على كرتين بيضاوين بالضبط؟

**تمرين 2:** يحتوي صندوق على 16 بيدقة: 4 حمراء و 7 بيضاء و 5 سوداء. نسحب عشوائيا بالتتابع, و بدون إحلال, أربع بيد قات من الصندوق (يعني نسحب بيدقة نسجل لونها و لا نعيدها إلى الصندوق, نكرر هذه العملية أربع مرات).

1. ما عدد النتائج الممكنة؟
2. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على أربع بيد قات كلها بيضاء؟
3. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على بيدقة بيضاء في السحبة الأولى فقط؟

**تمرين 3:** يحتوي كيس على 12 كرة مرقمة من 1 إلى 12 (كل كرة تحمل رقما) نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال ثلاث كرات من الكيس.(يعني نسحب كرة نسجل رقمها ثم نعيدها إلى الصندوق نكرر هذه العملية ثلاث مرات متتالية).

1. ما عدد النتائج الممكن؟
2. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على ثلاثة أعداد كلها قابلة للقسمة على 3؟
3. ما عدد السحبات التي نحصل فيها على ثلاثة أعداد كلها فردية و كلها قابلة للقسمة على 3؟

**تمرين 4:** يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 6 كرات حمراء و 8 كرات سوداء و كرتين صفراوين

1. نسحب عشوائيا كرتين من الصندوق في آن واحد
2. حدد عدد الإمكانيات
3. حدد عدد الإمكانيات التي تحتوي على كرتين بيضاوين
4. حدد عدد الإمكانيات التي تحتوي على كرتين سوداوين
5. حدد عدد الإمكانيات التي تحتوي على كرتين صفراوين
6. حدد عدد الإمكانيات التي تحتوي على كرتين من نفس اللون

**تمرين 5:** يحتوي صندوق غير كاشف على 5 كتب للغة العربية و 4 كتب للغة الفرنسية و 4 كتب للرياضيات

1. نسحب عشوائيا ثلاث كتب من الصندوق في آن واحد
2. حدد عدد الإمكانيات
3. حدد عدد الإمكانيات سحب ثلاث كتب للغة العربية
4. حدد عدد الإمكانيات سحب ثلاث كتب للغة الفرنسية
5. حدد عدد الإمكانيات سحب ثلاث كتب للرياضيات
6. حدد عدد الإمكانيات سحب كتاب من كل مادة

**تمرين 6:** يتكون قسم من 37 تلميذا و يمارس كل تلميذ من هذا القسم لعبة على الأقل من بين اللعبتين كرة القدم و كرة السلة. إذا علمت أن 30 تلميذا يلعبون كرة القدم و 20 يلعبون كرة السلة. أحسب عدد التلاميذ الذين يمارسون اللعبتين معا.

**تمرين 7:** يتكون قسم من 38 تلميذا: 20 أنثى و 18 ذكرا. نريد تكوين لجنة من 4 تلاميذ في هذا القسم.

1. كم عدد اللجان التي يمكن تكوينها؟
2. كم عدد اللجان التي يمكن تكوينها إذا علمت أن 3 تلاميذ معلومين يرفضون ترشيح أنفسهم؟
3. كم عدد اللجان التي تضم تلميذين و تلميذتين؟

كم عدد اللجان التي يمكن تكوينها بحيث لا تحتوي على التلميذين حسن و أحمد في نفس القسم

الأستاذ: نجيب عثماني

الدرس السادس :

# النهايات

أكاديمية الجهة

## مستوى:السنة الأولى من سلك الباكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

**محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية**

| توجيهات تربوية | القدرات المنتظرة | محتوى البرنامج |
|---|---|---|
| ـ يتم تقديم مفهوم النهاية بطريقة حدسية من خلال سلوك الدوال المرجعية المحددة في البرنامج ومقلوباتها بجوار الصفر و $+\infty$ و $-\infty$ ثم قبول هذه النهايات؛<br>ـ يتم قبول نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية في $+\infty$ و $-\infty$ وفي نقطة من مجموعة تعريفها؛<br>ـ يتم تحديد $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ في الحالة: $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتان بحث $Q(a)=0$<br>ـ تعتبر العمليات على النهايات المنتهية واللامنتهية مقبولة وينبغي تعويد التلاميذ على الاستعمال الصحيح لها. | ـ التمكن من حساب نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية في $+\infty$ و $-\infty$ و $x_0$ | ـ نهايات الدوال $x\to x$ و $x\to x^2$ و $x\to x^3$ ونهايات مقلوباتها في الصفر و $+\infty$ و $-\infty$؛<br>ـ النهاية المنتهية والنهاية اللامنتهية في نقطة وفي $+\infty$ و $-\infty$؛<br>ـ النهاية على اليمين؛ النهاية على اليسار.<br>ـ العمليات على النهايات؛<br>ـ نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية. |

### I. نهاية منتهية لدالة نقطة

**مثال1:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي: $f(x)=2x$

**الكتابة :** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ تقرأ النهاية عندما يؤول $x$ إلى 0 ل $f(x)$

و لدينا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x=0$

**نهايات اعتيادية:** • $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ • $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$

• $\lim\limits_{x\to 0} x^3=0$ • $\lim\limits_{x\to 0} x^n=0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

**تمرين1:** أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to -1}\left(3+x-3x^2\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x-1}{3x^2-x}$

**أجوبة:1)** $\lim\limits_{x\to -1} 3+x-3x^2=3+(-1)-3(-1)^2=3+(-1)-3=-1=l$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x-1}{3x^2-x}=\frac{5\times1-1}{3(-1)^2-(-1)}=\frac{4}{3+1}=1=l$

### II. نهاية غير منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي: $f(x)=x^2$

املأ الجدول التالي :

| $-10000$ | $-1000$ | $-10$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $10$ | $100$ | $10000$ | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | $f(x)$ |

نلاحظ أنه عندما تكبر $x$ فان $f(x)$ تكبر أيضا نكتب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

نلاحظ أنه عندما تصغر $x$ فان $f(x)$ تكبر ونكتب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

**نهايات اعتيادية:**

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ إذا كان $n$ **زوجي** • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$

إذا كان $n$ **فردي**

**تمرين2:** أحسب النهايات التالية : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^6$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2014}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2015}$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} -7x^9$

**أجوبة:1)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^6=+\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2014}=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2015}=-\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to-} -7x^9=+\infty$

### III. نهاية منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي: $f(x)=\frac{1}{x}$

املأ الجدول التالي :

| $-10000$ | $-1000$ | $-10$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $10$ | $100$ | $10000$ | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | $f(x)$ |

نلاحظ أنه عندما تكبر $x$ فان $f(x)$ تقترب من الصفر

و نكتب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^+$

نلاحظ أنه عندما تصغر $x$ فان $f(x)$ تقترب من الصفر

نكتب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^-$

**نهايات اعتيادية:** • $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$ • $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ • $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

***خاصية :*** لتكن $f$ دالة عددية و $l$ عددا حقيقيا

إذا كانت $f$ تقبل نهاية $l$ في $+\infty$ (أو في $-\infty$) فان هده النهاية وحيدة.

**تمرين3:** أحسب النهايات التالية : (1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}$ (2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^5}$

(3 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^7}$ (4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^5}$ (5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12}{x^{2009}}$

**الأجوبة :** (1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0^+$ (2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^5}=0^-$

(3 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^7}=0^-$ (4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^5}=0^-$ (5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12}{x^{2009}}=0^+$

## IV. النهاية اللانهائية لدالة في نقطة

**نهايات اعتيادية:**

• $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ وتقرأ النهاية عندما يؤول $x$ إلى 0 على اليمين

• $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ وتقرأ النهاية عندما يؤول $x$ إلى 0 على اليسار

**تمرين4:** أحسب النهايات التالية (1: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}$ (2 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-5}{x^3}$

(3 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{9}{x^5}$ (4 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-12}{x^4}$ (5 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}}$ (6 $\lim\limits_{x\to0^+} 3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$

**الأجوبة :** (1 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty$ (2 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-5}{x^3}=-\infty$

(3 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{9}{x^5}+\infty$ (4 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-12}{x^4}=-\infty$ (5 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}}=-\infty$ (6

$\lim\limits_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}=0+7+\infty=+\infty$

## V. النهاية على اليمين والنهاية على اليسار لدالة في نقطة

▪ إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى $l$ عندما يؤول $x$ إلى $a$ على اليمين

فإننا نكتب : " $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$ " أو " $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=l$ "

▪ إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى $l$ عندما يؤول $x$ إلى $a$ على اليسار

**فإننا نكتب :** " $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$ " أو " $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=l$ "

**نهايات اعتيادية:** • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\frac{1}{x^n}=+\infty$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\sqrt{x}=0$ • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

•إذا كان $n$ زوجي غير منعدم , فان $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x<0}}\frac{1}{x^n}=+\infty$

• إذا كان $n$ فردي غير منعدم , فان $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x<0}}\frac{1}{x^n}=-\infty$

**مثال:** أحسب النهايات التالية:(1 $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{3x+1}{2x-6}$ (2 $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{3x+1}{2x-4}$

**أجوبة :** $\lim\limits_{x\to3^+}3x+1=9+1=10$ و $\lim\limits_{x\to3^+}2x-6=0$

| $x$ | $-\infty$   $3$   $+\infty$ |
|---|---|
| $2x-6$ | $-$   $0$   $+$ |

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to3^+}2x-6=0^+$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{3x+1}{2x-6}=+\infty$

(2 $\lim\limits_{x\to3^-}2x-6=0^-$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{3x+1}{2x-6}=-\infty$

**تمرين5:** أحسب النهايات التالية:(1 $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x-8}{2x-4}$ و $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3x-8}{2x-4}$

(2 $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x-4}{-2x+6}$ و $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{x-4}{-2x+6}$ (3 $\lim\limits_{x\to-2^\pm}\frac{-5x^2+1}{x+2}$

(4 $\lim\limits_{x\to2^\pm}\frac{5x-20}{-2x+4}$

**أجوبة : (1** $\lim\limits_{x\to2^+}3x-8=-2$ و $\lim\limits_{x\to2^+}2x-4=0$

| $x$ | $-\infty$   $2$   $+\infty$ |
|---|---|
| $2x-4$ | $-$   $0$   $+$ |

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to2^+}2x-4=0^+$ **و بالتالي :** $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x-8}{2x-4}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to2^-}2x-4=0^-$ **و بالتالي :** $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x-8}{2x-4}=+\infty$

(2 $\lim\limits_{x\to3^+}x-4=-1$ و $\lim\limits_{x\to3^+}-2x+6=0$

| $x$ | $-\infty$   $3$   $+\infty$ |
|---|---|
| $-2x+6$ | $+$   $0$   $-$ |

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to3^+}-2x+6=0^-$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x-4}{-2x+6}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to3^-}-2x+6=0^+$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{x-4}{-2x+6}=-\infty$

(3 $\lim\limits_{x\to-2^\pm}\frac{-5x^2+1}{x+2}$

**لدينا** $\lim\limits_{x\to-2^+}-5x^2+1=-19$ و $\lim\limits_{x\to-2^+}x+2=0$

| $x$ | $-\infty$   $-2$   $+\infty$ |
|---|---|
| $x+2$ | $-$   $0$   $+$ |

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{-5x^2+1}{x+2}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{-5x^2+1}{x+2}=+\infty$

(4 **لدينا** $\lim\limits_{x\to2^+}5x-20=-10$ و $\lim\limits_{x\to2^+}-2x+4=0$

| $x$ | $-\infty$   $2$   $+\infty$ |
|---|---|
| $-2x+4$ | $+$   $0$   $-$ |

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{5x-20}{-2x+4}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{5x-20}{-2x+4}=-\infty$

**تمرين6:** أحسب النهايات التالية:

(1 $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{2x+1}{3x-9}$ (2 $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{2x+1}{3x-9}$ (3 $\lim\limits_{x\to4^+}\frac{x-4}{-2x+8}$

(4 $\lim\limits_{x\to4^-}\frac{x-4}{-2x+8}$

## VI. العمليات على النهايات

في كل ما يلي $a$ عدد حقيقي أو يساوي $+\infty$ أو $-\infty$ و $l$ و $l'$ عددان حقيقيانوهذه العمليات تبقى صالحة على اليمين و اليسار

## 1. النهاية و الجمع:

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$ | $l'+l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | شكل غير محدد | |

**مثال:** أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to 0^+} 3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$

**الجواب :** $\lim\limits_{x\to 0^+} 3x=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} 7=7$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ **ومنه:**

$$\lim_{x\to 0^+} 3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

## 2. النهاية و الضرب:

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l\succ 0$ | $l\prec 0$ | $l\succ 0$ | $l\prec 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ أو $+\infty$ | $0$ | |
| $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$ | $l' . l$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | شكل غير محدد | | |

**أمثلة:** أحسب النهايات التالية : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^4$ **و 2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x$

**3)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2-1\right)^{2008}\times\left(x^3+1\right)^{2009}$ **4)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2+1\right)\times\frac{1}{x}$ **5)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x}\right)$

**أجوبة: 1)** $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^4=5\times(+\infty)=+\infty$

**2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x=+\infty-\infty$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نرفع ال ش غ م مثلا بالتعميل :
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x(x-1)$

**لدينا :** $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x=+\infty$

**3)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2-1\right)^{2008}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3+1\right)^{2009}=-\infty$ **ومنه :**

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2-1\right)^{2008}\times\left(x^3+1\right)^{2009}=-\infty$

**4)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2+1\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0^-$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل :

$\infty\times 0$

نرفع ال ش غ م مثلا بالنشر : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2+1\right)\times\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x+\frac{1}{x}=-\infty+0=-\infty$

**5)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{x}=-\infty$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل :

$+\infty-\infty$

نرفع ال ش غ م مثلا بالتعميل : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)=+\infty$

## 3. النهاية و المقلوب:

| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'\in\mathbb{R}^*$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0^+$ | $0^-$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{1}{g}\right)(x)$ | $\frac{1}{l'}$ | $0$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

**أمثلة:** أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{3x+7}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x+7}+\frac{1}{x^2}$ و $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|}$

**أجوبة: 1) لدينا :** $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{3x+7}=\frac{1}{7}$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{3x+7}+\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

**2)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x+7}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}=0$ **ومنه :** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x+7}+\frac{1}{x^2}=0$

**3)** $\lim\limits_{x\to 0} |x|=0^+$ **ومنه :** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|}=+\infty$

## 4. النهاية و الخارج:

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l$ | $-\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $-\infty$ $l\prec 0$ | $+\infty$ $\succ 0$ | $+\infty$ $l\succ 0$ | $-\infty$ $l\prec 0$ | $-\infty$ | | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $\neq 0$ | $\infty$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0^+$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^-$ | $0$ | | $-\infty$ $+\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ | $\frac{l}{l'}$ | | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\infty$ | شكل غير محدد | |

**أمثلة:** أحسب النهايات التالية : 1) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{4x-5}{\sqrt{x}}$ **2)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

**أجوبة: 1) لدينا :** $\lim\limits_{x\to 4} 4x-5=11$ و $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x}=2$

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to 4} \frac{4x-5}{\sqrt{x}}=\frac{11}{2}$

**2)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ **لدينا :** $\lim\limits_{x\to 2} x^2-4=0$ و $\lim\limits_{x\to 2} x-2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2^2}{x-2}=\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2} x+2=4$$

**تمرين7:** أحسب النهايات التالية : 1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-6}{\sqrt{x+3}}$ **2)** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-9}$

**3)** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1}$

**أجوبة : 1) لدينا :** $\lim\limits_{x\to 1} 2x-6=-4$ و $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x+3}=2$

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-6}{\sqrt{x+3}}=\frac{4}{2}=2$

**2)** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to 3} x^2-9=0$ و $\lim\limits_{x\to 3} x-3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3^2}{x-3}=\lim_{x\to 2} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 2} x+3=4$$

**3)** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} 4x^2-1=0$ و $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} 2x-1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1}=\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{(2x)^2-1^2}{2x-1}=\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x-1}=\lim_{x\to \frac{1}{2}} 2x+1=2$$

## 5. نهاية الدالة الحدودية

نهاية دالة حدودية عندما تؤول $x$ إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

مثال : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2+5x-4$

**الجواب:** $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2+5x-4=\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2=+\infty$

## 6. نهاية الدالة الجذرية

نهاية دالة جذرية عندما تؤول $x$ إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

**مثال :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^6-x^2+1}{x^4+x-4}$

الجواب: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^6-x^2+1}{x^4+x-4}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^6}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^{6-4}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$

**تمرين8:** أحسب النهايات التالية : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+5x-9x^2$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-5x^3-4x+12\right)$ (3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^5+3x^2+x}{-10x^5-x-1}$

(4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}$ (5 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{20x^3-7x^2+x}{10x^4-3x-6}$

(6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^5+4x^2+1}{x^8-x+3}$ (7 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{(x-1)^2}$

**أجوبة :** (1 $\lim\limits_{x\to+\infty}1+5x-9x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}-9x^2=-\infty$

(2 $\lim\limits_{x\to-\infty}-5x^3-4x+12=\lim\limits_{x\to-\infty}-5x^3=+\infty$

(3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^5+3x^2+x}{-10x^5-x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^5}{-10x^5}=-\frac{5}{10}=-\frac{1}{2}$

(4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x^6}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}-3x^3=+\infty$

(5 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{20x^3-7x^2+x}{10x^4-3x-6}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{20x^3}{10x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{20}{10x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0^-$

(6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^5+4x^2+1}{x^8-x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^5}{x^8}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^3}=0^+$

(7 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$

**تمرين9:** أحسب النهايات التالية :

(1 $\lim\limits_{x\to+\infty}-5x^2+3x+4$ (2 $\lim\limits_{x\to-\infty}-6x^3-7x+2$

(3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x^2+2}{4x^3+5x-1}$ (4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x^7+x^2+2}{x^3+x-3}$

## 7. نهاية الدوال اللاجذرية

**خاصية:** لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال على الشكل $[a;+\infty[$ بحيث $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a;+\infty[$

- إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ و $l\geq 0$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$
- إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $l\geq 0$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$

**أمثلة :** (1 $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{3x^2+4}$ (2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}$

**أجوبة :** (1 $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{3x^2+4}=\sqrt{3\times2^2+4}=\sqrt{16}=4$

**تمرين10:** أحسب النهايات التالية : (1 $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{3x^2+22}$

(2 $\lim\limits_{x\to1}\left|-x^2+2x-7\right|\times\sqrt{x+1}$

## تمارين للبحث

**تمرين1:** أحسب النهايات التالية : (1 $\lim\limits_{x\to-1}3+x-3x^2$

(2 $\lim\limits_{x\to1}\frac{5x-1}{3x^2-x}$ (3 $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{3x^2+4}$

(4 $\lim\limits_{x\to2}\left|-x^2+2x-7\right|\times\sqrt{x+7}$ (5 $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2+3x+6}{5x-1}$

(6 $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\frac{5x-1}{2x^2-x}}$ (7 $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{\frac{3}{2}x^3+4}$ (8 $\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x^2+2x-1}$

**تمرين2:** أحسب النهايات التالية :

(1 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2}{x}$ (2 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-5}{x^3}$ (3 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{9}{x^5}$ (4 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-12}{x^4}$

(5 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}}$ (6 $\lim\limits_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$

(7 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-3}{x}$ (8 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{4}{x^3}$ (9 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-8}{x^5}$ (10 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{3}{x^4}$

(11 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{3}{\sqrt{x}}$ (12 $\lim\limits_{x\to0^+}-5x+1-\frac{1}{\sqrt{x}}$

**تمرين3:** أحسب النهايات التالية :

(1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}$ (2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-7}{x}$ (3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}$

(4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x}$ (5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^5}$ (6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12}{x^2}$

(7 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3}{x}$ (8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{x}$ (9 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-9}{x^2}$

(10 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3}{x}$ (11 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{x^5}$ (12 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{x^2}$

**تمرين4:** أحسب النهايات التالية :

(1 $\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2$ (2 $\lim\limits_{x\to+\infty}-5x^2$ (3 $\lim\limits_{x\to-\infty}2x^4$

(4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{2}x^2$ (5 $\lim\limits_{x\to+\infty}8x^5$ (6 $\lim\limits_{x\to-\infty}-3x^5$

(7 $\lim\limits_{x\to+\infty}-6x^4$ (8 $\lim\limits_{x\to-\infty}-4x^4$ (9 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{3}x^3$

(10 $\lim\limits_{x\to+\infty}-7x^9$ (11 $\lim\limits_{x\to+\infty}3x^3+\frac{2}{x}-3$ (12

$\lim\limits_{x\to-\infty}7x^3+\frac{1}{x}+2$ (13 $\lim\limits_{x\to-\infty}2x^5+\frac{-7}{x}+1$

**تمرين5:** أحسب النهايات التالية :

(1 $\lim\limits_{x\to+\infty}-5x^2+3x+4$ (2 $\lim\limits_{x\to-\infty}-6x^3-7x+2$

(3 $\lim\limits_{x\to+\infty}-6x^5+7x+9$ (4 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3-x+9$

(5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x^2+2}{4x^3+5x-1}$ (6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2}{x^4+x-1}$

(7 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x^7+x^2+2}{x^3+x-3}$ (8 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{10x^7+x}{5x-1}$

(9 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^8-x}{9x^4-1}$ (10 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3-x+2}{x^4+2x+6}$

**تمرين6:** أحسب النهايات التالية :

(1 $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}$ (2 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$ (3 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$

(4 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$ (5 $\lim\limits_{x\to10}\frac{x^2-100}{x-10}$

(6 $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ (7 $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}$

(8 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-4x+3}$ (9 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-2x-3}$ (10 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-x}{x}$

**تمرين7:** أحسب النهايات التالية: (1 $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x+1}{2x-4}$

و $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3x+1}{2x-4}$ (2 $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x-4}{-2x+6}$ و $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{x-4}{-2x+6}$ (3

و $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-3x+1}{2x-2}$ (4

أكاديمية الجهة

# الدرس السابع :
# الاشتقاق

الأستاذ: نجيب عثماني

## مستوى:السنة الأولى من سلك الباكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

**محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية**

| محتوى البرنامج | القدرات المنتظرة | توجيهات تربوية |
|---|---|---|
| - العدد المشتق لدالة في نقطة $x_0$؛ التأويل الهندسي للعدد المشتق؛ المستقيم المماس لمنحنى في نقطة؛<br>- المعادلة الديكارتية للمستقيم المماس؛<br>- الاشتقاق على مجال؛ الدالة المشتقة؛<br>- اشتقاق الدوال: $x \to a$ و $x \to ax$ و $x \to x^n$؛<br>- اشتقاق الدوال $f+g$، $\lambda f$، $fg$، $\frac{1}{f}$، $\frac{f}{g}$، $f^n$ $(n \in IN^*)$؛<br>- رتابة دالة وإشارة مشتقتها؛ مطاريف دالة قابلة للاشتقاق على مجال. | - التعرف على أن العدد المشتق لدالة في $x_0$ هو المعامل الموجه لمماس منحنى الدالة في النقطة التي أفصولها $x_0$؛<br>- اشتقاق الدوال الحدودية والدوال الجذرية.<br>- تحديد معادلة المماس لمنحنى دالة في نقطة وإنشاؤه؛<br>- تحديد رتابة دالة انطلاقا من دراسة إشارة مشتقتها؛<br>- حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية والقيم القصوية؛<br>- تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني؛ | - تقبل المبرهنتان المتعلقتان بالرتابة وإشارة المشتقة والعمليات على الدوال المشتقة. |

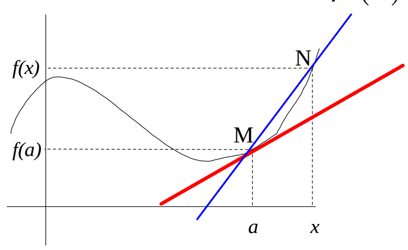
## VI. قابلية اشتقاق دالة عددية في نقطة

### 1. العدد المشتق

**تعريف :** لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال مفتوح $I$ و $a$ عنصرا من $I$

نقول إن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق في النقطة $a$ إذا وجد عدد حقيقي $l$ بحيث : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$

$l$ يسمى العدد المشتق للدالة في النقطة $a$ و نرمز له بالرمز : $f'(a)$




ونكتب : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

**مثال:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=5x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة $f$ عند $x_0=1$

**الجواب :** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x^2-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{5(x^2-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{5(x^2-1^2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{5(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}5(x+1)=5\times 2=10$

ومنه $f$ قابلة للاشتقاق عند : $x_0=1$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=10=f'(1)$ و هو العدد المشتق عند $x_0=1$

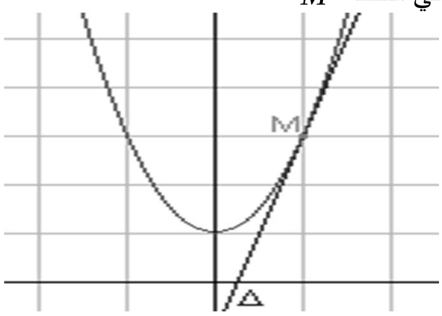
**تمرين:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة $f$ عند $x_0=3$

### 2. التأويل الهندسي للعدد المشتق–معادلة مماس لمنحنى دالة في نقطة

**تعريف :** لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق في نقطة $a$ و $(C_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

المستقيم $(\Delta)$ المار من النقطة $M(a;f(a))$ و الذي معامله الموجه هو $f'(a)$ يسمى المماس للمنحنى $(C_f)$ في النقطة $M$



**خاصية :** لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق في نقطة $a$.معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة $M(a;f(a))$ هي :

$$(\Delta)\ :\ y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

**مثال:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=3x^2$

حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة $f$ عند $x_0=2$.

**تمرين1:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-2x+1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة $f$ عند $x_0=2$.

**الجواب: (1** $f(2)=2^2-2\times2+1=1$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x+1-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x}{x-2}$$

$=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x=2$ ومنه $f$ قابلة للاشتقاق عند : $x_0=1$

$f'(2)=2$ و هو العدد المشتق عند $x_0=2$

(2 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=f(2)+f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=1+2(x-2)\Leftrightarrow y=2x-3$

## VII. الدالة المشتقة لدالة عددية

### 1. الاشتقاق على مجال

**تعريف1:** لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال مفتوح $I$

نقول إن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $I$ إذا كانت $f$ قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $I$

### 2. الدالة المشتقة

لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$

الدالة المشتقة للدالة $f$ هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $f'(x)$ المعرفة كما يلي :

$$f':I\to\mathbb{R}$$
$$x\to f'(x)$$

## VIII. جدول للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات حول الدوال المشتقة

**مثال1:** $f(x)=2$ **مثال2:** $f(x)=3x-5$

**مثال3:** $f(x)=x^{10}$ **مثال4:** $f(x)=2x^5$

**مثال5:** $f(x)=3x^3+\frac{1}{2}x^2+1$

**مثال6:** $f(x)=3x^2-6x-1$

**مثال7:** $f(x)=x^2\times\sqrt{x}$

**مثال8:** $f(x)=(3x-5)\times(2x+1)$

**مثال9:** $f(x)=\frac{1}{5x-4}$

**مثال10:** $f(x)=\frac{4x-2}{2x-1}$

**مثال11:** $f(x)=(2x-1)^7$

| الدالة $f$ | الدالة المشتقة $f'$ |
|---|---|
| $f(x)=k$ | $f'(x)=0$ |
| $f(x)=x$ | $f'(x)=1$ |
| $f(x)=ax$ | $f'(x)=a$ |
| $f(x)=ax+b$ | $f'(x)=a$ |
| $f(x)=x^n$ | $f'(x)=nx^{n-1}$ $\quad n\in\mathbb{Z}^*$ |
| $f(x)=\frac{1}{x}$ | $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ |
| $f(x)=\sqrt{x}$ | $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $f(x)=u+v$ | $f'(x)=u'+v'$ |
| $f(x)=u-v$ | $f'(x)=u'-v'$ |
| $f(x)=k.u$ | $f'(x)=k.u'$ |
| $f(x)=u\times v$ | $f'(x)=u'\times v+u\times v'$ |
| $f(x)=u^n$ | $f'(x)=nu^n\times u'$ |
| $f(x)=\frac{1}{u}$ | $f'(x)=-\frac{u'}{u^2}$ |
| $f(x)=\frac{u}{v}$ | $f'(x)=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$ |

***تمرين:*** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

(1 $f(x)=2$ (2 $f(x)=3x-5$ (3 $f(x)=x^{10}$

(4 $f(x)=4x^3-\frac{1}{2}x^2-1$ (5 $f(x)=\frac{5}{x}$ (6 $f(x)=6\sqrt{x}-4$

(7 $f(x)=\frac{1}{2x+1}$ (8 $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ (9 $f(x)=(3x+4)^3$ (10

$f(x)=\sqrt{x^2+1}$

**أجوبة :** (1 $f'(x)=(2)'=0$ (2 $f'(x)=(3x-5)'=3$

(3 $f'(x)=(x^{10})'=10x^{10-1}=10x^9$

(4 $f'(x)=\left(4x^3-\frac{1}{2}x^2-1\right)'=4\times3x^{3-1}-\frac{1}{2}\times2x-0=12x^2-x$

(5 $f'(x)=\left(\frac{5}{x}\right)'=\left(5\times\frac{1}{x}\right)'=5\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-5}{x^2}$

(6 $f'(x)=(6\sqrt{x}-4)'=6\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{x}$

(7 نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2x+1}\right)'=-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}=-\frac{2}{(2x+1)^2}$$

(8 $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)'=\frac{(3x-1)'(x+2)-(3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{3(x+2)-1\times(3x-1)}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$$

(9 $f(x)=(3x+4)^3$ نستعمل القاعدة التالية : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((3x+4)^3\right)'=3\times(3x+4)^{3-1}\times(3x+4)'=3\times3\times(3x+4)^{3-1}=9(3x+4)^2$$

**تمرين3:** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=11$ 2) $f(x)=7x+15$ 3) $f(x)=2x^3$

4) $f(x)=4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1$ 5) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6$

6) $f(x)=\frac{3}{x}$ 7) $f(x)=4\sqrt{x}-1$ 8) $f(x)=\frac{1}{5x+7}$

9) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ 10) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$

11) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ 12) $f(x)=(2x-1)^7$

**أجوبة :** 1) $f'(x)=(11)'=0$ 2) $f'(x)=(7x+15)'=7$

3) $f'(x)=(2x^3)'=2\times3x^{3-1}=6x^2$

4) $f'(x)=\left(4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=4\times4x^{4-1}-\frac{1}{3}\times3x^2-1+0=16x^3-x^2-1$

5)

$$f'(x)=\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6\right)'=\frac{1}{5}\times5x^{5-1}-\frac{1}{4}\times4x^3-4+0=x^4-x^3-4$$

6) $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=\left(3\times\frac{1}{x}\right)'=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-3}{x^2}$

7) $f'(x)=\left(4\sqrt{x}-1\right)'=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$

8) نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{5x+7}\right)'=\frac{(5x+7)'}{(5x+7)^2}=-\frac{5}{(5x+7)^2}$$

9) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+8x}\right)'=\frac{(x^2+8x)'}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$$

10) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{7x}{x^3+1}\right)'=\frac{(7x)'(x^3+1)-7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{7(x^3+1)-7x\times3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{7x^3+7-21x^3}{(x^3+1)^2}=\frac{7-14x^3}{(x^3+1)^2}$$

11) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$$

12) $f(x)=(2x-1)^7$ نستعمل القاعدة التالية : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((2x-1)^7\right)'=7\times(2x-1)^{7-1}\times(2x-1)'=14(2x-1)^6$$

## تطبيقات الدالة المشتقة:

### 1. رتابة دالة وإشارة مشتقتها

**خاصية1**

لتكن $f$ دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال $I$

- إذا كانت $f$ تزايدية على مجال $I$ فان $\forall x\in I\ f'(x)\geq0$
- إذا كانت $f$ تناقصية على مجال $I$ فان $\forall x\in I\ f'(x)\leq0$
- إذا كانت $f$ ثابتة على مجال $I$ فان $\forall x\in I\ f'(x)=0$

**خاصية2**

لتكن $f$ دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال $I$

- إذا كانت $f'$ موجبة قطعا على المجال $I$ فان $f$ تزايدية قطعا على مجال $I$
- إذا كانت $f'$ سالبة قطعا على المجال $I$ فان $f$ تناقصية قطعا على مجال $I$
- إذا كانت $f'$ منعدمة على المجال $I$ فان $f$ ثابتة على مجال $I$

**مثال:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2+2x-2$

1) حدد $D_f$ 2) أحسب نهايات $f$ عند محدات $D_f$

3) أدرس تغيرات $f$ 4) حدد جدول تغيرات $f$

**الجواب:** 1) الدالة $f$ حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2+2x-2=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2+2x-2=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=(x^2+2x-2)'=2x+2$

$f'(x)=0$ يعني $2x+2=0$ يعني $x=-1$

ندرس اشارة $f'(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

اذا كانت: $x\in[-1;+\infty[$ فان : $f'(x)\geq0$ ومنه $f$ تزايديه

اذا كانت: $x\in]-\infty;-1]$ فان : $f'(x)\leq0$ ومنه $f$ تناقصية

4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

### 2. مطاريف دالة قابلة للاشتقاق

**خاصية1:** لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح $I$ و $a$ عنصرا من $I$

- إذا كانت $f$ دالة قابلة للاشتقاق في النقطة $a$ وتقبل مطرا فا في النقطة $a$ فان $f'(a)=0$

**خاصية 2:** لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح $I$ و $a$ عنصرا من $I$

إذا كانت $f$ تنعدم في النقطة $a$ تتغير إشارتها فان $f(a)$ مطرافا للدالة $f$

**مثال:** حدد مطاريف الدالة $f$ المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2-6x+1$

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$ و $f'(x)=\left(x^2-6x+1\right)'=2x-6$

$f'(x)=0$ يعني $2x-6=0$ يعني $x=3$

ندرس اشارة : $f'(x)$ ونحدد جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-8$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f'$ تنعدم في 3 و تتغير إشارتها اذن $f(3)=-8$ مطرا ف للدالة $f$

وبالضبط قيمة دنيا للدالة $f$

**تمرين4:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2+x+1$ أو $f(x)=-x^2+2x+3$ أو $f(x)=-x^2+x$

1) حدد $D_f$ 2) أحسب نهايات $f$ عند محدات $D_f$

3)أحسب مشتقة الدالة $f$ و أدرس اشارتها 4) حدد جدول تغيرات $f$

5)حدد معادلة لمماس منحى الدالة $f$ في النقطة الذي أفصولها $x_0=1$

6)حدد نقط تقاطع $(C_f)$ مع محوري المعلم

7)حدد مطاريف الدالة $f$ ان وجدت

8) أرسم $(C_f)$ في معلم متعامد ممنظم

**الجواب:** $f(x)=2x^2+x+1$

1)الدالة $f$ حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2x^2+x+1=\lim_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x^2+x+1=\lim_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x)=\left(2x^2+x+1\right)'=4x+1$

$f'(x)=0$ يعني $4x+1=0$ يعني $x=-\frac{1}{4}$

ندرس اشارة : $f'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

4) جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{7}{8}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

5) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=5x-21 \Leftrightarrow y=4+5(x-5) \Leftrightarrow y=f(1)+f'(1)(x-1)$

لأن : $f(1)=4$ و $f'(1)=5$

6) أ)نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $2x^2+x+1=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=1$ و $c=1$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times1\times2=-7<0$

ومنه هذه المعادلة ليس لها حل: وبالتلي التمثيل المبياني لا يقطع محور الأفاصيل

ب)نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب

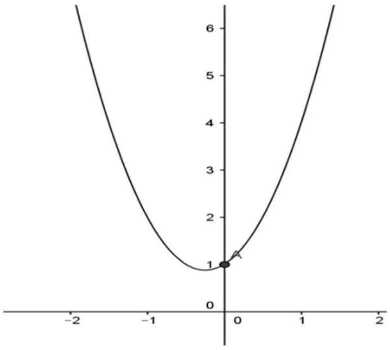
نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=1$ ومنه نقطة التقاطع هي: $A(0;1)$

7)الدالة تقبل قيمة دنيا هي : $\frac{7}{8}$

8)رسم: $C_f$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2- | -1 | -1/4 | 0 | 1 | 2 |
| 7 | 2 | 7/8 | 1 | 4 | 11 |




ملاحظة : بالنسبة ل $f(x)=-x^2+2x+3$ وتحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني

$-x^2+2x+3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=-1$ و $b=2$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4\times3\times(-1)=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(2)+\sqrt{16}}{-2}=-1$ و $x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{-2}=3$

ومنه نقط التقاطع هما: $A(-1;0)$ أو $B(3;0)$

الأستاذ: نجيب عثماني

الدرس الثامن:

**دراسة الدوال وتمثيلها**

أكاديمية الجهة

## مستوى:السنة الأولى من سلك الباكالوريا

- **شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
- **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

**محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية**

| محتوى البرنامج | القدرات المنتظرة | توجيهات تربوية |
|---|---|---|
| - المقارب الأفقي؛ المقارب العمودي؛<br>- أمثلة لدراسة وتمثيل الدوال: $x \to ax^2+bx+c$ و $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ و $x \to ax^3+bx^2+cx+d$ | - استعمال عناصر تماثل منحنى في اختصار مجموعة دراسة دالة؛<br>- تمثيل دوال حدودية من الدرجة الثانية ومن الدرجة الثالثة ودوال متخاطة؛<br>- استعمال التمثيل المبياني لدالة أو جدول تغيراتها لدراسة حلول بعض المعادلات والمتراجحات. | - يتم قبول الفروع اللانهائية لمنحنى دالة حدودية من الدرجة الثالثة؛<br>- ينبغي تناول الحل المبياني لمعادلات ومتراجحات من النوع $f(x)=c$ و $f(x)\le c$ حيث $f$ دالة من بين الدوال الواردة في البرنامج إذا لم يكن الحل الجبري في المتناول. |

### IX. المستقيمات المقاربة

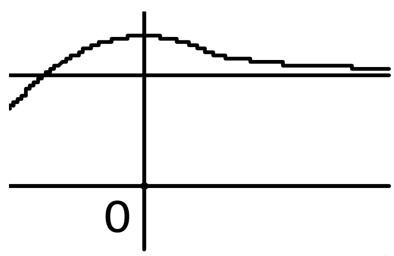
في جميع فقرات الدرس , ننسب المستوى إلى معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$

#### 1. المقارب الموازي لمحور الأراتيب

**تعريف**

إذا كانت: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=-\infty$

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $x=a$ مقارب للمنحنى $(C_f)$




**مثال:** نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة كالتالي :

$$f(x)=\frac{2x-1}{3x-6}$$

حدد $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ وأول النتيجتين هندسيا

**الجواب:** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2x-1}{3x-6}$

| $x$ | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $3x-6$ | $-$ | 0 | $+$ |

$\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-1=3$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} 3x-6=0^+$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} 3x-6=0^-$

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$

**التأويل المبياني :** المستقيم ذا المعادلة $x=2$ مقارب للمنحنى $(C_f)$

**تمرين1 :** أحسب النهايات التالية و أول مبيانيا النتائج :

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}$ و $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}$

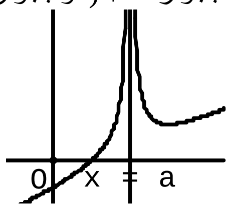
#### 2. المقارب الموازي لمحور الأفاصيل

**تعريف**

إذا كانت: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=a$ ( أو $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=a$ ) ,

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y=a$ مقارب للمنحنى $(C_f)$

بجوار $+\infty$ ( أو بجوار $-\infty$ )




**مثال:** نعتبر الدالة العددية $f$

للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{6x+1}{2x-5}$

حدد $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ وأول النتيجتين هندسيا

**الجواب :** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{6x}{2x}=\frac{6}{2}=3$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{6x}{2x}=\frac{6}{2}=3$

**التأويل المبياني :** المستقيم ذا المعادلة $y=3$ مقارب للمنحنى $(C_f)$

**تمرين2 :** أحسب النهاية التالية و أول مبيانيا النتيجة :

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x+2}$$

**تمرين3:** أحسب النهايات التالية و أول مبيانيا النتائج :

1) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x+3}{x-2}$ و $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+3}{x-2}$

(2 $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{5}{2x-6}$ و $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{5}{2x-6}$

(3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5}{x+2}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+5}{x+2}$

(4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{6x+2}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{6x+2}$

## X. دراسة دالة حدودية من الدرجة الثانية

**مثال :**

لتكن $f$ دالة معرفة ب: $f(x)=x^2+4x+3$ .

1) حدد مجموعة تعريف الدالة $f$

2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

3) أحسب مشتقة الدالة $f$ وأدرس اشارتها

4) حدد جدول تغيرات الدالة $f$ .

5) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيل.

6) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب.

7) أرسم $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ و المستقيم $(D)$ الذي معادلته $(D): y=3$ في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

8) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ و $(D)$.

9) حل مبيانيا في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2+4x\geq0$ .

**تمرين 4 :** لتكن $f$ دالة معرفة ب: $f(x)=-x^2+2x+3$ .

1) حدد مجموعة تعريف الدالة $f$

2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

3) أحسب مشتقة الدالة $f$ وأدرس اشارتها

4) حدد جدول تغيرات الدالة $f$ .

5) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيل.

6) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب.

7) أرسم $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$

**تمرين 5 :** لتكن $f$ دالة معرفة ب: $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+1$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة $f$

2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

3) أحسب مشتقة الدالة $f$ وأدرس اشارتها

4) حدد جدول تغيرات الدالة $f$ .

5) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيل.

6) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب.

7) أرسم $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$

**تمرين 6 :** لتكن $f$ دالة معرفة ب: $f(x)=2x^2-2x-3$.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة $f$

2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

3) أحسب مشتقة الدالة $f$ وأدرس اشارتها

4) حدد جدول تغيرات الدالة $f$ .

5) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيل.

6) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب.

7) أرسم $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$

## XI. دراسة دالة متخاطة:

**مثال :** نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة ب: $g(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة $g$.
2. أحسب نهايات الدالة $g$ في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
3. أحسب الدلة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة $g$.
4. أنشئ منحنى الدالة $g$.

**الحل:**

1)حيز تعريف الدالة $g$ هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq0\}=\mathbb{R}-\{-1\}$

و منه $D=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى $(C_f)$.

$\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x+1}{x+1}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2x+1}{x+1}=+\infty$

يعني المستقيم ذا العادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى.

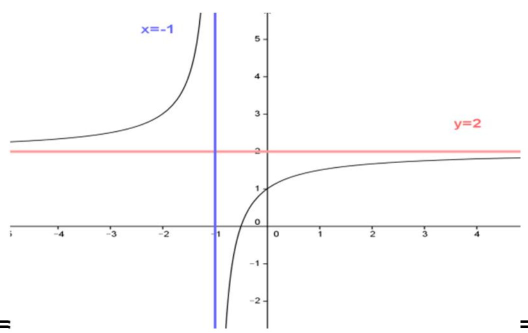
3)لكل $x$ من $D$ لدينا: $g'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ يعني:

$(\forall x\in D)\,g'(x)>0$

4)جدول تغيرات الدالة.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | \|\| | $+$ | |
| $f(x)$ | $2$ | $\nearrow$ | \|\| | $\nearrow$ | $2$ |

منحنى الدالة $g$.



**تمرين 7 :** لتكن $f$ دالة معرفة ب: $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$ .

1) حدد مجموعة تعريف الدالة $f$
2) أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-2^+} f(x)$ و $\lim_{x\to-2^-} f(x)$
3) أحسب مشتقة الدالة $f$ وأدرس إشارتها
4) حدد جدول تغيرات الدالة $f$ .
5) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيل.
6) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب.
7) أرسم $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$

**تمرين 8 :** لتكن $f$ دالة معرفة ب: $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ .

1. حدد مجموعة تعريف الدالة $f$
2. أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to1^+} \dfrac{2x+1}{x-1}$ و $\lim_{x\to1^-} \dfrac{2x+1}{x-1}$
3. أحسب مشتقة الدالة $f$ وأدرس إشارتها
4. حدد جدول تغيرات الدالة $f$ .
5. حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيل.
6. حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب.
7. أرسم $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$

## XII. دراسة دالة حدودية من الدرجة الثالثة

**مثال :**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-4x$

1. حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$
2. أدرس زوجية الدالة $f$
3. أحسب نهايات الدالة $f$ عند محدات $D_f$
4. أحسب مشتقة الدالة $f$ و أدرس إشارتها
5. حدد جدول تغيرات الدالة $f$
6. حدد معادلة لمماس المنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ في النقطة $A$ التي أفصولها $x_0=-1$
7. حدد نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة مع محوري المعلم.
8. أرسم المنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم

**أجوبة :** $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-4x$ (1 $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2)أ) اذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان $-x\in\mathbb{R}$

ب) $f(-x)=\dfrac{1}{3}(-x)^3-4(-x)=-\dfrac{1}{3}x^3-4(-x)=-\left(\dfrac{1}{3}x^3-4x\right)=-f(x)$

ومنه $f$ دالة فردية

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

لأن نهاية دالة حدودية عند مالانهايةهي نهاية حدها الأكبر درجة

4) $f'(x)=\left(\dfrac{1}{3}x^3-4x\right)'=\dfrac{1}{3}3\times x^2-4=x^2-4$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2-2^2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ أو $x=-2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

(5

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $16/3$ | $\searrow$ | $-16/3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

6)معادلة لمماس ل $(C_f)$ في النقطة $A$ التي أفصولها $x_0=-1$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $f(-1)=\dfrac{11}{3}$ و $f'(-1)=-3$

$y=f(-1)+f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y=\dfrac{11}{3}-3(x+1) \Leftrightarrow y=-3x+\dfrac{2}{3}$

7) أ)نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\dfrac{1}{3}x^3-4x=0$

يعني $x\left(\dfrac{1}{3}x^2-4\right)=0$ يعني $x=0$ أو $\dfrac{1}{3}x^2-4=0$

يعني $x=0$ أو $x^2=12$ يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{12}$ أو $x=-\sqrt{12}$

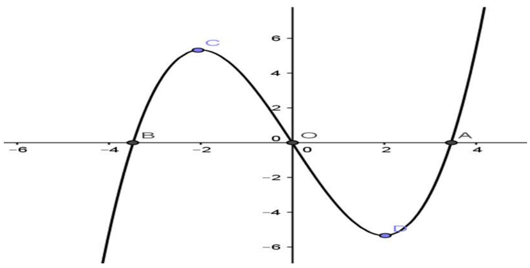
يعني $x=0$ أو $x=2\sqrt{3}$ أو $x=-2\sqrt{3}$

ومنه نقط التقاطع هم: $A(2\sqrt{3};0)$ و $B(-2\sqrt{3};0)$ و $O(0;0)$

ب)نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ لدينا $f(0)=0$ ومنه نقطة التقاطع هي: $O(0;0)$

8)التمثيل المبياني للدالة $f$




**تمرين 9 :** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي :

$f(x)=x^3-3x^2+4$

ليكن $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب نهايات الدالة $f$ عند محدات مجموعة التعريف
2. أحسب مشتقة الدالة $f$ و أدرس إشارتها
3. ضع جدول تغيرات الدالة $f$ .
4. حدد معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة $A(1;2)$
5. أحسب $f(-1)$ و $f(2)$ أنشئ $(C_f)$ و $(T)$.

**الأجوبة :** $f(x)=x^3-3x^2+4$

1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

لأن نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ و $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

2) $f'(x)=\left(x^3-3x^2+4\right)'=3\times x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow 3x=0$ أو $x-2=0$

$\Leftrightarrow x=0$ أو $x=2$

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x(x-2)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

3)

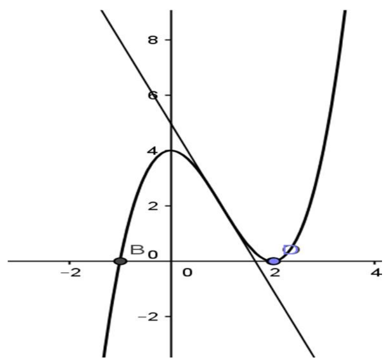
| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | 4 | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

4)معادلة لمماس ل $(C_f)$ في النقطة $A$ التي أفصولها $x_0=1$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $f(1)=2$ و $f'(1)=-3$

$y=f(1)+f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=2-3(x-1) \Leftrightarrow y=-3x+5$

5)التمثيل المبياني للدالة $f$ و $f(-1)=0$ و $f(2)=0$



## تمرين10:

نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3-3x^2+1$

1) حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$

2) أحسب نهايات الدالة $f$ عند محدات $D_f$

3) أحسب مشتقة الدالة $f$ و أدرس إشارتها

4) حدد جدول تغيرات الدالة $f$

5) حدد معادلة لمماس المنحني $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ في النقطة $A$ التي أفصولها $x_0=-1$

6) أرسم المنحني $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم

الأجوبة : $f(x)=x^3-3x^2+1$

1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

لأن نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ و $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

3) $f'(x)=\left(x^3-3x^2+4\right)'=3\times x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow 3x=0$ أو $x-2=0$

$\Leftrightarrow x=0$ أو $x=2$

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x(x-2)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

4)

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | 1 | ↘ | $-3$ | ↗ | $+\infty$ |

5)معادلة لمماس ل $(C_f)$ في النقطة $A$ التي أفصولها $x_0=1$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $f(1)=-1$ و $f'(1)=-3$

$y=f(1)+f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=-1-3(x-1) \Leftrightarrow y=-3x+2$

6)التمثيل المبياني للدالة $f$