المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
للجهة الشرقية
النيابة الإقليمية - وجدة -

تمارين بحلول في جميع دروس الأولى باك علوم تجريبية

إعداد : نجيب عثماني

(أستاذ الثانوي تأهيلي الدرجة الممتازة)

السنة الدراسية : 2017/2016

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

تمرين1:

1)أنقل الجدول التالي ثم ضع العلامة "X" في الخانة المناسبة .

	صحيح	خاطئ
كل زوجي قابل للقسمة على 4		
مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي		
$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$		
اذا كان n^2 عددا فرديا فان n عدد فردي		
المعادلة : $x^2=-1$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$		
جميع المستقيمات المتعامدة في الفضاء متقاطعة		
114516مضاعف للعدد4		
$\left((-2)^2=-4\right)$		

2)هل توجد من بين الجمل الواردة في الجدول أعلاه جمل صحيحة و خاطئة في آن واحد ؟

الأجوبة:(1

	صحيح	خاطئ
كل زوجي قابل للقسمة على 4		X
مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي	X	
$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$		X
اذا كان n^2 عددا فرديا فان n عدد فردي	X	
المعادلة : $x^2=-1$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$		X
جميع المستقيمات المتعامدة في الفضاء متقاطعة		X
114516مضاعف للعدد4	X	
$\left((-2)^2=-4\right)$		X

2) كل النصوص الرياضيةاما صحيحة و إما خاطئة وتسمى عبارات

وجدول حقيقة عبارة

p
1
0

تمرين2:

حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية:

- $p \quad \left((-2)^2=4\right)$
- $q \quad \sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

الأجوبة: p عبارة صحيحة : $\left((-2)^2\neq 4\right)$: $\overline{p}$

qعبارة خاطئة : $\left(\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\right)$: $\overline{q}$

تمرين3:حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$p \quad \left(\sqrt{3}\geq 1\right)$ و $\left((-2)^2=4\right)$

$q \quad \frac{1}{2}\in\mathbb{N}$ و $\left(\frac{7}{2}>3\right)$

الأجوبة:

نستعمل جدول حقيقة العطف المنطقي

العبارة p مكونة من عبارتين صحيحتين اذن هي عبارة صحيحة أنظر جدول عملية العطف المنطقي:

p	q	p و q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

تمرين4:

حدد قيمة حقيقة العبارات الآتية :

$A \quad \left(\sqrt{3}\geq 1\right)$ و $\left((-2)^2>3\right)$

$B \quad \sqrt{2}\in Q$ و $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}>3\right)$

C "$\left(\sqrt{2}\leq 1\right)$ و$\left(\pi=3.14\right)$"

الأجوبة:

نستعمل جدول عملية العطف المنطقي لتحديد قيمة الحقيقة

A عبارة صحيحة : لأنها مكونة من عبارتين صحيحتين

B عبارة خاطئة : لأنها عطف عبارة صحيحة مع خاطئة

Cعبارة خاطئة : لأنها فصل عبارتين خاطئتين

تمرين5:حدد قيمة الحقيقة و العبارة النافية لكل عبارة من العبارات الآتية :

$A \quad \left(\frac{5}{2}\geq 1\right)$ أو $\left((-2)^2=-4\right)$

$B \quad \left(-3\in\mathbb{N}\right)$ أو $\left(5<3\right)$

الأجوبة:

p	q	p أو q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

نستعمل جدول حقيقة الفصل المنطقي

A عبارة صحيحة : لأنها مكونة من عبارة صحيحة و عبارة خاطئة

B عبارة خاطئة: لأنها فصل عبارتين خاطئتين

$\overline{A} \quad \left(\frac{5}{2}<1\right)$ و $\left((-2)^2\neq -4\right)$

$\overline{B} \quad \left(-3\notin\mathbb{N}\right)$ و $\left(5\geq 3\right)$

تمرين6: حدد قيمة الحقيقة و العبارة النافية لكل عبارة من العبارات الآتية :

$A\ (\sqrt{4}=2)$ أو $\left(\frac{1}{2}\in\mathbb{N}\right)$

$B\ ((-2)^2>3)$ أو (3عدد فردي)

$C\ (\sqrt{2}\le 1)$ أو $(\pi=3.14)$

الأجوبة: نستعمل جدول حقيقة الفصل المنطقي

A عبارة صحيحة : لأن $(\sqrt{4}=2)$ عبارة صحيحة

B عبارة صحيحة : لأنها فصل عبارتين صحيحتين

C عبارة خاطئة : لأنها فصل عبارتين خاطئتين

$\overline{A}\ (\sqrt{4}\neq 2)$ و $\left(\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}\right)$

$\overline{B}\ ((-2)^2\le 3)$ و (3عدد زوجي)

$\overline{C}\ (\sqrt{2}>1)$ و $(\pi\neq 3.14)$

تمرين7: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

A (2عدد فردي) $\Rightarrow\ (0,1\in\mathbb{N})$

B (4عدد زوجي) $\Rightarrow\ (-1\in\mathbb{N})$

الأجوبة: نستعمل جدول حقيقة الاستلزام المنطقي

A عبارة صحيحة

B عبارة خاطئة

p	q	$p\Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

تمرين8: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$p\ (\sqrt{3}\ge 1)\Rightarrow((-2)^2=-4)$

$q\ \left(\frac{6}{2}=2\right)\Rightarrow(\sqrt{5}<3)$

الأجوبة: نستعمل جدول حقيقة العطف المنطقي

p **عبارة خاطئة :**

لأن $(\sqrt{3}\ge 1)$ صحيحة

و $((-2)^2=-4)$ خاطئة

q **عبارة صحيحة** :لأن $\left(\frac{6}{2}=2\right)$ خاطئة و $(\sqrt{5}<3)$ صحيحة

تمرين9: 1)أتمم ملأ الجدول التالي :

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p}$ أو q	$(p\Rightarrow q)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

2) ماذا تلاحظ؟

الأجوبة:

(1

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p}$ أو q	$(p\Rightarrow q)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

2)ألاحظ أن العبارتان $(p\Rightarrow q)$ و $\overline{p}$ أو q متكافئتان

تمرين10:

حدد نفي العبارة الآتية : $A"\ x^2=9\Rightarrow x=3$ أو $x=-3"$

الجواب: $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow\ \overline{p}$ أو q

ومنه نفي $(p\Rightarrow q)$ هي العبارة P و $\overline{q}$

ومنه $\overline{A}"\ x^2=9$ و $(x\neq 3$ و $x\neq -3)"$

تمرين11: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$$p\ \left(2\sqrt{3}\ge\sqrt{10}\right)\ \Leftrightarrow\ \left(\left(5\sqrt{2}\right)^2=50\right)$$

$$q\quad -6\in\mathbb{N}\ \Leftrightarrow (1\ge 3)$$

الأجوبة: نستعمل جدول حقيقة التكافؤ المنطقي

p عبارة صحيحة :

لأن $\left(2\sqrt{3}\ge\sqrt{10}\right)$ و $\left(\left(5\sqrt{2}\right)^2=50\right)$ صحيحتين معا

q عبارة صحيحة : لأنها فصل عبارتين خاطئتين

p	q	$p\Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

تمرين12: نعتبر التعبير التالي :

$$(x\in\mathbb{R});x^2-x\ge 0$$

1)حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=2$

2)حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=\frac{1}{2}$

3)حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=-1$

4) هل التعبير صحيح أم خاطئ؟

الأجوبة: 1)من أجل $x=2$ نجد : $2\ge 0$

ومنه نحصل على عبارة صحيحة

2)من أجل $x=\frac{1}{2}$ نجد : $-\frac{1}{4}\ge 0$

ومنه نحصل على عبارة خاطئة

3)من أجل $x=-1$ نجد : $2\ge 0$

ومنه نحصل على عبارة صحيحة

4) التعبير: $(x\in R);x^2-x\ge 0$ يصبح صحيحا

من أجل بعض قيم x من $\mathbb{R}$ خاطئا من أجل بعض قيم x

نقول أننا أمام دالة عبارية تحتوي على متغير x

ينتمي إلى المجموعة $\mathbb{R}$ ونكتب : $\exists x\in\mathbb{R}/x^2-x\ge 0$

ونقرأ يوجد x من $\mathbb{R}$ بحيث $x^2-x\ge 0$

تمرين13: نعتبر التعبير التالي : $(n\in\mathbb{N});n^2\ge 0$

1)حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $n=2$

2)هل توجد قيم n : ل لا تحقق التعبير السابق؟

الأجوبة: 1)من أجل $n=2$ نحصل :على عبارة صحيحة

2)نلاحظ أننا نحصل على عبارة صحيحة مهما تكن قيمة المتغير n

نكتب : $\forall n\in\mathbb{N}/n^2\ge 0$

تمرين14: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$A\ "(\forall x\in\mathbb{R});\ x^2>0"$

$B\ "(\forall n\in\mathbb{N});\ 2^n>5(n+1)"$

$C\ "\ \exists x\in\mathbb{N},\ 2x-1=0\ "$

$D\ "(\forall n\in\mathbb{N});\ \frac{n}{4}\notin\mathbb{N}"$

$E\ "\ n>4\ \Rightarrow\ n>2"$

الأجوبة: A عبارة خاطئة : لأن 0 لا يحقق: $\left(x^2>0\right)$

B عبارة خاطئة : لأن 0 لا يحقق: $\left(2^n>5(n+1)\right)$

لأن $\left(2^0<5(0+1)\right)$

C عبارة خاطئة : لأن $\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$

D عبارة خاطئة : لأن $\frac{4}{4}\in\mathbb{N}$

E عبارة خاطئة

تمرين15: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

1. $"\forall x\in\mathbb{R}/x^2>0"$
2. $"\ \exists x\in\mathbb{R},x^2-2=0\ "$
3. "5 عدد فردي $\Leftrightarrow\ \exists x\in\mathbb{R},x^2+1=0$ "
4. $"\forall n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\in\mathbb{N}\Rightarrow\left(2<\sqrt{3}\right)"$
5. $(\forall x\in\mathbb{R});-1\le\cos x\le1$
6. $(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}):n<m$
7. $(\exists n\in\mathbb{N})$ عدد زوجي $2n+1$
8. $(\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\in\mathbb{N}$
9. $(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y-x>0$
10. $(\exists!x\in\mathbb{R});2x+4=0$
11. $(\exists!x\in\mathbb{R});x^2=2$
12. $(\exists x\in\mathbb{Z});\frac{x}{4}\in\mathbb{Z}$
13. $(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y^2=x$

الأجوبة: 1) خاطئة 2) صحيحة 3) خاطئة 4) خاطئة 5) صحيحة 6) صحيحة 7) خاطئة 8) خاطئة 9) صحيحة 10) صحيحة 11) خاطئة 12) صحيحة 13) خاطئة نأخذ $x=-1$

تمرين16: حدد العبارة النافية للعبارات الآتية :

1) $(\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\in\mathbb{N}$

2) $(\exists x\in\mathbb{Z}):\frac{x}{4}\in\mathbb{Q}$ و $x^2-2=0$

3) كل الأشجار غير مثمرة في المؤسسة

الأجوبة: 1) $(\exists n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\notin\mathbb{N}$

2) $(\forall x\in\mathbb{Z}):\frac{x}{4}\notin\mathbb{Q}$ أو $x^2-2\neq0$

3) توجد شجرة مثمرة في المؤسسة

تمرين17: حدد العبارة النافية للعبارات الآتية

1) $(\forall n\in\mathbb{N});2^n\succ5(n+1)$

2) $"\ \exists x\in\mathbb{R},x^2-2=0$ و $-\frac{3}{2}\in\mathbb{Q}\ "$

3) $(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}):n<m$ 4) كل مثلث قائم الزاوية له زاوية حادة

5) توجد نافذة في المؤسسة مكسورة 6) $(\forall n\in\mathbb{Z}):n\in\mathbb{Z}\Rightarrow n\ge0$

الأجوبة: 1) $(\exists n\in\mathbb{N}):2^n\le5(n+1)$

2) $(\forall x\in\mathbb{R}):x^2-2\neq0$ أو $-\frac{3}{2}\notin\mathbb{Q}$

3) $(\exists n\in\mathbb{N});(\forall m\in\mathbb{N}):n\ge m$

4) يوجد مثلث قائم الزاوية له زاوية غيرحادة

5) كل نوافذ المؤسسة غير مكسورة 6) $(\exists n\in\mathbb{Z}):n\in\mathbb{Z}$ و $n<0$

تمرين18: حدد العبارة النافية للعبارات الآتية:

1) $P;(\forall x\in\mathbb{R}):x\neq2\Rightarrow x^2\neq4$

2) $Q;(\exists x\in\mathbb{R}):x<2\Rightarrow x^2\ge2015$

الأجوبة: 1) $\overline{P};(\exists x\in\mathbb{R}):x\neq2$ و $x^2=4$

2) $\overline{Q};(\forall x\in\mathbb{R}):x<2$ و $x^2<2015$

تمرين19: ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن: $\sqrt{2}<x<5\Rightarrow3<x^2+1<26$

الأجوبة: نفترض أن : $\sqrt{2}<x<5$ ونبين أن : $3<x^2+1<26$

لدينا : $\sqrt{2}<x<5$ اذن : $2<x^2<25$ اذن : $3<x^2+1<26$

ومنه : $\sqrt{2}<x<5\Rightarrow3<x^2+1<26$

تمرين20: ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن: $2\sqrt{3}<x<10\Rightarrow9<x^2-3<97$

الأجوبة: نفترض أن : $2\sqrt{3}<x<10$ ونبين أن : $9<x^2-3<97$

لدينا : $2\sqrt{3}<x<10$ اذن : $12<x^2<100$ اذن : $9<x^2-3<97$

ومنه : $2\sqrt{3}<x<10\Rightarrow9<x^2-3<97$

تمرين21: ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن: $2<x<4\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{1}{x-1}<1$

الأجوبة: نفترض أن : $2<x<4$ ونبين أن : $\frac{1}{3}<\frac{1}{x-1}<1$

لدينا : $2<x<4$ اذن : $2-1<x-1<4-1$

اذن : $1<x-1<3$ اذن : $\frac{1}{3}<\frac{1}{x-1}<1$

ومنه : $2<x<4\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{1}{x-1}<1$

تمرين22: ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن: $-2<x<\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$

الأجوبة: نفترض أن : $-2<x<\frac{1}{3}$ ونبين أن : $\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$

لدينا : $-2<x<\frac{1}{3}$ اذن: $-2+4<x+4<\frac{1}{3}+4$ اذن $2<x+4<\frac{13}{3}$

اذن $\frac{3}{13}<\frac{1}{x+4}<\frac{1}{2}$

ولدينا : $-2<x<\frac{1}{3}$ اذن $-6<3x<1$ اذن: $-1<-3x<6$

اذن $4<-3x+5<11$

ومنه : $\frac{12}{13}<\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$ ومنه $\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$

تمرين23: بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

$p\ "\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right);x+\frac{1}{x}\ge2\ "$

الأجوبة: نعتبر: $x=-2$ لدينا : $-2+\frac{1}{-2}=-\frac{5}{2}<2$

اذن : p خاطئة

تمرين24: بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

p " $\forall x \in]0;1[$ و $\forall y \in]0;1[$, $0 < \frac{x+y}{xy(1-xy)} < 1$ "

الجواب : نعتبر : $x=\frac{1}{2}$ و $y=\frac{1}{2}$ لدينا : $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{12}}=\frac{12}{3}>1$

اذن : p خاطئة

تمرين25: بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

p " $(\forall x\in\mathbb{R}); x^2\ge x$ "

الأجوبة: نعتبر : $x=\frac{1}{2}$ لدينا : $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$ اذن : p خاطئة

تمرين26: ليكن $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$

بين أن: $x+y>1\Rightarrow y>\frac{1}{2}$ أو $x>\frac{1}{2}$

الجواب : نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $x\le\frac{1}{2}$ و $y\le\frac{1}{2}\Rightarrow x+y\le1$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $x\le\frac{1}{2}$ و $y\le\frac{1}{2}$ اذن : $x+y\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ اذن : $x+y\le1$

ومنه : $x\le\frac{1}{2}$ و $y\le\frac{1}{2}\Rightarrow x+y\le1$ وبالتالي : $x+y>1\Rightarrow y>\frac{1}{2}$ أو $x>\frac{1}{2}$

تمرين27: بين باستعمال الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس أنه : اذا كان : $x\in]1;+\infty[$ و $y\in]1;+\infty[$

$(x\ne y)\Rightarrow\left(x^2-2x\ne y^2-2y\right)$

الجواب : نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $x^2-2x=y^2-2y\Rightarrow x=y$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $x^2-2x=y^2-2y\Rightarrow x^2-2x-y^2+2y=0$

$\Rightarrow x^2-y^2-2(x-y)=0\Rightarrow(x-y)(x+y)-2(x-y)=0$

$\Rightarrow(x-y)(x+y-2)=0\Rightarrow x-y=0$ أو $x+y-2\Rightarrow x=y$ أو $x+y-2=0$

ونعلم أن : $x\in]1;+\infty[$ يعني $x>1$ و : ونعلم أن : $x\in]1;+\infty[$ يعني $y>1$

ومنه $x+y>2$ يعني $x+y-2>0$ ومنه $x+y-2\ne0$

ومنه : $x^2-2x=y^2-2y\Rightarrow x=y$

وبالتالي : $(x\ne y)\Rightarrow\left(x^2-2x\ne y^2-2y\right)$

تمرين28: ليكن : $x\in\mathbb{R}$ بين أن : $x\ne-8\Rightarrow\frac{x+2}{x+5}\ne2$

الجواب : نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow x=-8$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow x+2=2(x+5)$

$x+2=2(x+5)\Rightarrow x+2=2x+10\Rightarrow-x=8\Rightarrow x=-8$

ومنه : $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow x=-8$

تمرين29: $x\in]1;+\infty[$ و $y\in]2;+\infty[$

بين أن : $(x\ne y)\Rightarrow\left(x^2-3x\ne y^2-3y\right)$

الجواب : نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $x^2-3x=y^2-3y\Rightarrow x=y$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $x^2-3x=y^2-3y\Rightarrow x^2-3x-y^2+3y=0$

$\Rightarrow x^2-y^2-3(x-y)=0\Rightarrow(x-y)(x+y)-3(x-y)=0$

$\Rightarrow(x-y)(x+y-3)=0\Rightarrow x-y=0$ أو $x+y-3\Rightarrow x=y$ أو $x+y-3=0$

ونعلم أن : $x\in]1;+\infty[$ يعني $x>1$ و : ونعلم أن : $y\in]2;+\infty[$

يعني $y>2$ ومنه $x+y>3$ يعني $x+y-3>0$ ومنه $x+y-3\ne0$

ومنه : $x^2-3x=y^2-3y\Rightarrow x=y$

وبالتالي : $(x\ne y)\Rightarrow\left(x^2-3x\ne y^2-3y\right)$

تمرين30: بين أن : $(\forall a\in\mathbb{R});(\forall b\in\mathbb{R})\quad a^2+b^2\ge2ab$

الأجوبة: نستعمل الاستدلال بالتكافؤ:

$a^2+b^2\ge2ab\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\ge0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(a-b)^2\ge0$ وهذا صحيح لأن المربع دائما موجب

وبالتالي : $(\forall a\in\mathbb{R});(\forall b\in\mathbb{R})\quad a^2+b^2\ge2ab$

تمرين31: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E):|3x-6|=1$

الأجوبة: ندرس اشارة : $3x-6$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$

الحالة 1: اذا كانت : $x\ge2$ فان : $3x-6\ge0$

ومنه : $(E):|3x-6|=1$

$x=\frac{7}{3}\in S\Leftrightarrow3x=7\Leftrightarrow3x-6=1\Leftrightarrow$

الحالة 2: اذا كانت : $x\le2$ فان : $3x-6\le0$

ومنه : $(E):|3x-6|=1$

$-3x+6=1\Leftrightarrow-(3x-6)=1\Leftrightarrow$

$x=\frac{5}{3}\in S\Leftrightarrow-3x=-5\Leftrightarrow$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\left\{\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right\}$

تمرين32: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $3+2|x-4|=x+5$

الجواب: ندرس اشارة : $x-4$

الحالة 1: اذا كانت : $x\ge4$ فان : $x-4\ge0$ ومنه : $|x-4|=x-4$

$x=10\in S\Leftrightarrow3+2x-8=x+5\Leftrightarrow3+2|x-4|=x+5$

الحالة 2: اذا كانت : $x\le4$ فان : $x-4\le0$ ومنه : $|x-4|=-x+4$

$x=2\in S\Leftrightarrow3-2x+8=x+5\Leftrightarrow3+2|x-4|=x+5$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\{2;10\}$

تمرين33: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E):x^2-|x+1|+1=0$

الجواب: ندرس اشارة : $x+1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

الحالة1: اذا كانت : $x\ge-1$ فان : $x+1\ge0$

ومنه : $(E):x^2-|x+1|+1=0$

$x(x-1)=0\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x^2-(x+1)+1=0\Leftrightarrow$

$x=0\in S$ أو $x=1\in S\Leftrightarrow$

الحالة2: اذا كانت : $x\le-1$ فان: $x+1\le0$

ومنه : $(E):x^2-|x+1|+1=0$

$\Leftrightarrow x^2+(x+1)+1=0 \Leftrightarrow x^2+x+2=0$ وهذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ لأن : $\Delta=-7<0$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\{0;1\}$

تمرين34: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات .بين أن : n^2+n عدد زوجي $\forall n\in\mathbb{N}$

الجواب : الحالة 1: n عدد زوجي اذن : $\exists k\in\mathbb{N}/n=2k$

$n^2+n=(2k)^2+2k=4k^2+2k=2(2k^2+k)=2k'$

ومنه : n^2+n عدد زوجي

الحالة 2: n عدد فردي اذن : $\exists k\in\mathbb{N}/n=2k+1$

$n^2+n=(2k+1)^2+2k+1=4k^2+4k+1+2k+1$

ومنه : $n^2+n=4k^2+6k+2=2(2k^2+3k+1)=2k'$ عدد زوجي

وبالتالي : n^2+n عدد زوجي $\forall n\in\mathbb{N}$

تمرين35: بين باستعمال الاستدلال بالخلف أن :

$$\forall x\in\mathbb{R}/ \frac{x^2-1}{x^2+1}\neq 1$$

الأجوبة: لكي نبرهن أن عبارة صحيحة نفترض أن العبارة خاطئة ونحاول الحصول على تناقض مع المعطيات

نفترض أن : $\exists x\in\mathbb{R}/\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$

يعني $x^2-1=x^2+1$ يعني $-1=+1$ وهذا غير صحيح

ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي : $\forall x\in\mathbb{R}/ \frac{x^2-1}{x^2+1}\neq 1$

تمرين36: $n\in\mathbb{N}$ **بين أنه اذا كان** n^2 عدد زوجي فان : n عدد زوجي

الأجوبة: نفترض أن : n عدد فردي

أي أن : $\exists k\in\mathbb{N}/n=2k+1$

ومنه : $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1$

أي : n^2 عدد فردي وهذا يتناقض مع المعطيات : n^2 عدد زوجي

ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي : n عدد زوجي

تمرين37: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};3^n\geq 1+2n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $3^0\geq 1+2\times 0$ أي : $1\geq 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $3^n\geq 1+2n$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $3^{n+1}\geq 1+2(n+1)$ أي نبين أن : $3^{n+1}\geq 2n+3$ ؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع :

$3^n\geq 1+2n$ اذن : $3^n\times 3\geq 3\times(1+2n)$

يعني : $3^{n+1}\geq 6n+3$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $6n+3\geq 2n+1$ (يمكن حساب الفرق)

$(6n+3)-(2n+1)=6n+3-2n-1=4n+2\geq 0$

لدينا اذن : $3^{n+1}\geq 6n+3$ و $6n+3\geq 2n+1$ ومنه : $3^{n+1}\geq 2n+3$

تمرين38: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};3^n\geq 1+n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $3^0\geq 1+0$ أي : $1\geq 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $3^n\geq 1+n$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $3^{n+1}\geq 1+(n+1)$ أي نبين أن : $3^{n+1}\geq n+2$ ؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $3^n\geq 1+n$ اذن : $3^n\times 3\geq 3\times(1+n)$

يعني : $3^{n+1}\geq 3n+3$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $3n+3\geq n+2$ (يمكن حساب الفرق)

$(3n+3)-(n+2)=3n+3-n-2=2n+1\geq 0$

لدينا اذن : $3^{n+1}\geq 3n+3$ و $3n+3\geq n+2$ ومنه : $3^{n+1}\geq n+2$

تمرين39: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};2^n\geq 1+n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $2^0\geq 1+0$ أي : $1\geq 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $2^n\geq 1+n$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $2^{n+1}\geq 1+(n+1)$ أي نبين أن : $2^{n+1}\geq n+2$ ؟؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $2^n\geq 1+n$ اذن : $2^n\times 2\geq 2\times(1+n)$

يعني : $2^{n+1}\geq 2n+2$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $2n+2\geq n+2$ (يمكن حساب الفرق)

$(2n+2)-(n+2)=n\geq 0$

لدينا اذن : $2^{n+1}\geq 2n+2$ و $2n+2\geq n+2$ ومنه : $2^{n+1}\geq n+2$

تمرين40: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* : 1+2+3+\dots+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1=\frac{1\times(1+1)}{2}=\frac{1\times 2}{2}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $1+2+3+\dots+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $1+2+3+\dots+n+(n+1)=\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}$ ؟؟

لدينا : $1+2+3+\dots+n+(n+1)=(1+2+3+\dots+n)+(n+1)$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $1+2+3+\dots+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

اذن : $1+2+3+\dots+n+(n+1)=\frac{n\times(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$

$$1+2+3+\dots+n+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

لدينا اذن : $\forall n\in\mathbb{N}^* : 1+2+3+\dots+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

تمرين41: بين n^3+2n يقبل القسمة على 3 مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي n

الجواب : يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/n^3+2n=3k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $0^3+2\times 0=0$ مضاعف للعدد 3 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/n^3+2n=3k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3+2(n+1)=3k'$ ؟؟؟؟؟

$$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2=$$

$$(n^3+2n)+3n^2+3n+3=3k+3(n^2+n+1)=3(k+n^2+n+1)$$

$=3(k+n^2+n+1)=3k'$ مع $k'=k+n^2+n+1$

ومنه : $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3+2(n+1)=3k'$

وبالتالي n^3+2n يقبل القسمة على 3 مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي n

تمرين42: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :
$$\forall n\in\mathbb{N}^* \ : 1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1^2=\frac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6}=\frac{1\times2\times3}{6}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$ ؟

لدينا : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=(1^2+2^2+3^2+...+n^2)+(n+1)^2$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

اذن : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)$$
$$=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right)=(n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)$$

ويمكننا أن نلاحظ أن : $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$

ومنه : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$

تمرين43: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :
$$\forall n\in\mathbb{N}^* : 1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1^3=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^3=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}\right)^2$ ؟؟

لدينا : $1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=(1^3+2^3+3^3+...+n^3)+(n+1)^3$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

اذن : $1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+(n+1)\right)=(n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)$$
$$=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4}=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{2^2}=^2\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

ومنه : $\forall n\in\mathbb{N}^* : 1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

تمرين44: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :
$$\forall n\in\mathbb{N}: 2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $2^0=1$ و $2^{0+1}-1=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n+2^{n+1}=2^{n+2}-1$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n+2^{n+1}=(2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n)+2^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$

اذن : $=2^{n+1}-1+2^{n+1}=2\times2^{n+1}-1=2^1\times2^{n+1}-1=2^{n+2}-1$

ومنه : $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n+2^{n+1}=2^{n+2}-1$

والتالي : $\forall n\in\mathbb{N}: 2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$

تمرين45: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :
$$\forall n\in\mathbb{N} : 5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $5^0=1$ و $\frac{5^{0+1}-1}{4}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $5^0+5^1+5^2...+5^n+5^{n+1}=\frac{5^{n+2}-1}{4}$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $5^0+5^1+5^2+5^3+...+5^n+5^{n+1}=(5^0+5^1+5^2+5^3+...+5^n)+5^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$

اذن : $5^0+5^1+5^2...+5^n+5^{n+1}=\frac{5^{n+1}-1}{4}+5^{n+1}$

$$=\frac{5^{n+1}-1+4\times5^{n+1}}{4}=\frac{5\times5^{n+1}-1}{4}=\frac{5^{n+2}-1}{4}$$

ومنه : $5^0+5^1+5^2...+5^n+5^{n+1}=\frac{5^{n+2}-1}{4}$

والتالي : : $\forall n\in\mathbb{N} : 5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$

تمرين46: 1) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N} : 3^0+3^1+3^2...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$

2) أ) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad 12n+14\geq 6(n+1)+7$

ب) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\geq 6 \quad 2^n\geq 6n+7$

الجواب : 1) نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $3^0=1$ و $\frac{3^{0+1}-1}{2}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $3^0+3^1+3^2...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $3^0+3^1+3^2...+3^n+3^{n+1}=\frac{3^{n+2}-1}{2}$ ؟؟

لدينا : $3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^n+3^{n+1}=(3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^n)+3^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $3^0+3^1+3^2...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$

اذن : $3^0+3^1+3^2...+3^n+3^{n+1}=\frac{3^{n+1}-1}{2}+3^{n+1}$

$$=\frac{3^{n+1}-1}{2}+3^{n+1}=\frac{3^{n+1}-1+2\times3^{n+1}}{2}=\frac{3\times3^{n+1}-1}{2}=\frac{3^{n+2}-1}{2}$$

ومنه : $3^0+3^1+3^2...+3^n+3^{n+1}=\frac{3^{n+2}-1}{2}$

والتالي : : $\forall n\in\mathbb{N} : 3^0+3^1+3^2...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$

2)أ) نبين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad 12n+14\geq 6(n+1)+7$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق :

$$(12n+14)-(6(n+1)+7)=2n+14-6n-6-7=6n+1\geq 0$$

ومنه : $\forall n\in\mathbb{N} \quad 12n+14\geq 6(n+1)+7$

2)ب)نبين أن : $\forall n\geq 6 \quad 2^n\geq 6n+7$ ؟؟؟؟؟

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=6$

لدينا $2^6 \geq 6\times 6+7$ لأن : $64 \geq 43$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=6$

المرحلة2: نفترض أن: $2^n \geq 6n+7$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $2^{n+1} \geq 6(n+1)+7$ ؟؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $2^n \geq 6n+7$ اذن : $2\times 2^n \geq 2\times(6n+7)$

يعني : $2^{n+1} \geq 12n+14$ اذن لم نجد بعد النتيجة

وحسب السؤال 2)أ) لدينا : $12n+14 \geq 6(n+1)+7 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

لدينا اذن : $2^{n+1} \geq 12n+14$ و $12n+14 \geq 6(n+1)+7$

ومنه : $2^{n+1} \geq 6(n+1)+7$

وبالتالي : $2^n \geq 6n+7 \quad \forall n\geq 6$ ؟؟؟؟؟

تمرين47: بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$.

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1\times(1+1)=1\times2=2$ و $\frac{1}{3}\times1\times(1+1)\times(1+2)=\frac{1}{3}\times2\times3=2$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)$

المرحلة3: نبين أن :

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)+(n+1)\times(n+2)=\frac{1}{3}(n+1)\times(n+2)\times(n+3)$$ ؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع :

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)$$

اذن:

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)+(n+1)\times(n+2)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)+(n+1)\times(n+2)$$

$$=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)+(n+1)\times(n+2)=(n+1)\times(n+2)\left(\frac{1}{3}n+1\right)=(n+1)\times(n+2)\left(\frac{n+3}{3}\right)$$

ومنه

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)+(n+1)\times(n+2)=\frac{1}{3}(n+1)\times(n+2)\times(n+3)$$

تمرين48: بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $\frac{1}{1\times2\times3}=\frac{1}{6}$ و $\frac{1\times(1+3)}{4(1+1)\times(1+2)}=\frac{4}{4\times2\times3}=\frac{1}{6}$

ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن:

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}$$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن:

$$S=\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)\times(n+4)}{4(n+2)\times(n+3)}$$ ؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع :

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}$$

اذن :

$$=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{n\times(n+3)^2}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}+\frac{4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$

$$=\frac{n\times(n+3)^2+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{n\times(n^2+6n+9)+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$

يمكننا أن نبين أن : $n^3+6n^2+9n+4=(n+1)^2\times(n+4)$

ومنه: $S=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)^2\times(n+4)}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)\times(n+4)}{4\times(n+2)\times(n+3)}$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}$

تمرين49: بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}$. $b_n=4^{2n+2}-1$ يقبل القسمة على 15

الجواب : يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/b_n=15k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $b_0=4^{2\times0+2}-1=4^2-1=15$

مضاعف للعدد 15 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/4^{2n+2}-1=15k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/4^{2(n+1)+2}-1=15k'$ ؟؟؟؟؟

أي نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/4^{2n+4}-1=15k'$ ؟؟؟؟؟

أي نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/b_{n+1}=15k'$ ؟؟؟؟؟

نحسب مثلا : $b_{n+1}-b_n=\left(4^{2n+4}-1\right)-\left(4^{2n+2}-1\right)$

$$b_{n+1}-b_n=4^{2n+2+2}-4^{2n+2}=4^{2n+2}\left(4^2-1\right)$$

$$b_{n+1}-b_n=15\times4^{2n+1}$$

اذن : $b_{n+1}-b_n=15\times4^{2n+1}$ يعني $b_{n+1}=15\times4^{2n+1}+b_n$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $\exists k\in\mathbb{N}/b_n=15k$

ومنه $b_{n+1}=15\times4^{2n+1}+15k$ اي $b_{n+1}=15\times(4^{2n+1}+k)$

وبالتالي $\exists k'\in\mathbb{N}/b_{n+1}=15k'$

تمرين50: بين أنه مهما يكن من $\mathbb{N}$.

n^3-n يقبل القسمة على 6

الجواب : يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/n^3-n=6k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $0^3-0=0$ مضاعف للعدد 6 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/n^3-n=6k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3-(n+1)=6k'$ ؟؟؟؟؟

$$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=$$

$$=\left(n^3-n\right)+3n^2+3n=6k+3\left(n^2+n\right)=6k+3n(n+1)$$

ونعلم أن : $n(n+1)$ عدد زوجي لأنه جداء عددين متتاليين $n(n+1)=2m$

$$(n+1)^3-(n+1)=6k+3\times2m=6k+6m=6(k+m)=6k'$$

وبالتالي: $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3-(n+1)=6k'$

تمرين51: 1)بين أن : $11^{n+1}-1=10\times11^n+11^n-1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2)بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن: 11^n-1 مضاعف للعدد 10 $\forall n\in\mathbb{N}$

الجواب : 1) $11^{n+1}-1=11\times11^n-1=(10+1)\times11^n-1=10\times11^n+11^n-1$

2) يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/11^n-1=10k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$
لدينا $11^0-1=1-1=0$ مضاعف للعدد 10 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/11^n-1=10k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k\in\mathbb{N}/11^{n+1}-1=10k'$ ؟؟؟؟؟

نعلم حسب 1) $11^{n+1}-1=10\times11^n+11^n-1$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $\exists k\in\mathbb{N}/11^n-1=10k$

اذن: $11^{n+1}-1=10\times11^n+10k$

اذن: $11^{n+1}-1=10\left(11^n+k\right)=10k'$ مع $k'=11^n+k$

ومنه : $11^{n+1}-1$ مضاعف للعدد 10

وبالتالي: 11^n-1 مضاعف للعدد 10 $\forall n\in\mathbb{N}$

تمرين52: نضع : $A_n=3^{2n}-2^n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) تحقق من أن : $A_{n+1}=2A_n+7\times3^{2n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

2) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : A_n مضاعف للعدد 7 $\forall n\in\mathbb{N}^*$

الجواب 1) $A_{n+1}=3^{2(n+1)}-2^{n+1}=3^{2n+2}-2^{n+1}=3^{2n}\times3^2-2^n\times2^1$

$A_{n+1}=9\times3^{2n}-2^n\times2^1=(7+2)\times3^{2n}-2^n\times2^1=7\times3^{2n}+2\times3^{2n}-2^n\times2^1$

$A_{n+1}=7\times3^{2n}+2\times3^{2n}-2^n\times2^1=7\times3^{2n}+2\left(3^{2n}-2^n\right)=7\times3^{2n}+2\times A_n$

2) يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}^*/A_n=7k$

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $A_1=3^{2\times1}-2^1=3^2-2=9-2=7$

مضاعف للعدد 7 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}^*/A_n=7k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}^*/A_{n+1}=7k'$ ؟؟؟؟؟

حسب السؤال1) : $A_{n+1}=7\times3^{2n}+2\times A_n$

اذن : $A_{n+1}=7\times3^{2n}+2\times A_n=7\times3^{2n}+2\times7k=7\times\left(3^{2n}+2k\right)=7\times k'$

وبالتالي : $A_n=3^{2n}-2^n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

تمرين53: ليكن a عدد حقيقي موجب قطعا

1) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};(1+a)^n\ge1+n\times a$

2) استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N};\quad 2^n>n$

الجواب : 1) نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $(1+a)^0\ge1+0\times a$ لأن : $1\ge1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $(1+a)^n\ge1+n\times a$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $(1+a)^{n+1}\ge1+(n+1)\times a$ ؟؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $(1+a)^n\ge1+n\times a$

اذن : $(1+a)(1+a)^n\ge(1+a)(1+n\times a)$

يعني : $(1+a)^{n+1}\ge(1+a)(1+n\times a)$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نقارن : $(1+a)(1+n\times a)$ و $1+(n+1)\times a$ (يمكن حساب الفرق)

$(1+a)(1+n\times a)-(1+(n+1)\times a)=1+na+a+na^2-1-n\times a-a$

$(1+a)(1+n\times a)-(1+(n+1)\times a)=na^2\ge0$

اذن : $(1+a)(1+n\times a)\ge(1+(n+1)\times a)$

ومنه : $(1+a)^{n+1}\ge1+(n+1)\times a$

وبالتالي : $\forall n\in\mathbb{N};(1+a)^n\ge1+n\times a$

2)وجدنا : $\forall a>0;\forall n\in\mathbb{N};(1+a)^n\ge1+n\times a$

نأخذ مثلا : $a=1$ فنجد : $\forall n\in\mathbb{N};(1+1)^n\ge1+n\times1$

أي : $\forall n\in\mathbb{N};2^n\ge1+n$

ولكن نعلم أن : $\forall n\in\mathbb{N}:1+n>n$

اذن : $\forall n\in\mathbb{N};2^n>n$

« c’est en forgeant que l’on devient forgeron » dit un proverbe.
c’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien

تمرين1: حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي :

(1 $f(x)=2x^3+x+3$ (2 $g(x)=\dfrac{3x+1}{2x^2-x-1}$

(3 $h(x)=\sqrt{2x^2-x-1}$

أجوبة: (1 $f(x)=2x^3+x+3$

يعني $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2 $g(x)=\dfrac{3x+1}{2x^2-x-1}$ يعني $D_g=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-x-1\neq 0\}$

$2x^2-x-1=0$ نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=-1$ و $c=-1$

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times2}=\dfrac{1+3}{4}=\dfrac{4}{4}=1$ و $x_2=\dfrac{1-3}{2\times2}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

ومنه: $D_g=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2};1\right\}$

(3 $h(x)=\sqrt{2x^2-x-1}$ $D_h=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-x-1\geq 0\}$

$x_1=1$ و $x_2=-\dfrac{1}{2}$ نحدد جدول الاشارة :

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه : $D_h=\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

تمرين2: حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي:

(1 $f(x)=\dfrac{|x|(2x+1)}{x(2x^2+x-3)}$ (2 $g(x)=\dfrac{4x+1}{x^2+x+1}$

(3 $h(x)=\dfrac{x^2+x-3}{2|x|-1}$ (4 $A(x)=\dfrac{x^2-3}{4|x|+2}$ (5 $B(x)=\dfrac{x^2-3}{|x-1|-|x+1|}$

(6 $C(x)=\sqrt{3-x^2}$

أجوبة: (1 $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x(2x^2+x-3)\neq 0\}$

$x(2x^2+x-3)=0\Leftrightarrow x=0$ أو $2x^2+x-3=0$

$2x^2+x-3=0$ نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=1$ و $c=-3$

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times2\times(-3)=1+24=25=(5)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{25}}{2\times2}=\dfrac{-1+5}{4}=\dfrac{4}{4}=1$ و $x_2=\dfrac{-1-5}{2\times2}=\dfrac{-6}{4}=-\dfrac{3}{2}$

ومنه: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2};0;1\right\}$

(2 $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x+1\neq 0\}$

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$$

ومنه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

وبالتالي : $D_f=\mathbb{R}$

(3 $D_h=\{x\in\mathbb{R}/2|x|-1\neq 0\}$

$2|x|-1=0\Leftrightarrow|x|=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ أو $x=-\dfrac{1}{2}$

ومنه: $D_h=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$

(4 $D_A=\{x\in\mathbb{R}/4|x|+2\neq 0\}$

$4|x|+2=0\Leftrightarrow|x|=-\dfrac{1}{2}$

وهذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $D_A=\mathbb{R}$

(5 $D_B=\{x\in\mathbb{R}/|x-1|-|x+1|\neq 0\}$

$|x-1|-|x+1|=0\Leftrightarrow|x-1|=|x+1|$

ومنه: $\Leftrightarrow x-1=x+1$ أو $x-1=-(x+1)$

$x=0\Leftrightarrow -1=1$ أو $2x=0$

$D_B=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

(6 $C(x)=\sqrt{3-x^2}$ $D_C=\{x\in\mathbb{R}/3-x^2\geq 0\}$

$3-x^2=0\Leftrightarrow(\sqrt{3})^2-x^2=0\Leftrightarrow(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{3}-x=0$ أو $\sqrt{3}+x=0\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$

نحدد جدول الاشارة :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$3-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه : $D_C=\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$

تمرين3: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. بين أن: $f(x)\leq 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$
3. بين أن: $0\leq f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$
4. ماذا تستنتج؟ماذا نقول عن الدالة f ؟

الأجوبة: (1 $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=-1$ وهذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

$D_f=\mathbb{R}$

(2 نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}$ $x^2\geq 0$

اذن: $x^2+1\geq 0+1$ يعني $x^2+1\geq 1$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}\le 1$

نقول f دالة مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 1

سؤال: هل الدالة f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 2؟ نعم

3) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ x^2\ge 0$

اذن: $x^2+1\ge 0+1$ يعني $x^2+1\ge 1$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ 0\le f(x)$

نقول f دالة مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 0

سؤال: هل الدالة f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد -1؟ نعم

4)نستنتج أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 0\le f(x)\le 1$

اذن : f مكبورة و مصغورة على $\mathbb{R}$ نقول f دالة محدودة على $\mathbb{R}$

تمرين4:حدد من بين الدوال f التالية الدوال المكبورة و المصغورة و المحدودة

1. $f(x)=|x|+6$ $\quad I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=2\cos x+1$ $\quad I=\mathbb{R}$
3. $f(x)=-x^4-4$ $\quad I=\mathbb{R}$
4. $f(x)=\sqrt{x}+6$ $\quad I=\mathbb{R}^+$
5. $f(x)=\sin x-2$ $\quad I=\mathbb{R}$

الأجوبة:1) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ |x|\ge 0$

اذن: $|x|+6\ge 0+6$ يعني $|x|+6\ge 6$

أي $\forall x\in\mathbb{R}\ 6\le f(x)$

اذن f دالة مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 6

2) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ -1\le\cos x\le 1$

اذن: $-2\le 2\cos x\le 2$ يعني $-2+1\le 2\cos x+1\le 2+1$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ -1\le f(x)\le 3$

اذن: f دالة محدودة على $\mathbb{R}$

3) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ x^4\ge 0$ يعني $-x^4\le 0$ يعني $-x^4-4\le 0-4$

يعني $f(x)\le -4$ ومنه f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد -4

4) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}^+\ \sqrt{x}\ge 0$ يعني $\sqrt{x}+6\ge 0+6$

يعني $6\le f(x)$ ومنه f مصغورة على $I=\mathbb{R}^+$ بالعدد 6

5) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ -1\le\sin x\le 1$

اذن: $-1-2\le\sin x-2\le 1-2$ يعني $-3\le\sin x-2\le -1$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ -3\le f(x)\le -1$

اذن: f دالة محدودة على $\mathbb{R}$

تمرين5:نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-2x+5$

بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 4

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 4\le f(x)$

اذن نحسب الفرق : $f(x)-4=x^2-2x+5-4=x^2-2x+1=(x-1)^2\ge 0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ 4\le f(x)$

وبالتالي f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 4

تمرين6:نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=-2x^2+4x+1$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد 3

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le 3$

اذن نحسب الفرق : $3-f(x)=3-(-2x^2+4x+1)=3+2x^2-4x-1$

$3-f(x)=2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2\ge 0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le 3$

وبالتالي f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 3

تمرين7:نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{5+4x^4}{x^4+1}$

بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 4

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 4\le f(x)$

اذن نحسب الفرق :

$$f(x)-4=\frac{5+4x^4}{x^4+1}-4=\frac{5+4x^4-4(x^4+1)}{x^4+1}=\frac{5+4x^4-4(x^4+1)}{x^4+1}=\frac{1}{x^4+1}\ge 0$$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ 4\le f(x)$

تمرين8:لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=[1;+\infty[$ بما يلي:

$f(x)=-5x-\sqrt{x-1}$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد -5 على $I=[1;+\infty[$

الجواب:يكفي أن نبين أن : $\forall x\in[1;+\infty[\ f(x)\le -5$

نعلم أن : $\forall x\in[1;+\infty[\ \sqrt{x-1}\ge 0$ يعني $-\sqrt{x-1}\le 0$ $\quad(1)$

ولدينا : $x\in[1;+\infty[\Leftrightarrow x\ge 1\Leftrightarrow -5x\le -5$ (2)

من : (1)و (2) نحصل على : $-\sqrt{x-1}-5x\le 0-5$

يعني$f(x)\le -5$ ومنه f مكبورة على $I=[1;+\infty[$ بالعدد -5

تمرين9:نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. بين أن الدالة f مكبورة بالعدد $\frac{7}{3}$ على $\mathbb{R}$.
3. بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 1 على $\mathbb{R}$.
4. مادا تستنتج بالنسبة للدالة f ؟

الأجوبة:1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+3x+3\ne 0\}$

$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times3\times1=9-12=-3<0$

ومنه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

وبالتالي : $D_f=\mathbb{R}$

2) يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le\frac{7}{3}$

اذن نحسب الفرق :

$$\frac{7}{3}-f(x)=\frac{7}{3}-\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}=\frac{7(x^2+3x+3)-3(2x^2+7x+7)}{x^2+3x+3}$$

$$\frac{7}{3}-f(x)=\frac{7x^2+21x+21-6x^2-21x-21}{x^2+3x+3}=\frac{x^2}{x^2+3x+3}$$

بالنسبة للحدودية x^2+3x+3 وجدنا أن : $\Delta<0$

ومنه اشارتها هي اشارة $a=1$ أي أن : $x^2+3x+3>0$

وبما أنه لدينا : $x^2\ge 0$ فان : $\frac{x^2}{x^2+3x+3}\ge 0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le\frac{7}{3}$ بالتالي : f مكبورة بالعدد $\frac{7}{3}$ على $\mathbb{R}$.

3) يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 1\le f(x)$

اذن نحسب الفرق :

$$f(x)-1=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-1=\frac{2x^2+7x+7-(x^2+3x+3)}{x^2+3x+3}$$

$$f(x)-1=\frac{2x^2+7x+7-x^2-3x-3}{x^2+3x+3}=\frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+3}=\frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}$$

بالنسبة للحدودية x^2+3x+3 سبق أن وضحنا أن : $x^2+3x+3>0$

وبما أنه لدينا : $(x+2)^2\ge0$ فان : $\frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}\ge0$

ومنه: $\forall x\in\mathbb{R}\ 1\le f(x)$ بالتالي: الدالة f مصغورة بالعدد 1 على $\mathbb{R}$.

4)وجدنا أن : $1\le f(x)$ و $f(x)\le\frac{7}{3}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

ومنه : $1\le f(x)\le\frac{7}{3}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ اي أن f محدودة على $\mathbb{R}$

تمرين10: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\cos x$

قارن : $f(x)$ و $f(x+2\pi)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

الجواب $f(x+2\pi)=\cos(x+2\pi)=\cos x=f(x)$

تمرين11: نعتبر الدوال f و g المعرفة على $\mathbb{R}$

كالتالي : $f(x)=\cos 6x$ و $g(x)=\sin 7x$

1. بين أن الدالة f دورية و $\frac{\pi}{3}$ دور لها.
2. بين أن الدالة g دورية و $\frac{2\pi}{7}$ دور لها.

الأجوبة:1) $D_f=\mathbb{R}$

- إذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان $x+\frac{\pi}{3}\in\mathbb{R}$
- $f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos6\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(6x+2\pi)=\cos6x=f(x)$

ومنه f دورية و $\frac{\pi}{3}$ دور لها.

2) $D_g=\mathbb{R}$

- إذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان $x+\frac{2\pi}{7}\in\mathbb{R}$
- $g\left(x+\frac{2\pi}{7}\right)=\sin7\left(x+\frac{2\pi}{7}\right)=\sin(7x+2\pi)=\sin7x=g(x)$

g دورية و $\frac{2\pi}{7}$ دور لها.

تمرين12: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$f(x)=x^2+2$

1. أحسب : $f(0)$
2. بين أن : $f(0)\le f(x)$ على $\mathbb{R}$ وماذا تستنتج؟

الأجوبة:1) $D_f=\mathbb{R}$ و $f(0)=2$

2) نعلم أن : $0\le x^2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن: $0+2\le x^2+2$ يعني $2\le x^2+2$

يعني $f(0)\le f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

أستنتج أن $f(0)$ هي قيمة دنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين13: تكن f دالة معرفة ب:. $f(x)=-2x^2+4x+1$

1) أحسب $f(1)$ و تأكد أن : $f(x)=-2\left((x-1)^2-\frac{3}{2}\right)$

2) تأكد أن : $f(x)\le f(1)$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

3) ماذا تستنتج؟

الأجوبة:1) $D_f=\mathbb{R}$ و $f(1)=3$

2) نعلم أن : $0\le(x-1)^2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن: $0-\frac{3}{2}\le(x-1)^2-\frac{3}{2}$ يعني $-\frac{3}{2}\le(x-1)^2-\frac{3}{2}$

يعني $(-2)\left(-\frac{3}{2}\right)\ge(-2)\left((x-1)^2-\frac{3}{2}\right)$ يعني $f(x)\le3$ $\forall x\in\mathbb{R}$

يعني $f(x)\le f(1)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

3)أستنتج أن $f(1)$ هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين14: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=2x^2+2x+3$.

بين أن : $f(-1)$ هي قيمة دنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

الجواب : يكفي أن نبين أن : $f(-1)\le f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$f(-1)=2-2+3=3$

اذن نحسب الفرق :

$f(x)-f(-1)=2x^2+2x+1-3=2x^2+2x-2$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times2\times2=4-16=-12<0$

اذن: اشارة الحدودية هي اشارة $a=2$ اذن : $2x^2+2x-2>0$

ومنه : $f(-1)\le f(x)$

وبالتالي: $f(-1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين15: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. بين أن $f(1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$.
3. بين أن $f(-1)$ هي القيمة القصوى للدالة f على $\mathbb{R}$.

الأجوبة:1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x+1\ne0\}$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$

ومنه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ وبالتالي : $D_f=\mathbb{R}$

2) يكفي أن نبين أن : $f(1)\le f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(1)=\frac{1^2+1}{1^2+1+1}=\frac{2}{3}$$

$$f(x)-f(1)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}-\frac{2}{3}=\frac{3x^2+3-2(x^2+x+1)}{3(x^2+x+1)}=\frac{x^2-2x+1}{3(x^2+x+1)}$$

اذن : $f(x)-f(1)=\frac{(x-1)^2}{3(x^2+x+1)}$

بالنسبة للحدودية : x^2+x+1 وجدنا $\Delta<0$

اذن: اشارة الحدودية هي اشارة $a=1$ أي : $x^2+x+1>0$

ونعلم أن : $(x-1)^2\ge0$ اذن : $f(x)-f(1)\ge0$

ومنه : $f(1)\le f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

و بالتالي : $f(1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$.

3) يكفي أن نبين أن : $f(x)\le f(-1)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(-1)=\frac{(-1)^2+1}{(-1)^2-1+1}=2$$

$$f(-1)-f(x)=2-\frac{x^2+1}{x^2+x+1}=\frac{2(x^2+x+1)-(x^2+1)}{x^2+x+1}=\frac{x^2+2x+1}{x^2+x+1}$$

إذن : $f(-1)-f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+x+1}$

بالنسبة للحدودية : x^2+x+1 سبق أن

بينا أن : $x^2+x+1>0$

ونعلم أن : $(x+1)^2\geq 0$ إذن : $f(-1)-f(x)\geq 0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq f(-1)$

و بالتالي : $f(-1)$ هي القيمة القصوى للدالة f على $\mathbb{R}$.

<u>تمرين16</u>: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي :

$f(x)=x\sqrt{x^2+1}-x^2$ بين أن الدالة f مكبورة بالعدد $\frac{1}{2}$.

<u>الجواب :</u> يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}-f(x)=\frac{1}{2}-x\sqrt{x^2+1}+x^2=\frac{1-2x\sqrt{x^2+1}+2x^2}{2}=\frac{1-2x\sqrt{x^2+1}+2x^2}{2}$$

$$\frac{1}{2}-f(x)=\frac{x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}+x^2}{2}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-2\sqrt{x^2+1}\times x+x^2}{2}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}{2}\geq 0$$

ومنه f مكبورة بالعدد $\frac{1}{2}$.

<u>تمرين17</u>: لتكن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين

على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=2x-1$ و $g(x)=x^2$

1. مثل الدالتين f و g في نفس المعلم

2. أدرس اشارة الفرق: $g(x)-f(x)$ وماذا تستنتج مبيانيا؟

<u>الأجوبة:1)</u>

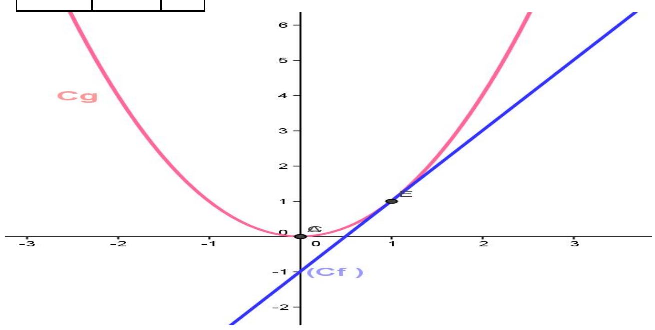
$D_f=\mathbb{R}$ و

$D_g=\mathbb{R}$ لأنهم

دوال حدودية

x	-3	-2	-1	0	1	2	
$g(x)$	9	4	1	0	1	4	9

x	0	1
$f(x)$	-1	1



2) $g(x)-f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$ ومنه $g(x)\geq f(x)$

نقول أننا قمنا بمقارنة للدالتين f و g وجدنا أن : $g\geq f$

أستنتج مبيانيا أن منحنى الدالة g يوجد فوق منحنى الدالة f على $\mathbb{R}$

<u>تمرين18</u>: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=x$ و $g(x)=x^2$

1. حدد D_f و D_g

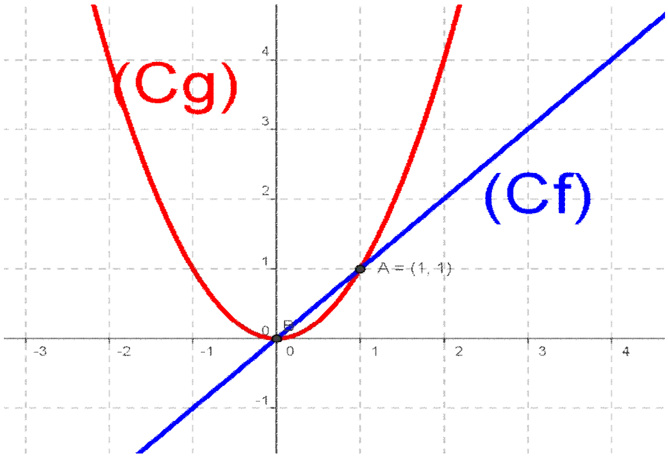
2. أرسم في معلم متعامد ممنظم منحنى الدالتين f و g

3. قارن f و g

<u>الأجوبة:1)</u> $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية

x	0	1
$f(x)$	1	1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	9	4	1	0	1	4	9



(2 $g(x)-f(x)=x^2-x=x(x-1)$

ندرس اشارة $x(x-1)$: $x(x-1)=0$ يعني $x-1=0$ أو $x=0$

نرسم جدول الاشارة :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		+	0	−	0	+	

<u>الحالة 1</u>: اذاكانت $x\in]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$ فان $g\geq f$ بالتالي منحنى الدالة g يوجد فوق منحنى الدالة f على $]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$

<u>الحالة2</u>: اذاكانت $x\in[0,1]$ فان $f\geq g$ بالتالي منحنى الدالة g يوجد تحت منحنى الدالة f على $[0,1]$.

<u>تمرين19</u>: قارن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين كالتالي :

$g(x)=4x-1$ و $f(x)=4x^2$

واعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

<u>الجواب :</u> $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية

$f(x)-g(x)=4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geq 0$

ومنه : $f\geq g$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى الدالة g على $\mathbb{R}$.

<u>تمرين20</u>: أدرس الوضع النسبي لمنحنى الدالة f و منحنى الدالة g حيث $f(x)=x+\frac{1}{x+1}$ و $g(x)=x$

<u>الجواب :</u> $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ و $D_g=\mathbb{R}$

$f(x)-g(x)=x+\frac{1}{x+1}-x=\frac{1}{x+1}$

ندرس اشارة $x+1$:

<u>الحالة 1</u>: اذاكانت $x>-1$ فان $f\geq g$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى الدالة g على $]-1;+\infty[$.

<u>الحالة2</u>: اذاكانت $x<-1$ فان $g\geq f$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد تحت منحنى الدالة g على $]-\infty;-1[$.

<u>تمرين21</u>: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كالتالي :

$f(x)=x^2-3x+5$ و $g(x)=-x^2+2x+2$

أدرس الوضع النسبي لمنحنى الدالة f و منحنى الدالة g

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$

$f(x)-g(x)=x^2-3x+5-(-x^2+2x+2)=2x^2-5x+3$

ندرس اشارة $2x^2-5x+3$:

$a=2$ و $b=-5$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times3=25-24=1>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان لهذه الحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **و** $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{5+1}{2\times2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ **و** $x_2=\frac{5-1}{2\times2}=\frac{4}{4}=1$

x	$-\infty$		1		3/2		$+\infty$
$2x2-5x+3$		+	0	−	0	+	

الحالة 1:اذاكانت $x\geq3/2$ أو $x\leq1$ فان $f\geq g$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى الدالة g على $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[\cup\left]-\infty,1\right]$.

الحالة2:اذاكانت $1\leq x\leq\frac{3}{2}$ فان $g\geq f$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد تحت منحنى الدالة g على $\left[1,\frac{3}{2}\right]$.

تمرين22: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=x+1$ و $g(x)=x^2$

حدد : $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ و

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$ ماذا تلاحظ ؟

الجواب: $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)=(x+1)^2=x^2+2x+1$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=x^2+1$

نلاحظ: $g\circ f\neq f\circ g$

تمرين23: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=-x+1$ و $g(x)=x^3-x$ حدد $(g\circ f)(x)$

الجواب: $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-x+1)=(-x+1)^3-(-x+1)$

$(g\circ f)(x)=(1-x)^3-(-x+1)=1^3-3\times1\times x+3\times1\times x^2-x^3+x-1$

$(g\circ f)(x)=1^3-3x+3x^2-x^3+x-1=-x^3+3x^2-2x$

تمرين24: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=x-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$

حدد : D_f و D_g و $D_{g\circ f}$ ثم أحسب $(g\circ f)(x)$ $\forall x\in D_{g\circ f}$

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x\geq0\}=[0,+\infty[$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R} \text{ و } f(x)\in[0,+\infty[\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R} \text{ و } x+1\in[0,+\infty[\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq-1\}\Leftrightarrow D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x+1\geq0\}$

$D_{g\circ f}=[-1;+\infty[$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-1)=\sqrt{x-1}$

تمرين25: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=x-3$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$

حدد : D_f و D_g و $D_{g\circ f}$ ثم أحسب $(g\circ f)(x)$ $\forall x\in D_{g\circ f}$

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$

و $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+1\geq0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq-1\}=[-1,+\infty[$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R} \text{ و } f(x)\in[1,+\infty[\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x-3\in[-1,+\infty[\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq2\}\Leftrightarrow D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x-3\geq-1\}$

$D_{g\circ f}=[2;+\infty[$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-3)=\sqrt{x-3+1}=\sqrt{x-2}$

تمرين26: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=4x-3$ و $g(x)=-3x+2$

أدرس رتابة f و g

أجوبة : (1 $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

ليكن : $x_1\in\mathbb{R}$ و $x_2\in\mathbb{R}$ بحيث $x_1<x_2$

اذن : $4x_1<4x_2$ اذن : $4x_1-3<4x_2-3$

اذن : $f(x_1)<f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

(2 $D_g=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

ليكن : $x_1\in\mathbb{R}$ و $x_2\in\mathbb{R}$ بحيث $x_1<x_2$

اذن : $-3x_1>-3x_2$ اذن : $-3x_1+2>-3x_2+2$ اذن :

$g(x_1)>g(x_2)$

ومنه الدالة g تناقصية على $\mathbb{R}$

تمرين27: لتكن f الدالة العددية المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2$

1)حدد D_f

2) أدرس رتابة f على كل من المجالين : $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0]$

3)حدد جدول تغيرات

أجوبة : (1 $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) أ) دراسة رتابة الدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

ليكن : $x_1\in[0;+\infty[$ و $x_2\in[0;+\infty[$ بحيث $x_1<x_2$

اذن: $x_1^2<x_2^2$ ومنه $2x_1^2<2x_2^2$ أي $f(x_1)<f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $[0;+\infty[$

ب) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]-\infty;0]$:

ليكن : $x_1\in]-\infty;0]$ و $x_2\in]-\infty;0]$ بحيث $x_1<x_2$

اذن: $x_1^2>x_2^2$ ومنه $2x_1^2>2x_2^2$ أي $f(x_1)>f(x_2)$

ومنه الدالة f تناقصية على $]-\infty;0]$

3)حدد جدول تغيرات الدالة f .

تمرين28: لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x+2}$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2) أدرس رتابة الدالة f على D_f وحدد جدول تغيرات f

3) أنشئ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

الجواب: (1 $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\}=[-2,+\infty[$

2) ليكن : $x_1\in[-2;+\infty[$ و $x_2\in[-2;+\infty[$ بحيث $x_1<x_2$

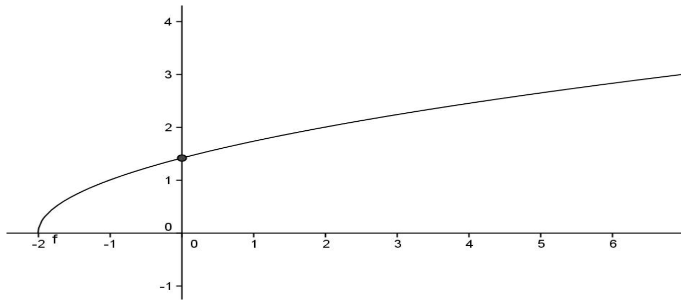
اذن: $x_1+2<x_2+2$ ومنه $\sqrt{x_1+2}<\sqrt{x_2+2}$ أي $f(x_1)<f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $[-2;+\infty[$

x	-2	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

(3

x	-2	-1	0	2	7
$f(x)$	**0**	**1**	$\sqrt{2}$	**2**	**3**



« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

تمرين29: لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^3$$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2) بين أن الدالة f تناقصية قطعا على D_f و حدد جدول تغيرات f

3) أنشئ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

الجواب: (1 $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) ليكن : $x_1\in\mathbb{R}$ و $x_2\in\mathbb{R}$ بحيث $x_1<x_2$

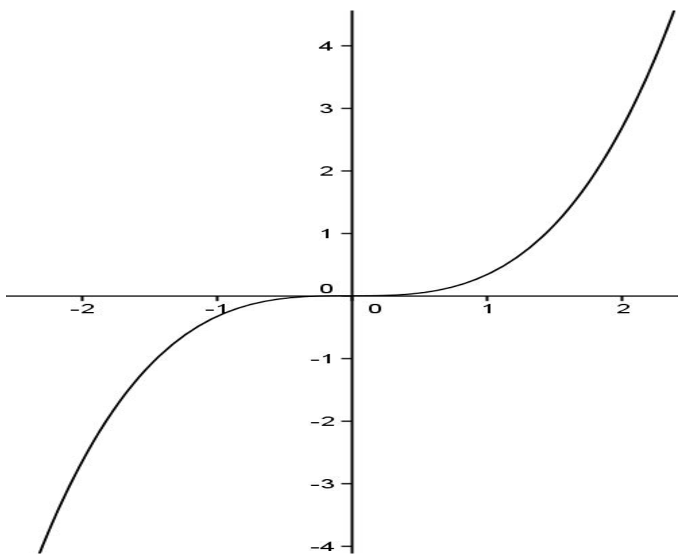
اذن: $x_1^3<x_2^3$ ومنه $\frac{1}{4}\times x_1^3<\frac{1}{4}\times x_2^3$ أي $f(x_1)<f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

(3

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	**6.5**	**-2**	**-1/4**	**0**	**1/4**	**2**	**6.5**



تمرين1: لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى

1) بين أنه توجد نقطة G بحيث : $4\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ (E)

2) أنشئ النقطة G

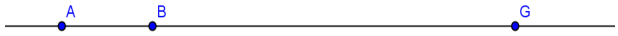
الأجوبة: 1)نلاحظ أن : $4+(-5)\neq 0$

$4\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ يعني $4\overrightarrow{GA}-5(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$ (استعمال علاقة شال)

يعني $4\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ يعني $-\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ يعني $\overrightarrow{AG}=5\overrightarrow{AB}$

اذن توجد نقطة وحيدة G على المستقيم (AB) تحقق (E)

(2



تمرين2: لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى

هل توجد نقطة G بحيث : $2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

الجواب : نلاحظ أن : $2-2=0$

$2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ يعني $2\overrightarrow{GA}-2(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$ (استعمال علاقة شال)

يعني $2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ يعني $2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ و هذا غير ممكن

اذن لا توجد نقطة G تحقق (E)

ملاحظة1: اذا كانت $a+b=0$ فان النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$ ليس لهم مرجح

ملاحظة2: اذا كانت النقطة G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$ **فان :** $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ ❶ (استعمال علاقة شال) و هذه الكتابة تستعمل لرسم النقطة G

تمرين3: أنشئ G مرجح النقطتين $(A;-2)$ و $(B;3)$ ثم أنشئ G' مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(B;1)$

1. أحسب $\overrightarrow{GG'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

الأجوبة: 1)لدينا G مرجح النقطتين $(A;-2)$ و $(B;3)$ باستعمال العلاقة ① نجد :

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{(-2)+3}\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$ ②

ولدينا G' مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(B;1)$ وباستعمال العلاقة ① نجد

$\overrightarrow{AG'}=\dfrac{1}{1+2}\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AG'}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ③

2)اذن : $\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AG'}=-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG'}=-3\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\left(-3+\dfrac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}=-\dfrac{8}{3}\overrightarrow{AB}$

تمرين4: أنشئ G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;-0{,}003)$ و $(B;-0{,}001)$ حيث $A\neq B$

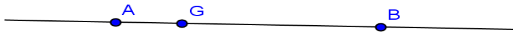
الجواب: G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;-0{,}003)$ و $(B;-0{,}001)$

يعني $-0{,}003\overrightarrow{GA}-0{,}001\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ نضرب طرفي المتساوية في نفس العدد : $k=1000$

يعني $-\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ يعني G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;-3)$ و $(B;-1)$

وباستعمال العلاقة ① نجد: $\overrightarrow{AG}=\dfrac{-1}{(-1)+(-3)}\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

ومنه الرسم:



تمرين5: ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\sqrt{8})$ و $(B;-\sqrt{2})$

بين أن G مرجح النقطتين : $(A;-2)$ و $(B;1)$

الجواب: حسب خاصية الصمود نضرب وزني النقطتين في نفس العدد الحقيقي

و المرجح لا يتغير نأخذ : $k=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

اذن : G مرجح النقطتين: $\left(A;-\sqrt{8}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ و $\left(B;-\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

أي : $(A;-2)$ و $(B;1)$ نلاحظ أن : $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

تمرين6: ليكن E و F نقطتين من المستوى بحيث: $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EF}$ و $E\notin(AB)$.

1)بين أن : G مرجح النقطتين المتزنتين $(E;-1)$ و $(F;2)$

2)استنتج أن المستقيمين (EF) و (AB) يتقاطعان محددا نقطة تقاطعهما.

الأجوبة: 1) $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EF}$ يعني

$\overrightarrow{EG}=2(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF})$ (استعمال علاقة شال)

يعني $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EG}+2\overrightarrow{GF}$ يعني $\overrightarrow{EG}-2\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{GF}$

يعني $-1\overrightarrow{EG}-2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$

يعني $\overrightarrow{EG}+2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$ يعني $-\overrightarrow{GE}+2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$ يعني G مرجح النقطتين المتزنتين $(E;-1)$ و $(F;2)$

2)لدينا G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;2)$ و $(B;-3)$

اذن : $G\in(AB)$

و لدينا G مرجح النقطتين المتزنتين $(E;-1)$ و $(F;2)$

اذن : $G\in(EF)$

اذن المستقيمين (AB) و (EF) لديهم نقطة مشتركة

وغير منطبقين (لأن : $E\notin(AB)$)

وبالتالي : المستقيمين (EF) و (AB) يتقاطعان

و G هي نقطة تقاطعهما.

تمرين7: لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى.

ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$ و G مرجح النقطتين $(A;3)$ و $(B;-5)$

حدد مجموعة النقط G من المستوى P بحيث :

$\left\|3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$

الجواب: $\|3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|$

G مرجح النقطتين $(A;3)$ و $(B;-5)$

اذن حسب الخاصية المميزة للمرجح فان :

$3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}=(3+(-5))\overrightarrow{MG}=-2\overrightarrow{MG}$

و لدينا $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$

وبما أن : I منتصف القطعة $[AB]$

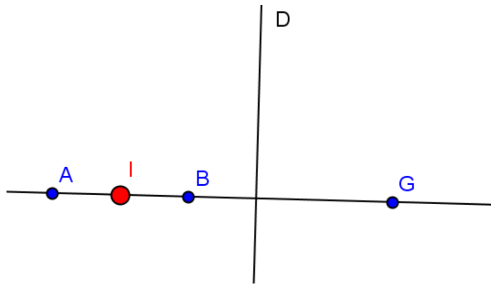
فان : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ منه : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

$|-2|\|\overrightarrow{MG}\|=|2|\|\overrightarrow{MI}\|$ يعني $\|-2\overrightarrow{MG}\|=\|2\overrightarrow{MI}\|$

يعني $\|3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|$

يعني $2MG=2MI$ يعني $MG=MI$

ومنه مجموعة النقط هي واسط القطعة $[GI]$



تمرين8: نعتبر النقطتين : $A(1;2)$ و $B(-4;6)$ و ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;2)$ و $(B;-1)$

أحسب إحداثيتي G

الجواب: $\begin{cases} x_G=\frac{2\times1+(-1)\times(-4)}{2+(-1)}=\frac{6}{1}=6 \\ y_G=\frac{2\times2+(-1)\times6}{2+(-1)}=\frac{-2}{1}=-2 \end{cases}$ اذن : $G(6;-2)$

تمرين9: في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i}.\vec{j})$ نعتبر النقطتين : $A(-2;5)$ و $B(2;1)$ و ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;1)$ و $(B;3)$

1) أحسب إحداثيتي G

2) حدد إحداثيتي النقطة H بحيث G مرجح النقطتين المتزنتين $(H;1)$ و $(O;3)$

3) بين أن : المستقيمين (AH) و (OB) متوازيان.

الأجوبة: 1) $\begin{cases} x_G=\frac{1\times(-2)+3\times2}{3+1}=\frac{4}{4}=1 \\ y_G=\frac{1\times5+3\times1}{3+1}=\frac{8}{4}=2 \end{cases}$ اذن : $G(1;2)$

2) **طريقة1:** G مرجح النقطتين المتزنتين $(H;1)$ و $(O;3)$ يعني :

$\begin{cases} x_G=\frac{1\times x_H+3\times x_O}{3+1}=1 \\ y_G=\frac{1\times y_H+3\times y_O}{3+1}=2 \end{cases}$

لدينا $O(0;0)$ يعني : $\begin{cases} \frac{x_H}{4}=1 \\ \frac{y_H}{4}=2 \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} x_H=4 \\ y_H=8 \end{cases}$ اذن : $H(4;8)$

طريقة2: G مرجح النقطتين المتزنتين $(H;1)$ و $(O;3)$ يعني :

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OH}$

$\overrightarrow{OG}(1;2)$ و $\frac{1}{4}\overrightarrow{OH}\left(\frac{1}{4}x_H;\frac{1}{4}y_H\right)$

يعني $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OH}$ يعني $\begin{cases} \frac{x_H}{4}=1 \\ \frac{y_H}{4}=2 \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} x_H=4 \\ y_H=8 \end{cases}$ اذن : $H(4;8)$

3) $\overrightarrow{AH}(6;2)$ و $\overrightarrow{OB}(6;2)$ اذن : نلاحظ أن : $\overrightarrow{AH}=3\overrightarrow{OB}$

ومنه المستقيمين (AH) و (OB) متوازيان لأن المتجهتين : $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{OB}$ مستقيميتان

تمرين10: في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i}.\vec{j})$ نعتبر النقطتين : $A(0;5)$ و $B(3;2)$ و ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;1)$ و $(B;2)$

1) أحسب إحداثيتي G

2) حدد و أرسم مجموعة النقط M من المستوى P بحيث :

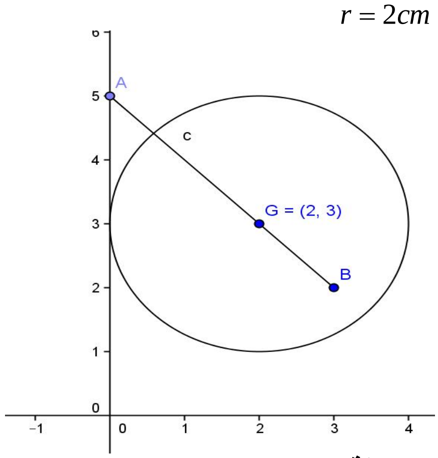
$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|=6$

الأجوبة: 1) $\begin{cases} x_G=\frac{0+6}{3}=2 \\ y_G=\frac{5+4}{3}=3 \end{cases}$ اذن : $G(2;3)$

2) $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|=6cm$ يعني $\|3\overrightarrow{MG}\|=6cm$ حسب الخاصية المميزة للمرجح

يعني $|3|\|\overrightarrow{MG}\|=6cm$ يعني $3MG=6cm$ يعني $MG=2cm$

ومنه مجموعة النقط هي الدائرة (C) التي مركزها G وشعاعها $r=2cm$



ملاحظة: اذاكان: G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ بحيث $a+b+c\neq0$ فإن : $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$ ®

و هذه العلاقة تمكننا من رسم النقطة G

تمرين11: ليكن ABC مثلثا و G نقطة بحيث :

$2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}$

بين أن : G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$

و أنشئ النقطة G

الجواب: $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}$ يعني $2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

يعني $2(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC})-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

يعني $-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

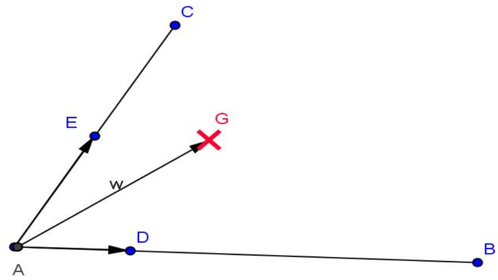
يعني $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

ومنه : G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$

وحسب العلاقة ® فان : $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

أي : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{4}\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

ومنه رسم G



تمرين12: لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى. و G مرجح النقط المتزنة $(A;2)$ و $(B;-1)$ و $(C;1)$

حدد المجموعة: $E=\left\{M\in P/\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6cm\right\}$

حيث P هو المستوى.

الجواب : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6cm$ يعني $\left\|2\overrightarrow{MG}\right\|=6cm$

حسب الخاصية المميزة للمرجح

يعني $|2|\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=6cm$ يعني $2MG=6cm$ يعني $MG=3cm$

ومنه مجموعة النقط هي الدائرة (C) التي مركزها G وشعاعها

$r=3cm$

تمرين13: ليكن G مركز ثقل المثلث ABC و I منتصف القطعة $[BC]$ بين أن G مرجح النقطتين $(A;1)$ و $(I;2)$

الجواب : G مركز ثقل المثلث ABC يعني G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$

I منتصف القطعة $[BC]$ يعني : I مرجح النقطتين $(B;1)$ و $(C;1)$

وحسب خاصية تجميعية المرجح فان :

G هو مرجح النقطتين : $(A;1)$ و $(I;1+1)$

تمرين14: لتكن A و B و C و D ثلاث نقط من المستوى

حدد مجموعة النقط من المستوى بحيث :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}-5\overrightarrow{MD}\right\|=5cm$$

تمرين15: في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط : $A(-1;1)$ و $B(0;2)$ و $C(1;-1)$ و $D(1;0)$

1) حدد إحداثيتي K مرجح النقطتين المتزنتين $(A;2)$ و $(B;3)$

2) حدد إحداثيتي L مركز ثقل المثلث ABC

3) حدد إحداثيتي G مرجح النقط : $(A;2)$ و $(B;3)$ و $(C;1)$ و $(D;-1)$

الأجوبة : 1) $\begin{cases} x_K=\dfrac{-2+0}{5}==\dfrac{-2}{5} \\ y_K=\dfrac{2+6}{5}=\dfrac{8}{5}\end{cases}$ اذن : $K\left(-\dfrac{2}{5};\dfrac{8}{5}\right)$

2) L مركز ثقل المثلث ABC يعني

L مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$

ومنه : $\begin{cases} x_L=\dfrac{1x_A+1x_B+1x_C}{1+1+1} \\ y_L=\dfrac{1y_A+1y_B+1y_C}{1+1+1}\end{cases}$ يعني $\begin{cases} x_L=\dfrac{1\times(-1)+1\times0+1\times1}{1+1+1}=0 \\ y_L=\dfrac{1\times1+1\times2+1\times(-1)}{1+1+1}=\dfrac{2}{3}\end{cases}$ اذن : $L\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$

3) $\begin{cases} x_G=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C+dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G=\dfrac{ay_A+by_B+cy_C+dy_D}{a+b+c+d}\end{cases}$

يعني $\begin{cases} x_G=\dfrac{2\times x_A+3\times x_B+1\times x_C+(-1)\times x_D}{5}=\dfrac{-2}{5} \\ y_G=\dfrac{2\times y_A+3\times y_B+1\times y_C+(-1)\times y_D}{5}=\dfrac{7}{5}\end{cases}$ اذن : $G\left(-\dfrac{2}{5};\dfrac{7}{5}\right)$

تمرين16: لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى.

و M من المستوى P بحيث : $\vec{V}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$

1) بين أن $\vec{V}$ متجهة غير مرتبطة بالنقطة M

2) لتكن : K مرجح النقطتين المتزنتين $(B;1)$ و $(C;-3)$

بين أن : $\vec{V}=2\overrightarrow{KA}$

3) ليكن: G مرجح النقط المتزنة $(A;2)$ و $(B;-1)$ و $(C;-3)$

أ)بين أن : $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{GM}$ لكل نقطة M من المستوى

ب)استنتج مجموعة النقط M من المستوى بحيث :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$$

الأجوبة : 1) $\vec{V}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$

ومنه $\vec{V}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ ومنه $\vec{V}$ متجهة غير مرتبطة بالنقطة M

2)وجدنا : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

مهما تكن M من المستوى

يمكننا مثلا وضع : $M=K$ ونجد : $2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

ونعلم أن : K مرجح النقطتين المتزنتين $(B;1)$ و $(C;-3)$ اذن :

$\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

ومنه نجد : $2\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ أي : $2\overrightarrow{KA}=\vec{V}$

3)أ) حسب الخاصية المميزة للمرجح :

$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\left(2+(-1)+(-3)\right)\overrightarrow{MG}=-2\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{GM}$

3)ب) $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$ تعني $\left\|2\overrightarrow{GM}\right\|=\left\|2\overrightarrow{KA}\right\|$

تعني $2GM=2KA$ تعني $GM=KA$

ومنه مجموعة النقط هي الدائرة (C) التي مركزها G وشعاعها

$r=KA$

تمرين17: ليكن ABC مثلثا و B' مرجح النقطتين $(A;-2)$ و $(C;1)$ ثم A' مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(B;-3)$

و C' مرجح النقطتين $(C;-1)$ و $(B;3)$

1) بين أن : $\overrightarrow{AB'}=-\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AA'}=3\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC'}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

2) بين أن : $\overrightarrow{B'A'}+2\overrightarrow{A'C'}=\vec{0}$

3) استنتج أنه مهما تكن M نقطة من المستوى فان :

$-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=\vec{0}$

4) استنتج أن النقط A' و B' و C' مستقيمية.

الأجوبة: 1) B' مرجح النقطتين $(A;-2)$ و $(C;1)$

اذن : $\overrightarrow{AB'}=\dfrac{1}{1+(-2)}\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AC}$

A' مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(B;-3)$ اذن : $\overrightarrow{AA'}=\dfrac{-3}{-3+2}\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}$

C' مرجح النقطتين $(C;-1)$ و $(B;3)$ يعني $\overrightarrow{BC'}=\dfrac{-1}{3+(-1)}\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

2)

$\overrightarrow{B'A'}+2\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{AA'}+2\left(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BC'}\right)=\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AB'}+2\overrightarrow{BC'}-2\overrightarrow{BA'}$

$\overrightarrow{B'A'}+2\overrightarrow{A'C'}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-2\times\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}-2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}\right)$

$\overrightarrow{B'A'}+2\overrightarrow{A'C'}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{B'A'}+2\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$

3) $-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=-\overrightarrow{MA'}-\left(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'B'}\right)+2\left(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'C'}\right)$

$-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=-\overrightarrow{A'B'}+2\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{B'A'}+2\overrightarrow{A'C'}=\vec{0}$

4)وجدنا أن : مهما تكن M نقطة من المستوى

فان : $-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=\vec{0}$

بوضع مثلا : $M=A'$

نجد : $-\overline{A'A'}-\overline{A'B'}+2\overline{A'C'}=\vec{0}$ يعني $2\overline{A'C'}=\overline{A'B'}$

وهذا يعني أن : النقط A' و B' و C' مستقيمية.

تمرين18: ليكن I مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(C;1)$ و J مرجح النقطتين $(A;1)$ و $(B;2)$ و K مرجح النقطتين $(C;1)$ و $(B;-4)$

1) أنشئ النقط I و J و K

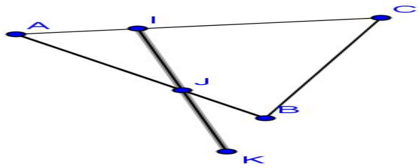
2) أثبت أن B مرجح النقطتين $(K;3)$ و $(C;1)$

3) بين أن J منتصف $[KI]$

الأجوبة : 1) I مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(C;1)$ اذن : $\overline{AI}=\frac{1}{3}\overline{AC}$

J مرجح النقطتين $(A;1)$ و $(B;2)$ اذن : $\overline{AJ}=\frac{2}{3}\overline{AB}$

K مرجح النقطتين $(C;1)$ و $(B;-4)$ اذن : $\overline{BK}=-\frac{1}{3}\overline{BC}$



2) يكفي أن نبين أن : $3\overline{BK}+1\overline{BC}=\vec{0}$ ؟؟؟؟؟

بما أن لدينا : $\overline{BK}=-\frac{1}{3}\overline{BC}$ يعني $3\overline{BK}=-\overline{BC}$

يعني $3\overline{BK}+\overline{BC}=\vec{0}$

3) يكفي أن نبين أن : $\overline{JK}=\overline{IJ}$ ؟؟؟؟؟

لدينا: $\overline{AI}=\frac{1}{3}\overline{AC}$ و $\overline{AI}=\frac{2}{3}\overline{AB}$

اذن : $\overline{IJ}=\overline{AJ}-\overline{AI}=\frac{2}{3}\overline{AB}-\frac{1}{3}\overline{AC}=\frac{1}{3}(2\overline{AB}-\overline{AC})$ ❶

لدينا :

$$\overline{JK}=\overline{JA}+\overline{AB}+\overline{BK}=\frac{2}{3}\overline{AB}+\overline{AB}-\frac{1}{3}\overline{BC}=\frac{1}{3}(\overline{AB}+\overline{CB})$$

❷ $\overline{JK}=\frac{1}{3}(\overline{AB}+\overline{CA}+\overline{AB})=\frac{1}{3}(2\overline{AB}-\overline{AC})$

من : ❶ و ❷ نجد أن : $\overline{IJ}=\overline{JK}$ ومنه : J منتصف $[KI]$

حظ سعيد

« c’est en forgeant que l’on devient forgeron » dit un proverbe.
c’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien

تمرين1: نعتبر المتجهات

$\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$ و $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$ و $\vec{w}=5\vec{i}+3\vec{j}$.

أحسب الجداءات السلمية التالية : $\vec{u}.\vec{v}$ و $\vec{v}.\vec{w}$ و $\vec{u}.\vec{w}$

الجواب : $\vec{u}.\vec{v}=1\times2+2\times(-1)=0$ اذن : $\vec{u}\perp\vec{v}$

$\vec{v}.\vec{w}=2\times5+3\times(-1)=7$ و $\vec{u}.\vec{w}=1\times5+3\times2=11$

تمرين2: حدد قيمة العدد الحقيقي m لكي تكون المتجهتان $\vec{u}(3;-1+m)$ و $\vec{v}(2-m;5)$ متعامدتين

الجواب : $\vec{u}\perp\vec{v}$ يعني $\vec{u}.\vec{v}=0$ يعني $3(2-m)+5\times(-1+m)=0$

$6-3m-5+5m=0$ يعني $2m+1=0$ يعني $m=-\frac{1}{2}$

تمرين3: حدد قيمة العدد الحقيقي m لكي تكون المتجهتان $\vec{u}(-1+m;2)$ و $\vec{v}\left(2-m;\frac{1}{2}\right)$ متعامدتين

الجواب: $\vec{u}\perp\vec{v}$ يعني $\vec{u}.\vec{v}=0$ يعني $(-1+m)(2-m)+2\times\frac{1}{2}=0$

$-2+m+2m-m^2+1=0$ يعني $-m^2+3m-1=0$

يعني $m^2-3m+1=0$ نحسب مميز المعادلة ونجد :

$\Delta=5$ ومنه للمعادلة حلين هما : $m_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ و $m_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

تمرين4: نعتبر في المستوى النقط التالية :

$A(-1;3)$ $B(3;\sqrt{5})$ و $C(2;-3)$ والمتجهة $\vec{u}(\sqrt{5};-2)$

1)أحسب AC و $\|\vec{u}\|$ 2)أحسب : $\vec{AB}\bullet\vec{CB}$

3) ماذا تستنتج بالنسبة للمثلث ABC

الأجوبة :

(1

$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(2+1)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(-2)^2}=\sqrt{5+4}=\sqrt{9}=3$

(2 $\vec{AB}(3-(-1);\sqrt{5}-3)$ يعني $\vec{AB}(4;\sqrt{5}-3)$

$\vec{CB}(3-2;\sqrt{5}+3)$ يعني $\vec{CB}(1;\sqrt{5}+3)$

$\vec{AB}\bullet\vec{CB}=1\times4+(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3)=4+\left((\sqrt{5})^2-3^2\right)=0$

3)نستنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية في B

تمرين5: نعتبر في المستوى النقط التالية : $A(3;2)$ $B\left(-\frac{1}{2};0\right)$

و $C(-1;-4)$ و $D\left(\frac{5}{2};-2\right)$ و $E(1;-1)$

1)بين أن المثلث ABE قائم الزاوية في النقطة E

2)بين أن الرباعي $ABCD$ معين

(يكفي أن نبين أن $ABCD$ متوازي الأضلاع وضلعين متتابعين متقايسين أو نبين أن القطرين متعامدين)

الأجوبة: 1) يكفي أن نبين أن $\vec{AE}\perp\vec{EB}$ أي نبين أن : $\vec{AE}\bullet\vec{EB}=0$

$\vec{AE}(-2;-3)$ و $\vec{EB}\left(-\frac{3}{2};1\right)$

$\vec{AE}\bullet\vec{EB}=3-3=0$ ومنه $\vec{AE}\perp\vec{EB}$ أي ABE قائم الزاوية في النقطة E

2) **طريقة1:** نبين أن $ABCD$ متوازي الأضلاع وضلعين متتابعين متقايسين

لدينا : $\vec{DC}\left(-\frac{7}{2};-2\right)$ و $\vec{AB}\left(-\frac{7}{2};-2\right)$ اذن : $\vec{AB}=\vec{DC}$

ومنه : $ABCD$ متوازي الأضلاع

ولدينا كذلك : $AC=\sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2+(1-1)^2}=\sqrt{\frac{49}{4}+4}=\sqrt{\frac{65}{4}}$

و $BC=\sqrt{\frac{1}{4}+16}=\sqrt{\frac{65}{4}}$ اذن: $AB=BC$ ومنه : $ABCD$ معين

طريقة2: نبين أن القطرين متعامدين

لدينا : $\vec{AC}(-4;-6)$ و $\vec{BD}(3;-2)$

اذن : $\vec{AC}\bullet\vec{BD}=-12+12=0$

ومنه : $\vec{AC}\perp\vec{BD}$ وبالتالي: $ABCD$ معين

تمرين6: نعتبر في المستوى المتجهي المتجهتين التاليتين :

$\vec{u}(-1;-1)$ و $\vec{v}(-2;0)$

1)أحسب : $\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ و $\sin\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$

2)استنتج قياسا للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$

الأجوبة:

(1 $\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

$\sin\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)=\frac{-2}{\sqrt{2}\times2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\sin\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)=\frac{\begin{vmatrix}-1&-2\\-1&0\end{vmatrix}}{\sqrt{2}\times2}$

2)لدينا $\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$ و $\sin\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sin\frac{\pi}{4}=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

ومنه $-\frac{\pi}{4}$ هو قياس للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$

تمرين7: نعتبر في المستوى النقط التالية :

$A(3;3)$ و $B(1;1)$ و $C(1;3)$

1)أحسب : $\cos\left(\widehat{\vec{AB};\vec{AC}}\right)$ و $\sin\left(\widehat{\vec{AB};\vec{AC}}\right)$

2)استنتج قياسا للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\vec{AB};\vec{AC}}\right)$

الأجوبة : (1 $\cos\left(\widehat{\vec{AB};\vec{AC}}\right)=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\|\vec{AB}\|\times\|\vec{AC}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

$\vec{AB}(-2,-2)$ و $\vec{AC}(-2,0)$ ومنه : $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=4$

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}=\dfrac{4}{\sqrt{8}\times\sqrt{4}}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}\times 2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\dfrac{-4}{2\sqrt{2}\times 2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\dfrac{\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix}}{2\sqrt{2}\times 2}$

2) لدينا $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{4}$

و $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\sin\dfrac{\pi}{4}=\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

ومنه $-\dfrac{\pi}{4}$ هو قياس للزاوية الموجهة $\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}$

تمرين8: نعتبر في المستوى النقط التالية :

$A(4;1)$ $B(0;5)$ و $C(-2;-1)$

1) أحسب المسافات: AB و AC و BC

ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

2) أحسب : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$

3) استنتج أن : $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

4) أحسب $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ و استنتج أن : $\sin\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

الأجوبة:

1) $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-4)^2+(4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(-6)^2+(-2)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

ومنه : $AC=BC$ ومنه ABC متساوي الساقين

2) $\overrightarrow{AB}(-4,4)$ و $\overrightarrow{AC}(-6,-2)$ ومنه : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=24-8=16$

3) $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}=\dfrac{16}{\sqrt{32}\times\sqrt{40}}=\dfrac{16}{4\sqrt{2}\times2\sqrt{10}}=\dfrac{2}{\sqrt{20}}=\dfrac{2\sqrt{20}}{20}=\dfrac{\sqrt{20}}{10}$

4) $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}-4 & -6\\ 4 & -2\end{vmatrix}=32$

$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\dfrac{32}{8\sqrt{20}}=\dfrac{32\sqrt{20}}{160}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\Leftrightarrow\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\dfrac{\begin{vmatrix}-4 & -6\\ 4 & -2\end{vmatrix}}{8\sqrt{20}}$

تمرين9: أعط متجهة منظميه على المستقيم (D) في كل حالة من الحالات التالية :

1) $(D): x-2y+5=0$ 2) $(D): x-1=0$

3) $(D): 2y-3=0$

الأجوبة : متجهة منظمية على المستقيم (D) $ax+by+c=0$ هي : $\vec{n}(a;b)$

1) $(D): x-2y+5=0$ $\vec{n}(2;1)$ متجهة منظميه على (D)

2) $(D): 0x+2y-3=0$ $\vec{n}(-2;0)$ متجهة منظميه على (D)

3) $(D): 1x+0y-1=0$ $\vec{n}(0;1)$ متجهة منظميه على (D)

تمرين10: حدد معادلة المستقيم (D) المار من النقطة $A(1;2)$ و $\vec{n}(2;-3)$ متجهة منظميه عليه

الجواب: (هناك طريقتين يمكن استعمالهما)

طريقة1: $\overrightarrow{AM}\bullet\vec{n}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

لدينا $\overrightarrow{AM}(x-1,y-2)$ و $\vec{n}(2;-3)$

$\Leftrightarrow 2(x-1)-3(y-2)=0\Leftrightarrow (D)/2x-3y+4=0$

طريقة2: نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظميه عليه

نعلم أن : $\vec{n}(2;-3)$ متجهة منظميه على (D)

اذن: $a=2;b=-3$ ومنه المعادلة تصبح : $(D)/2x-3y+c=0$

ونعلم أن : $A(1;2)\in(D)$ اذن احداثياته تحقق المعادلة يعني :

$2\times1-3\times2+c=0$ يعني $c=4$ ومنه : $(D)/2x-3y+4=0$

تمرين11: نعتبر في المستوى النقط التالية :

$A(1;2)$ و $B(-2;3)$ و $C(0;4)$

1. حدد معادلة المستقيم (D) واسط القطعة $[AB]$
2. حدد معادلة (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة A

الجواب: 1) واسط القطعة $[AB]$ هو مستقيم عمودي

على (AB) ويمر من I منتصف القطعة $[AB]$

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{AB}(a,b)$ متجهة منظميه على (D)

ولدينا : $\overrightarrow{AB}(-3,1)$ متجهة منظميه على (D) اذن : $a=-3;b=1$

ومنه المعادلة تصبح : $(D)/-3x+y+c=0$

ونعلم أن : $I\in(D)$ علينا أولا حساب احداثيات I

$I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$ يعني $I\left(\dfrac{-1}{2},\dfrac{5}{2}\right)$

$I\in(D)$ اذن احداثيات I تحقق المعادلة يعني :

$-3\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{5}{2}+c=0\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}+c=0\Leftrightarrow c=-4$ ومنه : $(D)/-3x+y-4=0$

2) (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة A

يعني (Δ) عمودي على (BC) ويمر من A

ومنه : $\overrightarrow{BC}(2,1)$ متجهة منظميه على (Δ)

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{BC}(a,b)$ متجهة منظميه على (Δ)

اذن : $a=2;b=1$ ومنه المعادلة تصبح : $(\Delta)/2x+y+c=0$

ونعلم أن : $A\in(\Delta)$ اذن احداثيات A تحقق المعادلة يعني :

$2\times1+2+c=0\Leftrightarrow c=-4$ ومنه : $(\Delta)/2x+y-4=0$

تمرين12: نعتبر في المستوى النقط التالية :

$A(1;1)$ و $B(-2;0)$ و $C(3;5)$

1. حدد معادلة المستقيم (D) واسط القطعة $[AC]$
2. حدد معادلة (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة C

الجواب: 1) واسط القطعة $[AC]$ هو مستقيم عمودي

على (AC) ويمر من I منتصف القطعة $[AC]$

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{AC}(a,b)$ متجهة منظميه على (D)

ولدينا : $\overrightarrow{AC}(2,4)$ متجهة منظميه على (D) اذن : $a=2;b=4$

ومنه المعادلة تصبح : $(D)/2x+4y+c=0$

ونعلم أن : $I\in(D)$ علينا أولا حساب احداثيات I

يعني $I\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)$ يعني $I(2,3)$

$I\in(D)$ اذن احداثيات I تحقق المعادلة يعني :

$2\times2+4\times3+c=0 \Leftrightarrow c=-16$

ومنه : $(D)/2x+4y-16=0$

2) (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة C

يعني (Δ) عمودي على على (AB) ويمر من C

ومنه : $\overrightarrow{AB}(-3,-1)$ متجهة منظميه على (Δ)

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{AB}(a,b)$ متجهة منظميه على (Δ)

اذن : $a=-3;b=-1$ ومنه المعادلة تصبح : $(\Delta)/-3x-y+c=0$

ونعلم أن : $C\in(\Delta)$ اذن احداثيات C تحقق المعادلة يعني :

$-9-5+c=0\Leftrightarrow c=14$ ومنه : $(\Delta)/-3x-y+14=0$

تمرين13: نعتبر في المستوى المستقيمين :

$(D):2x+3y-1=0$ و $(D'):\frac{3}{2}x-y+4=0$

هل (D) و (D') متعامدين ؟

الجواب: $\vec{n}(2;3)$ متجهة منظميه على (D)

$\vec{n'}\left(\frac{3}{2};-1\right)$ متجهة منظميه على (D')

$\vec{n}\cdot\vec{n'}=2\times\frac{3}{2}+3\times(-1)=3-3=0$. ومنه $\vec{n}\perp\vec{n'}$

وبالتالي : $(D)\perp(D')$

تمرين14: $(D):x-y+2=0$ و $A(1;4)$ حدد مسافة النقطة A عن المستقيم (D)

الجواب: $d(A;(D))=\frac{|1-4+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

تمرين15: نعتبر في المستوى النقطة: $A(-1;-3)$ و المستقيم (D) الذي معادلته : $x+2y-3=0$

1) أحسب مسافة النقطة A عن المستقيم (D)

2) حدد زوج إحداثيتي النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D)

الجواب: 1) $d(A;(D))=\frac{|-1-6-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$

2) نحدد أولا معادلة ديكارتية للمستقيم (AH):

$\vec{u}(-2,1)$ متجهة موجهة ل (D) $x+2y-3=0$

اذن $\vec{u}(-2,1)$ منظميه على (AH) اذن: $(AH)/-2x+1y+c=0$

ولدينا $A\in(AH)$ اذن : $(-2)\times(-1)-3+c=0$ يعني $c=1$

ومنه : $(AH)/-2x+1y+1=0$

H هي نقطة تقاطع (AH) و(D) اذن احداثيات H هي حلول النظمة :

$\begin{cases}x+2y-3=0\\-2x+y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3\\-2x+y=-1\end{cases}$ نضرب المعادلة الأولى في $\times(-2)$

ونجد : $\begin{cases}2x+4y=6\\-2x+y=-1\end{cases}\Leftrightarrow$ ونجمع المعادلتين ونجد : $x+2y=3$

$y=1\Leftrightarrow 5y=5\Leftrightarrow 2x+4y-2x+y=6-1\Leftrightarrow$

ومنه : $x+2y=3\Leftrightarrow x+2=3\Leftrightarrow x=1$ ومنه $H(1;1)$

تمرين16: نعتبر في المستوى النقطتين: $A(-1;-3)$ و $B(3;2)$

1) حدد معادلة للمستقيم (AB)

2) أحسب مسافة النقطة O عن المستقيم (AB)

3) استنتج مساحة المثلث OAB

4) حدد زوج إحداثيتي النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (AB)

أجوبة : 1) نحدد أولا معادلة ديكارتية للمستقيم (AB):

$\overrightarrow{AB}(4,5)$ متجهة موجهة ل (AB) $\overrightarrow{AB}(-b,a)$ اذن :

$a=5;b=-4$

ومنه : $(AB)/5x-4y+c=0$

ولدينا $A\in(AB)$ اذن : $5\times(-1)-4\times(-3)+c=0$ يعني $c=-7$

ومنه : $(AB)/5x-4y-7=0$

2) لدينا $O(0,0)$ اذن :

$$d(O;(AB))=\frac{|5\times0-4\times0-7|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}}=\frac{|-7|}{\sqrt{41}}=\frac{7}{\sqrt{41}}=\frac{7\sqrt{41}}{41}$$

3) لدينا $d(O;(AB))=OH$ اذن :

$$S_{ABC}=\frac{AB\times OH}{2}=\frac{\sqrt{4^2+(-5)^2}}{2}\times\frac{7}{\sqrt{41}}=\frac{\sqrt{41}}{2}\times\frac{7}{\sqrt{41}}=\frac{7}{2}$$

4) نحدد أولا معادلة ديكارتية للمستقيم (OH):

لدينا $\overrightarrow{AB}(4,5)$ متجهة منظمية على (OH)

اذن: $(OH)/4x+5y+c=0$ و

ولدينا $O\in(OH)$ اذن : $4\times0+5\times0+c=0$ يعني $c=0$

ومنه : $(OH)/4x+5y=0$

H هي نقطة تقاطع (OH) و(AB) اذن احداثيات H هي حلول النظمة :

$\begin{cases}4x+5y=0\\5x-4y=7\end{cases}$ نستعمل طريقة المحددات لحل هذه النظمة :

محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}4&5\\5&-4\end{vmatrix}=-41\neq0$

و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:هو $x=\frac{\begin{vmatrix}0&5\\7&-4\end{vmatrix}}{-41}=\frac{-35}{-41}=\frac{35}{41}$

$y=\frac{\begin{vmatrix}4&0\\5&7\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{28}{-41}=-\frac{28}{41}$ و منه: $H\left(\frac{35}{41};-\frac{28}{41}\right)$

تمرين17: حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $A(-1;-3)$ وشعاعها $R=\sqrt{2}$

الجواب : $(C)\ (x-(-1))^2+(y+3)^2=(\sqrt{2})^2$

يمكننا الاكتفاء بهذه الكتابة

أو النشر فنجد : $(C)\ x^2+y^2+2x+6y+8=0$

تمرين18: حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-2;1)$ وتمر من النقطة $A(1;4)$

الجواب : شعاع هذه الدائرة هو : $R=\Omega A$

$$R=\Omega A=\sqrt{\left(x_A-x_\Omega\right)^2+\left(y_A-y_\Omega\right)^2}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

ومنه معادلة الدائرة هي: $(C)\ \left(x-(-2)\right)^2+(y-1)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2$

يمكننا الاكتفاء بهذه الكتابة

أو النشر فنجد : $(C)\ x^2+y^2+4x-2y-13=0$

وتكتب على الشكل: $x^2+y^2+ax+by+c=0$

تمرين19: حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$ حيث $A(1;3)$ و $B(-1;1)$

الجواب : شعاع هذه الدائرة هو : $R=\frac{AB}{2}$

$$R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{4+4}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

مركز الدائرة (C) هو :منتصف القطعة $[AB]$

أي : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ يعني $I(0,2)$

ومنه معادلة الدائرة هي : $(C)\ (x-0)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$

يعني : $(C)\ x^2+y^2-4y+2=0$

تمرين20: حدد تمثيلا بارا متريا للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;-2)$ وشعاعها $R=\sqrt{2}$

الجواب : تمثيل بارا متري للدائرة (C) هو :

$$\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos\theta\\ y=-2+\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}\quad (\theta\in\mathbb{R})$$ بارا متري حقيقي

تمرين21: حدد مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق النظمة

$$\begin{cases}x=3+\sqrt{3}\cos\theta\\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}\quad \text{حيث}\quad (\theta\in\mathbb{R})$$

الجواب : $\begin{cases}x=3+\sqrt{3}\cos\theta\\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=\sqrt{3}\cos\theta\\ y-1=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{3}\cos\theta\right)^2+\left(\sqrt{3}\sin\theta\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=3\left((\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=\sqrt{3}^2$$

ومنه : مجموعة النقط $M(x;y)$ هي الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(3;1)$ وشعاعها $R=\sqrt{3}$

تمرين22: حدد طبيعة (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق:

1) $(E):\ x^2+y^2-x+3y-4=0$

2) $(E):\ x^2+y^2-6x+2y+10=0$

3) $(E):\ x^2+y^2-4x+5=0$

الأجوبة: 1) $a=-1;b=3;c=-4$

نحسب : $a^2+b^2-4c=(-1)^2+3^2-4\times(-4)=1+9+16=26>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(\frac{1}{2};\frac{-3}{2})$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$

2) $a=-6;b=2;c=10$

نحسب : $a^2+b^2-4c=(-6)^2+2^2-4\times(10)=36+4-40=0$

ومنه: (E) هي عبارة عن النقطة : $\Omega(3;-1)$

3) $a=-4;b=0;c=5$

نحسب : $a^2+b^2-4c=16-20=-4<0$

ومنه: (E) هي المجموعة الفارغة

تمرين23: حدد طبيعة (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق: $(E):\ x^2+y^2+5x-3y+\frac{11}{2}=0$

الجواب : $a=5;b=-3;c=\frac{11}{2}$

نحسب : $a^2+b^2-4c=5^2+(-3)^2-4\times\left(\frac{11}{2}\right)=25+9-22=12>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(-\frac{5}{2};\frac{3}{2})$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{12}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

تمرين24: حدد طبيعة (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق:

1. $(E)\quad x^2+y^2-1=0$
2. $(E)\quad x^2+y^2-2x-6y+6=0$
3. $(E)\quad x^2+y^2-4x-2y+7=0$
4. $(E)\quad x^2+y^2+8y+12=0$

الأجوبة : 1) $x^2+y^2=1\Leftrightarrow x^2+y^2-1=0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $O(0;0)$ وشعاعها : $R=1$

2) $x^2-2x+1+y^2-2\times y+3^2-3^2-1+6=0\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-6y+6=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=4=(2)^2$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(1;3)$ وشعاعها : $R=2$

3) $x^2-4x+4+y^2-2\times y+1-1-4+7=0\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y+7=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=-2$

ومنه : (E) هي المجموعة الفارغة

4) $(x-0)^2+y^2+2\times4\times y+4^2-4^2+12=0\Leftrightarrow x^2+y^2+8y+12=0$

$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y+4)^2=4=(2)^2$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(0;-4)$ وشعاعها : $R=2$

تمرين25: حل مبيانيا المتراجحتين التاليتين :

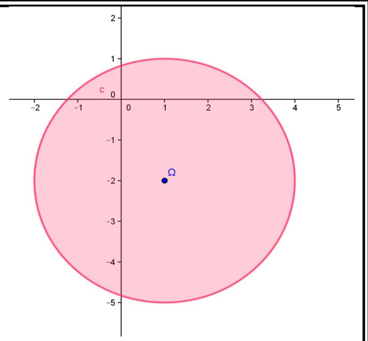
1) $x^2+y^2-2x+4y-4<0$ 2) $x^2+y^2-1>0$

الأجوبة : 1)

$x^2-2x+1-1+y^2+4\times y+4-4-4<0\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+4y-4<0$

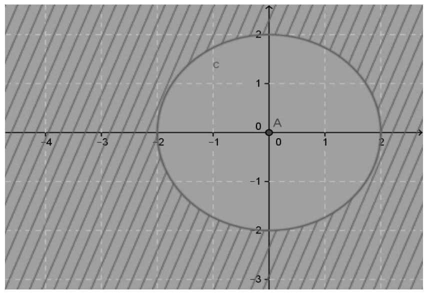
$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2<9=(3)^2$

ومنه : (E) هو داخل الدائرة التي مركزها $\Omega(1;-2)$ وشعاعها $R=3$



2) $(x-0)^2+(y-0)^2>2^2 \Leftrightarrow x^2+y^2>4 \Leftrightarrow x^2+y^2-4>0$

ومنه : (E) هو خارج الدائرة التي مركزها $O(0;0)$ وشعاعها : $R=2$



تمرين26:حل مبيانيا النظمة التالية:

$$\begin{cases} x^2+y^2-1>0 \\ x^2+y^2-4x-12<0 \end{cases}$$

الجواب :

أ) $x^2-4x+4-4+y^2-12<0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-12<0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-0)^2<16=(4)^2$

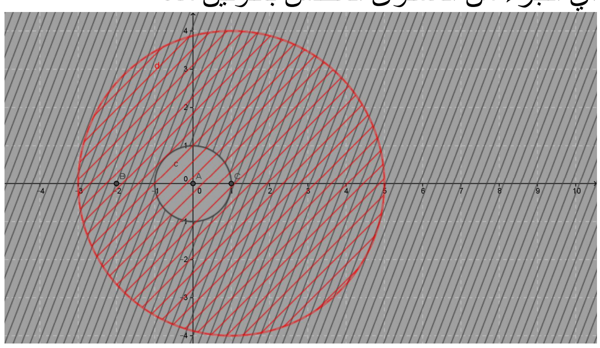
وهذا يعني داخل الدائرة التي مركزها $\Omega(2;0)$ وشعاعها : $R=4$

ب) $(x-0)^2+(y-0)^2>1^2 \Leftrightarrow x^2+y^2>1 \Leftrightarrow x^2+y^2-1>0$

يعني خارج الدائرة التي مركزها $O(0;0)$ وشعاعها : $R=1$

مجموعة حلول النظمة (E) هي أزواج احداثيات نقط المستوى التي تنتمي الى تقاطع داخل الدائرة التي مركزها $\Omega(2;0)$ وشعاعها : $R=4$ و خارج الدائرة التي مركزها $O(0;0)$ وشعاعها : $R=1$

أي الجزء من المستوى المخدش باللونين معا



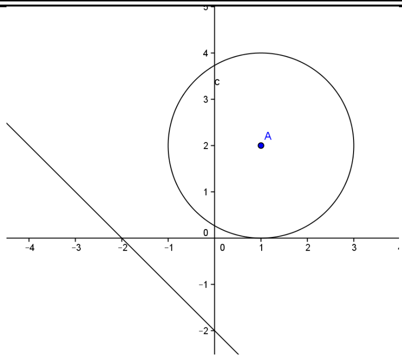
تمرين27: أدرس الوضع النسبي للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;2)$ وشعاعها $R=2$ مع المستقيم (D) الذي معادلته :

$(D):\ x+y+2=0$

الجواب: نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega,(P))=\frac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>R=2$$

ومنه : المستقيم (D) لا يقطع الدائرة (C)



تمرين28: نعتبر الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;2)$ وشعاعها $R=2$ و المستقيم (D) الذي معادلته :

$(D):\ x-y+2=0$

1)بين أن المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

2) حدد احداثيات نقط تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D)

الجواب:1) نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega,(P))=\frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<R=2$$

ومنه : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

2)معادلة الدائرة هي : $(x-1)^2+(y-2)^2=(2)^2$

نحل اذن النظمة التالية :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ (x-1)^2+(y-2)^2=(2)^2 \\ (2)\ x-y+2=0 \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow x+2=y$ نعوض في المعادلة (1) $x+2=y$ فنجد :

يعني : $(1)\ (x-1)^2+(x+2-2)^2=(2)^2$ يعني : $(x-1)^2+(x)^2=4$

يعني : $x^2-2x+1+x^2=4$ يعني : $2x^2-2x-3=0$

نحسب مميز المعادلة فنجد: $\Delta=28$ ومنه للمعادلة حلين هما :

$x_1=\frac{2+2\sqrt{7}}{4}$ و $x_2=\frac{2-2\sqrt{7}}{4}$ يعني : $x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ و $x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

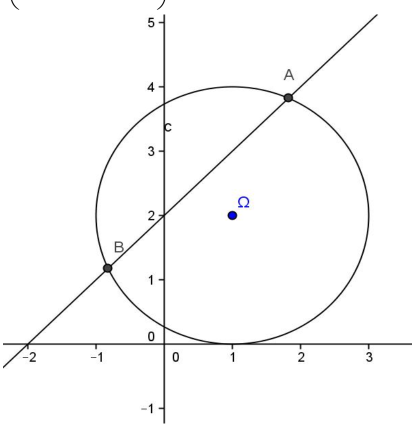
اذا كانت $x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ نعوض في $x+2=y$

فنجد : $y=\frac{1+\sqrt{7}}{2}+2=\frac{5+\sqrt{7}}{2}$

اذا كانت $x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$ نعوض في $x+2=y$

فنجد : $y=\frac{1-\sqrt{7}}{2}+2=\frac{5-\sqrt{7}}{2}$

ومنه نقطتا التقاطع هما : $A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2};\frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)$ و $B\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2};\frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$



تمرين29: نعتبر للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;2)$ وشعاعها $R=1$ و المستقيم (D) الذي معادلته :

1) بين أن المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

2) حدد احداثيات نقطة التماس T

الجواب: 1) نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$(D):\ 0x+1y-3=0$ **يعني** $(D):\ y=3$

$d(\Omega,(P))=\frac{|0+2-3|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{1}}=1=R$

ومنه : المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

2) معادلة الدائرة هي : $(x-1)^2+(y-2)^2=1^2$

نحل اذن النظمة التالية :

$\Leftrightarrow \begin{cases}(1)(x-1)^2+(y-2)^2=1\\ (2)\ y=3\end{cases}$

نعوض في المعادلة (1) $y=3$ فنجد :

$(1)(x-1)^2+1=1$ يعني : $(x-1)^2=0$ يعني : $x=1$

ومنه نقطة التماس هي : $T(1;3)$

تمرين30: نعتبر الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(2;1)$ وشعاعها $R=5$ و المستقيم (D) الذي معادلته :

$(D):\ 3x+y-2=0$

1) بين أن المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

2) حدد احداثيات نقط تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D)

الجواب:1) نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$d(\Omega,(P))=\frac{|6+1-2|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{2}<R=5$

ومنه : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

2) معادلة الدائرة هي : $(x-2)^2+(y-1)^2=(5)^2$ تكافئ:

$x^2+y^2-4x-2y-20=0$

نحدد احداثيات نقط تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D)

نحل اذن النظمة التالية :

$\begin{cases}(1)x^2+y^2-4x-2y-20=0\\ (2)3x+y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1)x^2-x-2=0\\ (2)\ y=-3x+2\end{cases}$

نحسب مميز المعادلة (1) فنجد: $\Delta=9$ ومنه للمعادلة

حلين هما : $x_1=\frac{1+3}{2}=2$ و $x_2=-1$

- اذا كانت $x_1=2$ فان : $y=-4$
- اذا كانت $x_1=-1$ فان : $y=5$

ومه نقطتا التقاطع هما : $A(-1;5)$ و $A(2;-4)$

تمرين31: نعتبر الدائرة (C)

التي معادلتها : $(1)\ x^2+y^2-2x-8y+1=0$

و المستقيم (D) المعرف بتمثيله البارامتري : $(D):\ \begin{cases}x=1+2t\\ y=t\end{cases}$

$(t\in\mathbb{R})$:

1) بين أن المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

2) حدد احداثيات نقط تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D)

الجواب 1: نعوض في المعادلة (1) فنجد :

$(1+2t)^2+t^2-2(1+2t)-8t+1=0$ يعني : $5t^2-8t=0$

يعني : $t(5t-8)=0$

يعني : $t_1=0$ أو $t_2=\frac{8}{5}$

ومنه : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

2) اذا كانت $t_1=0$ نعوض في $\begin{cases}x=1+2t\\ y=t\end{cases}$ فنجد $\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$:

اذا كانت $t_2=\frac{8}{5}$ نعوض فنجد $\begin{cases}x=\frac{21}{5}\\ y=\frac{8}{5}\end{cases}$

ومنه : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

و نقطتا التقاطع هما : $A(1;0)$ و $B\left(\frac{21}{5};\frac{8}{5}\right)$

تمرين32: لتكن الدائرة (C) التي معادلتها الديكارتية هي :

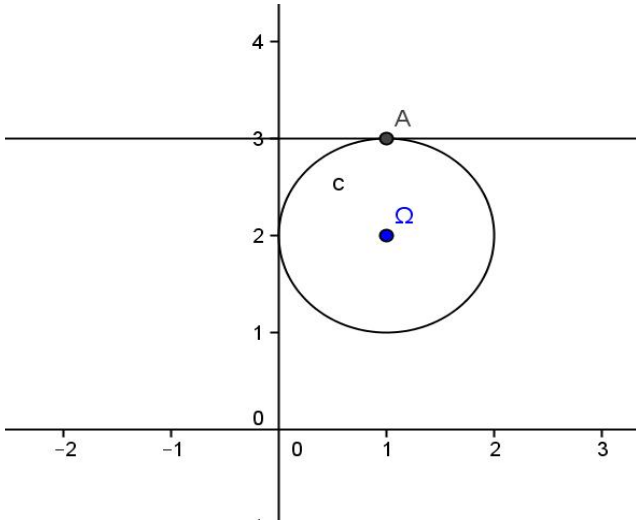
$(1)\ x^2+y^2-4x-2y+1=0$

1) تأكد أن $A(0;1)\in(C)$ ثم حدد مركز وشعاع الدائرة (C)

2) معادلة لمماس للدائرة (C) في النقطة A

الجواب : 1) نتحقق أن احداثيات $A(0;1)$ تحقق المعادلة (1)

$0^2+1^2-4\times0-2\times1+1=0$ (1) ومنه $A(0;1)\in(C)$



$a=4;b=-2;c=1$

نحسب : $a^2+b^2-4c=(4)^2+(-2)^2-4\times1=16+4-4=16>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(-2;1)$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{16}}{2}=2$

2) معادلة لمماس للدائرة (C) في النقطة A ؟؟؟؟

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$ ولدينا : $\overrightarrow{AM}(x-0;y-1)$ و

$\overrightarrow{A\Omega}(-2;0)$

$-2(x-0)=0\Leftrightarrow -2(x-0)+0(y-1)=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

$x=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

ومنه معادلة مماس الدائرة (C) في النقطة $A(0;1)$ هو المستقيم

الذي معادلته: $(D): x=0$

تمرين33:لتكن (C) الدائرة التي معادلتها الديكارتية هي :

$$x^2+y^2+4x+4y-2=0$$

و المستقيم (D) الذي معادلته : $x+3y-2=0$

1)حدد مركز وشعاع الدائرة (C)

2)بين أن المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

3)حدد إحداثيتي نقطه تماس الدائرة (C) و المستقيم (D)

الجواب: 1)نحدد مركز وشعاع الدائرة (C)

$$a=4;b=4;c=-2$$

نحسب : $a^2+b^2-4c=(4)^2+(4)^2-4\times-2=16+16+8=40>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(-2;-2)$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{40}}{2}=\sqrt{10}$

2)نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega,(P))=\frac{|-2-6-2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}=R$$

ومنه : المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

3)نحدد احداثيات نقطة التماس T

معادلة الدائرة هي : $(x+2)^2+(y+2)^2=10$

نحل اذن النظمة التالية :

$$\begin{cases}(1)(x+2)^2+(y+2)^2=10\\(2)x+3y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1)(x+2)^2+(y+2)^2=10\\(2)x=2-3y\end{cases}$$

نعوض في المعادلة (1) $x=2-3y$ فنجد : $y^2-2y+1=0$

يعني : $(y-1)^2=0$ يعني : $y=1$ ومنه : $x=-1$

ومنه نقطة التماس هي : $T(-1;1)$

« c’est en forgeant que l’on devient forgeron » dit un proverbe.
c’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien

أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:المتتاليات العددية

المستوى : الأولى باك علوم تجريبية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

1) $0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10$, ...

2) $6 , 3 , 0 , -3 , -6 , -9 , -12$, ...

3) $1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243$, ...

4) $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \frac{1}{32}$, ...

5) $1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36$, ...

الأجوبة: 1) $0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , 18$

2) $6 , 3 , 0 , -3 , -6 , -9 , -12 , -15 , -18 , 21 , -24$

3) $1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 , 729 , 2187 , 6561 , 19683$

4) $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \frac{1}{32} , \frac{1}{64} , \frac{1}{128} , \frac{1}{256} , \frac{1}{512}$

5) $1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , 49 , 64 , 81 , 100$

تمرين2: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n+3$

1) أحسب حدها الأول u_0

2) أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$

الأجوبة: 1) $u_0 = 2\times0+3=3$

2) $u_1 = 2\times1+3=5$ و $u_2 = 2\times2+3=4+3=7$ و $u_3 = 2\times3+3=9$

نلاحظ أن فرق حدين متتاليين هو العدد 2

تمرين3: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بالعلاقة الترجعية التالية: $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=2u_n+3 \end{cases}$ أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)

الجواب : نعوض n ب 0

فنجد : $u_{0+1} = 2\times u_0+3=2\times1+3=2+3=5$ اذن : $u_1=5$

نعوض n ب 1

فنجد : $u_{1+1}=2\times u_1+3=2\times5+3=10+3=13$ اذن : $u_2=13$

نعوض n ب 2

فنجد : $u_{2+1}=2\times u_2+3=2\times13+3=26+3=29$

اذن : $u_3=29$

ملاحظة : هذه المتتالية تسمى متتالية ترجعيه

تمرين4: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n+1}{2n+1}$

1. بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2}<u_n\leq1$

2. ماذا يمكن أن نقول عن المتتالية (u_n) ؟

الأجوبة : أ) نبين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 1$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $1-u_n=1-\frac{n+1}{2n+1}=\frac{(2n+1)-(n+1)}{2n+1}=\frac{n}{2n+1}\geq0$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 1$ ❶

أ) نبين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2}<u_n$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_n-\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2(n+1)-(2n+1)}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}>0$

ومنه: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2}<u_n$ ❷

وبالتالي من ❶ و ❷ نجد: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2}<u_n\leq1$

2) نقول المتتالية العددية (u_n) مكبورة بالعدد الحقيقي 1

و نقول المتتالية العددية (u_n) مصغورة بالعدد الحقيقي $\frac{1}{2}$

و نقول ان المتتالية العددية (u_n) محدودة

تمرين5: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1}=u_n^2+2u_n+2 \\ u_0=-1 \end{cases}$$

1) أحسب u_1 2) بين أن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 1

الجواب:

1) $u_{0+1}=u_0^2+2u_0+2=(-1)^2+2\times(-1)+2=1+-2+2=1$

1) يكفي أن نبين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1\leq u_n$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_n-1=u_n^2+2u_n+2-1=u_n^2+2u_n+1=(u_n+1)^2\geq0$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1\leq u_n$ وبالتالي : (u_n) مصغورة بالعدد 1

تمرين6: أدرس رتابة المتتالية العددية $(u_n)_{n\in I}$ المعرفة كالتالي :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n=2n+3$

الجواب : $u_{n+1}-u_n=2(n+1)+3-(2n+3)=2>0$

اذن: (u_n) تزايدية قطعا

تمرين7: أدرس رتابة المتتالية (v_n) المعرفة كالتالي: $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n=\frac{2}{n}$

الجواب :

$$v_{n+1}-v_n=\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n}=\frac{2n-2(n+1)}{n(n+1)}=\frac{-2}{n(n+1)}<0$$

اذن: (v_n) تناقصية قطعا

تمرين8: أدرس رتابة المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n=\frac{-n}{n+2}$

الجواب :

$$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{-(n+1)}{n+1+2}\right)-\left(\frac{-n}{n+2}\right)=\frac{-n-1}{n+3}+\frac{n}{n+2}$$

ا $u_{n+1}-u_n=\frac{-n-1}{n+3}+\frac{n}{n+2}=\frac{(-n-1)(n+2)+n(n+3)}{(n+3)(n+2)}=\frac{-2}{(n+3)(n+2)}<0$

ذن $u_{n+1}\le u_n$ وبالتالي (u_n) تناقصية قطعا

تمرين9: أدرس رتابة المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n=\frac{5n-3}{2n+7}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ واستنتج أن : $u_n\ge-\frac{3}{7}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

الجواب :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5(n+1)-3}{2(n+1)+7}-\frac{5n-3}{2n+7}=\frac{(5n+2)}{2n+9}-\frac{5n-3}{2n+7}=\frac{(5n+2)(2n+7)-(2n+9)(5n-3)}{(2n+9)(2n+7)}$$

اذ $u_{n+1}-u_n=\frac{10n^2+35n+4n+14-10n^2+6n-45n+27}{(2n+9)(2n+7)}=\frac{41}{(2n+9)(2n+7)}\ge0$

ن $u_{n+1}-u_n\ge0$ وبالتالي (u_n)

بما أن (u_n) تزايدية فان : $u_n\ge u_0$ يعني $u_n\ge-\frac{3}{7}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

تمرين10: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}\\ u_0=3\end{cases}$

1. بين أن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 2
2. بين أن المتتالية (u_n) مكبورة بالعدد 4
3. ماذا تستنتج ؟
4. أدرس رتابة المتتالية (u_n)

الأجوبة :1) ◎ يكفي ان نبين أن: $2\le u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=3\ge2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge2$

◎نبين أن: $u_{n+1}\ge2$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-2=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-2=\frac{8(u_n-1)-2(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{6u_n-12}{u_n+2}$

$u_{n+1}-2=\frac{6(u_n-2)}{u_n+2}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge2$

اذن : $u_n-2\ge0$ و $u_n+2>0$ و منه $u_{n+1}-2\ge0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n\ge2$

2)يكفي ان نبين أن: $u_n\le4$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=3\le4$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

◎نفترض أن: $u_n\le4$

◎نبين أن: $u_{n+1}\le4$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $4-u_{n+1}=4-\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{4(u_n+2)-8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{-4u_n+16}{u_n+2}$

$4-u_{n+1}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\le4$

اذن : $4-u_n\ge0$ و $u_n+2>0$ و منه $4-u_{n+1}\ge0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n\le4$

2) المتتالية العددية (u_n) محدودة لأنها مكبورة ومصغورة

3) $u_{n+1}-u_n=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-u_n=\frac{8(u_n-1)-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n^2+6u_n-8}{u_n+2}$

نعمل $-u_n^2+6u_n-8$ نحسب المميز Δ

$\Delta=36-32=4>0$ هناك جذرين : $x_1=\frac{-6+2}{-2}=2$ و $x_2=\frac{-6-2}{-2}=4$

ومنه التعميل : $-u_n^2+6u_n-8=-(u_n-2)(u_n-4)$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}$

لدينا : $u_n\ge2$ اذن : $u_n\ge0$ و $u_n-2\ge0$

و لدينا : $u_n\le4$ اذن : $u_n-4\le0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}\ge0$ وبالتالي (u_n) تزايدية

تمرين11: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{4u_n-2}{u_n+1}\\ u_0=1\end{cases}$

1. بين أن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 1
2. بين أن المتتالية (u_n) مكبورة بالعدد 2
3. ماذا تستنتج ؟
4. أدرس رتابة المتتالية (u_n)

الأجوبة :1) ◎ يكفي ان نبين أن: $1\le u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=1\ge1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge1$

◎نبين أن: $u_{n+1}\ge1$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\frac{4u_n-2}{u_n+1}-1=\frac{4u_n-2-(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{3u_n-3}{u_n+1}$

$u_{n+1}-1=\frac{3(u_n-1)}{u_n+1}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge1$

اذن : $u_n-1\ge0$ و $u_n+1>0$ و منه $u_{n+1}-1\ge0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n\ge1$

2)يكفي ان نبين أن: $u_n\le2$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=1\le2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

◎نفترض أن: $u_n\le2$

◎نبين أن: $u_{n+1}\le2$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $2-u_{n+1}=2-\frac{4u_n-2}{u_n+1}=\frac{2(u_n+1)-(4u_n-2)}{u_n+1}=\frac{-2u_n+4}{u_n+1}$

$2-u_{n+1}=\frac{2(2-u_n)}{u_n+1}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\le2$

اذن : $2-u_n \geq 0$ و $u_n+1>0$ و منه $2-u_{n+1}\geq 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\leq 2$

3) المتتالية العددية (u_n) محدودة لأنها مكبورة ومصغورة

(4 $u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n-2}{u_n+1}-u_n=\frac{4u_n-2-u_n(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{u_n+2}$

نعمل $-u_n^2+3u_n-2$ نحسب المميز Δ

$\Delta=9-8=1>0$ هناك جذرين : $x_1=\frac{-3+1}{-2}=1$ و $x_2=\frac{-3-1}{-2}=2$

ومنه التعميل : $-u_n^2+3u_n-2=-(u_n-1)(u_n-2)$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-1)(u_n-2)}{u_n+1}$

لدينا : $u_n\geq 1$ اذن : $u_n\geq 0$ و $u_n-1\geq 0$

و لدينا : $u_n\leq 2$ اذن : $u_n-2\leq 0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-1)(u_n-2)}{u_n+1}\geq 0$ وبالتالي (u_n) تزايدية

تمرين12: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\frac{n+3}{4}$

بين أن المتتالية (u_n) حسابية وحدد أساسها وحدها الأول

الجواب : $u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)+3}{4}-\frac{n+3}{4}=\frac{1}{4}=r$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ هي حسابية أساسها $r=\frac{1}{4}$

وحدها الأول : $u_0=\frac{3}{4}$

تمرين13: لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و $u_6=31$

1)أحسب u_0 2)أكتب u_n بدلالة n 3)أحسب : u_{2015} ثم u_{2016}

أجوبة :1) لدينا (u_n) حسابية اذن : $u_n=u_0+nr$

ومنه : $u_6=u_0+6\times\frac{1}{2}$ **يعني** $31=u_0+3$ **يعني** $28=u_0$

2) $u_n=u_0+nr$ يعني $u_n=28+\frac{n}{2}$

3) $u_{2015}=28+\frac{2015}{2}=\frac{2071}{2}$

و $u_{2016}=28+\frac{2016}{2}=28+1008=1036$

تمرين14: لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r و بحيث $u_0=5$

و $u_{100}=-45$

1)حدد r 2)أحسب : u_{2015} و u_{2016}

أجوبة :1) لدينا (u_n) حسابية اذن : $u_n=u_0+nr$

ومنه : $u_{100}=u_0+100r$ **يعني** $-45=5+100r$

يعني $-50=100r$ **يعني** $r=-\frac{1}{2}$

2) (u_n) حسابية اذن : $u_n=u_0+nr$ يعني $u_{2015}=5+2015\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

يعني $u_{2015}=5-\frac{2015}{2}$ يعني $u_{2015}=\frac{10-2015}{2}=\frac{-2005}{2}$

ومنه $u_{2016}=\frac{-2005}{2}+\frac{-1}{2}=\frac{-2006}{2}=-1003$

تمرين15: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\begin{cases}u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n}\\ u_0=2\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي :

$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\frac{1}{u_n+1}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
3. بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n=\frac{-3n+2}{3n+1}$
4. أكتب v_n بدلالة n
5. استنتج طريقة أخرى لكتابة u_n بدلالة n

أجوبة : $u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n}$

1) نعوض n ب0

$u_{0+1}=\frac{-1}{2+u_0}=\frac{-1}{2+2}=\frac{-1}{4}$ اذن : $u_1=-\frac{1}{4}$

نعوض n ب 1 فنجد :

$u_{1+1}=\frac{-1}{2+u_1}=\frac{-1}{2-\frac{1}{4}}=\frac{-1}{\frac{7}{4}}=\frac{-4}{7}$ اذن : $u_2=-\frac{4}{7}$

نعوض n ب 0 في $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ فنجد : $v_0=\frac{1}{u_0+1}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=\frac{1}{u_1+1}=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{3}{4}$

(2 $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}$

نعوض u_{n+1} ب $\frac{-1}{2+u_n}$

فنجد: $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{-1}{2+u_n}+1}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{\frac{u_n+1}{2+u_n}}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{u_n+2}{u_n+1}-\frac{1}{u_n+1}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+2-1}{u_n+1}=\frac{u_n+1}{u_n+1}=1$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_0=\frac{1}{3}$

3)أ) لدينا : $u_0=2$ و $\frac{-3\times0+2}{2\times0+1}=\frac{2}{1}=2$

اذن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن : $u_n=\frac{-3n+2}{3n+1}$

ج) نبين أن: $u_{n+1}=\frac{-3(n+1)+2}{3(n+1)+1}$ أي نبين أن : $u_{n+1}=-\frac{3n+1}{3n+4}$ ؟؟؟

لدينا : $u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n}$ وحسب افتراض الترجع

لدينا : $u_n=\frac{-3n+2}{3n+1}$

اذن : $u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n}=\frac{-1}{2+\frac{-3n+2}{3n+1}}=\frac{-1}{\frac{3n+4}{3n+1}}=-\frac{3n+1}{3n+4}$

ومنه : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n=\frac{-3n+2}{3n+1}$

4) بما أن: (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_0=\frac{1}{3}$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=\frac{1}{3}+n$

5) نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ يعني $u_n+1=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}-1$

ونعلم أن : $v_n=\frac{1}{3}+n$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{\frac{1}{3}+n}-1=\frac{1}{\frac{3n+1}{3}}-1=\frac{3}{3n+1}-1=\frac{3-3n-1}{3n+1}=\frac{-3n-2}{3n+1}$$

تمرين16: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{u_n-1}{3+u_n}\\ u_0=0\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ \ v_n=\frac{1}{1+u_n}$

1. أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
2. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة : 1) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{u_n-1}{3+u_n}$

فنجد:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{u_n-1}{3+u_n}+1}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{\frac{2u_n+2}{3+u_n}}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{u_n+3}{2u_n+2}-\frac{2}{2u_n+2}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3-2}{2u_n+2}=\frac{u_n+1}{2u_n+2}=\frac{u_n+1}{2(u_n+1)}=\frac{1}{2}=r$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول : $v_0=1$

2) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\frac{n}{2}$

نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ يعني $u_n+1=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}-1$

ونعلم أن : $v_n=1+\frac{n}{2}$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{1+\frac{n}{2}}-1=\frac{1}{\frac{n+2}{2}}-1=\frac{2}{n+2}-1=\frac{2-n-2}{n+2}=\frac{-n}{n+2}$$

تمرين17: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\geq1}$ الذي أساسها $r=3$

وحدها الأول $u_0=5$

1) أكتب u_n بدلالة n وأوجد الحد التاسع

2) أحسب المجموع التالي : $S=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{13}$

أجوبة 1): وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها الأول $u_0=5$

فان : $u_n=u_0+(n-0)r$ أي: $u_n=5+3(n-0)$ أي: $u_n=3n+5$

ومنه : $u_8=3\times8+5=29$

2) $S=u_0+u_1+\cdots+u_{13}=(13-0+1)\frac{u_0+u_{13}}{2}$

ومنه $S=14\frac{u_0+u_{13}}{2}=\frac{14}{2}(5+u_{13})$ نحسب: $u_{13}=3\times13+5=44$

وبالتالي: $S=7(5+44)=7\times49=343$

تمرين18:

1. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0=1$

أحسب المجموع التالي : $S_1=u_3+u_4+u_5+\cdots+u_{30}$

2. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ و حدها الأول $u_0=4$

أحسب المجموع التالي : $S_2=u_7+u_8+u_9+\cdots+u_{25}$

أجوبة 1) $S_1=u_3+u_4+u_5+\cdots+u_{30}=(30-3+1)\frac{u_3+u_{30}}{2}$

$S_1=(28)\frac{u_3+u_{30}}{2}$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0=1$

فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=1+(n-0)\frac{1}{2}$ أي: $u_n=1+\frac{n}{2}$

ومنه نحسب: $u_3=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ و: $u_{30}=1+\frac{30}{2}=\frac{32}{2}=16$

وبالتالي: $S_1=(28)\frac{u_3+u_{30}}{2}=14\left(\frac{5}{2}+16\right)=14\left(\frac{37}{2}\right)=7\times37=259$

2) $S_2=u_7+u_8+u_9+\cdots+u_{25}=(25-7+1)\frac{u_7+u_{25}}{2}=(19)\frac{u_7+u_{25}}{2}$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ وحدها الأول $u_0=4$ فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=4+(n-0)(-2)$ أي: $u_n=4-2n$

نحسب: $u_7=4-2\times7=4-14=-10$

و $u_{25}=4-2\times25=4-50=-46$

وبالتالي: $S_2=(19)\frac{u_7+u_{25}}{2}=(19)\frac{-10+-46}{2}=(19)\frac{-56}{2}=19\times-28=-532$

تمرين19: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n=2\times3^n$

1. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$
2. أحسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ وماذا تستنتج ؟

أجوبة 1) $u_0=2\times3^0=2\times1=2$ و $u_1=2\times3^1=6$ و $u_2=2\times3^2=18$ و $u_3=2\times3^3=54$

2) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2\times3^{n+1}}{2\times3^n}=\frac{3^{n+1}}{3^n}=\frac{3^n\times3^1}{3^n}=3^1=3=q$

أستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ هندسية

أساسها $q=3$ وحدها الأول $u_0=2$

تمرين20: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$

بحيث: $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n=5\times3^{2n+1}$

بين أن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية و حدد أساسها q و حدها الأول

الجواب : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{5\times3^{2n+3}}{5\times3^{2n+1}}=\frac{3^{2n+3}}{3^{2n+1}}=3^{(2n+3)-(2n+1)}=3^2=9=q$

اذن: المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ هندسية أساسها $q=9$وحدها الأول $u_0=15$

تمرين21: لتكن (u_n) متتالية هندسية بحيث :

$u_2=\frac{9}{2}$ و $u_5=\frac{243}{2}$

حدد q أساس المتتالية (u_n) و أكتب u_n بدلالة n

أجوبة لدينا (u_n) متتالية هندسية اذن : $u_n=u_mq^{n-m}$

ومنه : اذن: $u_5=u_2q^{5-2}$ يعني : $\frac{243}{2}=\frac{9}{2}q^3$

يعني $q^3=\frac{243}{9}$ يعني : $q^3=27$ يعني : $q=3$

لدينا أيضا : $u_n=u_2q^{n-2}$

يعني : $u_n=\frac{9}{2}3^{n-2}=\frac{3^2\times3^{n-2}}{2}=\frac{3^{n-2+2}}{2}=\frac{3^n}{2}$

تمرين22: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول $u_0=81$

وأساسها : $q=\frac{1}{3}$

1)أكتب u_n بدلالة n 2)أحسب u_1 و u_2 و u_3

3)حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n=1$

أجوبة 1) نعلم أن $(u_n)_{n\geq0}$متتالية هندسية

أساسها $q=\frac{1}{3}$وحدها الأول $u_0=81$

اذن: $u_n=u_0q^{n-0}$ ومنه: $u_n=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

2) $u_1=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{81}{3}=27$ و $u_2=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{81}{9}=9$

و $u_3=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{81}{27}=3$

3) $u_n=1$ يعني $81\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=1$ يعني $81\times\frac{1}{3^n}=1$ يعني $\frac{81}{3^n}=1$ يعني

$81=3^n$ يعني $n=4$

تمرين23: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول $u_0=5$

و $u_3=40$

1. تحقق أن أساس المتتالية (u_n) هو $q=2$
2. أكتب u_n بدلالة n و أحسب u_4
3. حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n=160$

أجوبة 1) نعلم أن $(u_n)_{n\geq0}$متتالية هندسية اذن :

اذن: $u_3=u_0q^{3-0}$ يعني : $40=5q^3$ يعني : $q^3=\frac{40}{5}$ يعني :

$q^3=8$ يعني : $q=2$

2) $u_n=5\times(2)^n$

$u_1=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{81}{3}=27$ و $u_2=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{81}{9}=9$ و

$u_4=5\times(2)^4=5\times16=80$

3) $u_1=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{81}{3}=27$ و $u_2=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{81}{9}=9$

و $u_5=2\times u_4=2\times80=160$ ومنه : $n=5$

تمرين24: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالصيغة التالية

: $u_{n+1}=3\times U_n$ و $u_0=2$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\geq0}$ هندسية
2. عبر عن U_n بدلالة n
3. أحسب المجموع : $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_5$

أجوبة 1) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3\times u_n}{u_n}=3=q$

اذن: المتتالية هندسية أساسها $q=3$وحدها الأول $u_0=3$

2) $(u_n)_{n\geq0}$ هندسية أساسها $q=3$وحدها الأول $u_0=3$

اذن: $u_n=u_0q^{n-0}$ أي: $u_n=3\times(3)^n=3^1\times(3)^n=(3)^{n+1}$

3) $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_5=u_1\times\frac{1-q^{5-1+1}}{1-q}=u_1\times\frac{1-q^5}{1-q}$

$u_1=3^{1+1}=3^2=9$

$S_n=9\times\frac{1-3^5}{1-3}=9\times\frac{1-3^5}{-2}=9\times\frac{1-243}{-2}=9\times\frac{-242}{-2}=1029$

تمرين25: لتكن (u_n) متتالية هندسية بحيث : $u_5=486$

و $u_7=4374$ و أساسها $q\succ0$

1)حدد أساس المتتالية (u_n) 2) أحسب u_0 و u_{10}

3) أكتب u_n بدلالة n 4) أحسب المجموع التالي : $S=u_0+u_5+\cdots+u_{2009}$

أجوبة : 1) (u_n) متتالية هندسية اذن:

$u_7=u_5q^{7-5}$ يعني : $q^2=\frac{4374}{486}=9$

يعني : $q=3$ أو $q=-3$ وحسب المعطيات : $q\succ0$

اذن: $q=3$

2) (u_n) متتالية هندسية اذن: $u_5=u_0q^{5-0}$

يعني $486=u_03^5$ يعني $u_0=\frac{486}{3^5}=\frac{486}{243}=2$

يعني $u_{10}=u_7q^{10-7}$ يعني $u_{10}=u_7q^3$

$u_{10}=4374\times3^3=4374\times27=118098$

3) $u_n=u_0q^{n-0}$ يعني $u_n=2\times3^n$

4) $S_n=u_0+u_1+u_1+\cdots+u_{2009}=u_0\times\frac{1-q^{2009-0+1}}{1-q}=u_0\times\frac{1-q^{2010}}{1-q}$

$S_n=2\times\frac{1-3^{2010}}{1-3}=-\left(1-3^{2010}\right)=3^{2010}-1$

تمرين26: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة

كالتالي : $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1\\u_0=10\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

ونعتبرالمتتالية العددية (v_n)المعرفة كالتالي : $v_n=u_n-3$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن : $u_n\geq3$ $\forall n\in\mathbb{N}$
3. أدرس رتابة المتتالية (u_n)

4. أحسب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
5. أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n
6. أحسب بدلالة n المجموع : $S=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$

أجوبة: 1) نعوض n ب 0

فنجد: $u_{0+1}=\frac{2}{3}\times u_0+1=\frac{2}{3}\times10+1=\frac{20}{3}+1=\frac{20}{3}+\frac{3}{3}=\frac{23}{3}$ اذن : $u_1=\frac{23}{3}$

نعوض n ب 1

فنجد : $u_{1+1}=\frac{2}{3}\times u_1+1=\frac{2}{3}\times\frac{23}{3}+1=\frac{46}{9}+1=\frac{46}{9}+\frac{9}{9}=\frac{55}{9}$ اذن : $u_2=\frac{55}{9}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0-3=10-3=7$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1-3=\frac{23}{3}-3=\frac{23}{3}-\frac{9}{3}=\frac{14}{3}$

2)نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=10\geq3$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\geq3$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\geq3$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-3=\frac{2}{3}u_n+1-3=\frac{2}{3}u_n-2=\frac{2}{3}(u_n-3)$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\geq3$

اذن : $u_n-3\geq0$ منه $u_{n+1}-3\geq0$ وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\geq3$

3)دراسة رتابة المتتالية (u_n)

نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+1-u_n=-\frac{1}{3}u_n+1=-\frac{1}{3}(u_n-3)$$

نعلم أن: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\geq3$ حسب السؤال 2)اذن : $u_{n+1}-u_n\leq0$

ومنه المتتالية (u_n) تناقصية

4) $$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-3}{u_n-3}=\frac{\frac{2}{3}u_n+1-3}{u_n-3}=\frac{\frac{2}{3}u_n-2}{u_n-2}=\frac{\frac{2}{3}u_n-\frac{6}{2}}{u_n-2}=\frac{\frac{2}{3}(u_n-3)}{u_n-2}=\frac{2}{3}=q$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{2}=q$ وحدها الأول $v_0=7$

5)كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}=q$

وحدها الأول $v_0=7$ فان: $v_n=7\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=u_n-3$ اذن: $v_n+3=u_n$ أي: $u_n=7\left(\frac{2}{3}\right)^n+3$

6) $$S_n=v_0\times\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S_n=7\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=21\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

تمرين27: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\begin{cases}u_{n+1}=\frac{6}{1+u_n}\\ u_0=3\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية

العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{u_n-2}{u_n+3}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية و حدد أساسها q و حدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n
4. أحسب بدلالة n المجموع: $S=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$

أجوبة 1) نعوض n ب 0 فنجد: $u_1=\frac{6}{1+u_0}=\frac{6}{1+3}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ اذن : $u_1=\frac{3}{2}$

$v_0=\frac{u_0-2}{u_0+3}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$ و $v_1=\frac{u_1-2}{u_1+3}=\frac{\frac{1}{6}-2}{\frac{1}{6}+3}=\frac{\frac{-11}{6}}{\frac{19}{6}}=-\frac{11}{19}$

2) $$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+3}=\frac{\frac{6}{1+u_n}-2}{\frac{6}{1+u_n}+3}=\frac{\frac{6-2(1+u_n)}{1+u_n}}{\frac{6+3(1+u_n)}{1+u_n}}=\frac{\frac{6-2-2u_n}{1+u_n}}{\frac{6+3+3u_n}{1+u_n}}=\frac{\frac{4-2u_n}{1+u_n}}{\frac{9+3u_n}{1+u_n}}=\frac{\frac{-2(u_n-2)}{1+u_n}}{\frac{3(3+u_n)}{1+u_n}}$$

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+3}=\frac{-2(u_n-2)}{3(3+u_n)}=\frac{-2}{3}\times\frac{u_n-2}{u_n+3}=\left(-\frac{2}{3}\right)\times v_n$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\frac{2}{3}=q$ وحدها الأول $v_0=\frac{1}{6}$

3) بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\frac{2}{3}=q$ وحدها الأول $v_0=\frac{1}{6}$

فان: $v_n=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ استنتاج u_n بدلالة n:

لدينا: $v_n=\frac{u_n-2}{u_n+3}\Leftrightarrow v_n(u_n+3)=u_n-2\Leftrightarrow v_nu_n+3v_n-u_n=-2$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-2-3v_n\Leftrightarrow u_n=\frac{-2-3v_n}{v_n-1}\Leftrightarrow u_n=\frac{2+3v_n}{1-v_n}$$

ونعلم أن : $v_n=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ اذن : $u_n=\frac{2+3\times\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$

$$u_n=\frac{2+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$$

4) $$S_n=v_0\times\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S_n=\frac{1}{6}\times\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)=\frac{1}{10}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

تمرين28: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\begin{cases}u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n}\\ u_1=1\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ونعتبر المتتالية

العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1. أحسب u_2 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية حسابية و حدد أساسها و حدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

أجوبة 1) $u_2=\frac{u_1}{1+u_1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ و $v_1=\frac{1}{u_1}=\frac{1}{1}=1$

2) $$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+u_n}{u_n}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+u_n-1}{u_n}=1=r$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_1=1$

3) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_1=1$

فان : $v_n=v_1+(n-1)r$ أي : $v_n=1+(n-1)$ يعني $v_n=n$

ونعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}$ ونعلم أن : $v_n=n$ اذن : $u_n=\frac{1}{n}$

تمرين29: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \begin{cases} u_{n+1}=\frac{u_n}{1+2u_n} \\ u_0=1\end{cases}$$ ونعتبر المتتالية

العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1. أحسب u_1 و v_0
2. بين أن (v_n) متتالية حسابية و حدد أساسها و حدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

أجوبة (1 $u_1=\frac{u_0}{1+2u_0}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$ و $v_0=\frac{1}{u_0}=\frac{1}{1}=1$

(2 $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+2u_n}{u_n}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+2u_n-1}{u_n}=2=r$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=2$ وحدها الأول : $v_0=1$

(3 بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=2$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+2n$

ونعلم أن: $v_n=\frac{1}{u_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}$ ونعلم أن : $v_n=1+2n$ اذن : $u_n=\frac{1}{1+2n}$

تمرين30: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \begin{cases} u_{n+1}=\frac{5u_n-4}{u_n+1} \\ u_0=3\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{u_n-2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و v_0
2. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 2$
3. أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n
5. أدرس رتابة المتتالية (u_n)
6. أحسب المجموع التالي : $S_2=v_1+v_2+v_3+\cdots+v_{11}$

أجوبة (1 $u_1=\frac{5u_0-4}{u_0+1}=\frac{15-4}{3+1}=\frac{11}{4}$ و $v_0=\frac{1}{u_0-2}=\frac{1}{3-2}=1$

2)نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=3\ge 2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge 2$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\ge 2$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-2=\frac{5u_n-4}{u_n+1}-2=\frac{5u_n-4-2(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{3u_n-6}{u_n+1}$

$u_{n+1}-2=\frac{3(u_n-2)}{u_n+1}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge 2$

اذن : $u_n-2\ge 0$ و $u_n+1>0$ و منه $u_{n+1}-2\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 2$

(3 $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-2}-\frac{1}{u_n-2}$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{5u_n-4}{u_n+1}$

فنجد: $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{5u_n-4}{u_n+1}-2}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{1}{\frac{5u_n-4-2(u_n+1)}{u_n+1}}-\frac{1}{u_n-2}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+1}{3u_n-6}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{u_n+1}{3(u_n-2)}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{u_n+1}{3(u_n-2)}-\frac{3}{3(u_n-2)}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+1-3}{3(u_n-2)}=\frac{u_n-2}{3(u_n-2)}=\frac{1}{3}=r$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{3}$ وحدها الأول : $v_0=1$

(4 بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{3}$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\frac{n}{3}$

نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n-2}$ يعني $u_n-2=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}+2$

ونعلم أن : $v_n=1+\frac{n}{3}$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{1+\frac{n}{3}}+2=\frac{1}{\frac{n+3}{3}}+2=\frac{3}{n+3}+2=\frac{3+2n+6}{n+3}=\frac{9+2n}{n+3}$$

5) دراسة رتابة المتتالية (u_n)

نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n-4}{u_n+1}-u_n=\frac{5u_n-4-u_n(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{-u_n^2+4u_n-4}{u_n+1}$

$u_{n+1}-u_n=-\frac{u_n^2-4u_n+4}{u_n+1}=-\frac{(u_n-2)^2}{u_n+1}\le 0$ لأن : $-(u_n-2)^2\le 0$

و $u_n+1>0$ حسب السؤال 2) ومنه المتتالية (u_n) تناقصية

(6 $S=v_1+v_2+v_3+\cdots+v_{11}=11\times\frac{(v_1+v_{11})}{2}$

لدينا : $v_n=1+\frac{n}{3}$ اذن : $v_1=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ و $v_2=1+\frac{11}{3}=\frac{14}{3}$

$$S=11\times\frac{\left(\frac{4}{3}+\frac{14}{3}\right)}{2}=11\times\frac{18}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{198}{3\times 2}=33$$

تمرين31: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \begin{cases} u_{n+1}=\frac{5u_n-1}{u_n+3} \\ u_0=2\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و v_0
2. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 1$
3. أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة (1: $u_1=\frac{5u_0-1}{u_0+3}=\frac{10-1}{2+3}=\frac{9}{5}$ و $v_0=\frac{1}{u_0-1}=\frac{1}{2-1}=1$

2)نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=2\ge 1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n \geq 1$

ج)نبين أن: $u_{n+1} \geq 1$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\frac{5u_n-1}{u_n+3}-1=\frac{5u_n-1-(u_n+3)}{u_n+3}=\frac{4u_n-4}{u_n+3}=\frac{4(u_n-1)}{u_n+3}$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n \geq 1$

اذن : $u_n-1\geq 0$ و $u_n+3>0$ و منه $u_{n+1}-1\geq 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\geq 1$

3) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-1}-\frac{1}{u_n-1}$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{u_n-1}{3+u_n}$

فنجد:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{5u_n-1}{u_n+3}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{4u_n}{3+u_n}}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{4}{4u_n-4}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3-4}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4(u_n-1)}=\frac{1}{4}=r$$

ومنه (v_n)متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=1$

4) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\frac{n}{4}$

5)نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ يعني $u_n-1=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}+1$

ونعلم أن : $v_n=1+\frac{n}{4}$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{1+\frac{n}{4}}+1=\frac{1}{\frac{n+4}{4}}+1=\frac{4}{n+4}+1=\frac{4+n+4}{n+4}=\frac{n+8}{n+4}$$

تمرين32:نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=-1-\frac{1}{4u_n}\\ u_0=\frac{1}{2}\end{cases}$$

ونعتبرالمتتالية العددية (v_n)المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{2}{2u_n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. بين أن : (v_n)متتالية حسابية
3. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة: 1) $u_1=-\frac{3}{2}$ و $u_2=-\frac{5}{6}$ و $u_{13}=-\frac{7}{10}$

2) $v_{n+1}-v_n=-2$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{u_n-1}{3+u_n}$

ومنه (v_n)متتالية حسابية أساسها : $r=-2$ وحدها الأول : $v_0=1$

3) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=-2n+1$

نعلم أن : $v_n=\frac{2}{2u_n+1}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}-\frac{1}{2}$ يعني $u_n=\frac{1}{-2n+1}-\frac{1}{2}$

تمرين33:نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{5u_n}{2u_n+3}\\ u_0=2\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n>1$
2. أبين أن (v_n)متتالية حسابية وحدد أساسها وحدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة: 1)نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=2>1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\geq 1$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\geq 1$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\frac{5u_n}{2u_n+3}-1=\frac{5u_n-(2u_n+3)}{2u_n+3}=\frac{3u_n-3}{2u_n+3}=\frac{3(u_n-1)}{2u_n+3}$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n>1$

اذن : $u_n-1>0$ و $2u_n+3>0$ و منه $u_{n+1}-1\geq 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\geq 1$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{5u_n-1}{u_n+3}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{4u_n}{3+u_n}}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{4}{4u_n-4}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3-4}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4(u_n-1)}=\frac{1}{4}=r$$

ومنه (v_n)متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=1$

3) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\frac{n}{4}$

نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ يعني $u_n-1=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}+1$

ونعلم أن : $v_n=1+\frac{n}{4}$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{1+\frac{n}{4}}+1=\frac{1}{\frac{n+4}{4}}+1=\frac{4}{n+4}+1=\frac{4+n+4}{n+4}=\frac{n+8}{n+4}$$

تمرين34:نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{7u_n+3}{3u_n+7}\\ u_0=\frac{7}{3}\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\geq 1$
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n)
3. أبين أن (v_n)متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول
4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة: 1)نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=\frac{7}{3}\geq 1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\geq 1$

ج)نبين أن: $u_{n+1} \ge 1$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\frac{7u_n+3}{3u_n+7}-1=\frac{7u_n+3-(3u_n+7)}{3u_n+7}=\frac{4u_n-4}{3u_n+7}=\frac{4(u_n-1)}{3u_n+7}$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n>1$

اذن : $u_n-1>0$ و $3u_n+7>0$ و منه $u_{n+1}-1\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 1$

2) دراسة رتابة المتتالية (u_n) نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{7u_n+3}{3u_n+7}-u_n=\frac{7u_n+3-u_n(3u_n+7)}{3u_n+7}=\frac{-3u_n^2+3}{3u_n+7}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-3(u_n+1)(u_n-1)}{3u_n+7}$$

ولدينا : $u_n\ge1$ اذن : $u_n+1\ge0$ و $u_n-1\ge0$ و $3u_n+7>0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n\le0$ وبالتالي : المتتالية (u_n) تناقصية

3) $$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{7u_n+3}{3u_n+7}-1}{\frac{7u_n+3}{3u_n+7}+1}=\frac{\frac{7u_n+3-(3u_n+7)}{3u_n+7}}{\frac{7u_n+3+(3u_n+7)}{3u_n+7}}=\frac{\frac{4u_n-4}{3u_n+7}}{\frac{10u_n+10}{3u_n+7}}=\frac{4u_n-4}{10u_n+10}$$

$$v_{n+1}=\frac{4(u_n-1)}{10(u_n+1)}=\frac{2}{5}\frac{u_n-1}{u_n+1}=\frac{2}{5}v_n$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$

وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+1}=\frac{\frac{7}{3}-1}{\frac{7}{3}+1}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{10}{3}}=\frac{2}{5}$

4) بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ وحدها الأول $v_0=\frac{2}{5}$

فان: $v_n=\frac{2}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n=\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$ **استنتاج** u_n بدلالة n :

لدينا: $v_nu_n+v_n-u_n=-1 \Leftrightarrow v_n(u_n+1)=u_n-1\Leftrightarrow v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

$$u_n=\frac{1+v_n}{1-v_n}\Leftrightarrow u_n=\frac{-1-v_n}{v_n-1}\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-1-v_n\Leftrightarrow$$

ونعلم أن : $v_n=\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$ اذن : $u_n=\frac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}$

تمرين35: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{5u_n+3}{u_n+3}\\u_0=1\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ 0\le u_n\le3$
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n)
3. أبين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول
4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة:

1) نستعمل برهانا بالترجع

نبين أولا أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ 0\le u_n$

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=1\ge0$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge0$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\ge0$ ؟؟؟؟؟

حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge0$ اذن : $u_{n+1}\ge0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge0$

نبين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\le3$

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=1\le3$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\le3$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\le3$ ؟؟؟؟؟ نحسب الفرق:

$$3-u_{n+1}=3-\frac{5u_n+3}{u_n+3}=\frac{3(u_n+3)-(5u_n+3)}{u_n+3}=\frac{-2u_n+6}{u_n+3}=\frac{-2(u_n-3)}{u_n+3}$$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\le3$

اذن : $u_n-3\le0$ و $u_n+3>0$ لأن $u_n\ge0$ و منه $3-u_{n+1}\ge0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\le3$

2) دراسة رتابة المتتالية (u_n) نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n+3}{u_n+3}-u_n=\frac{5u_n+3-u_n(u_n+3)}{u_n+3}=\frac{-u_n^2+2u_n+3}{u_n+3}$$

نعمل $-u_n^2+2u_n+3$ نحسب المميز Δ

$\Delta=4+12=16>0$ هناك جذرين : $x_1=\frac{-2+4}{-2}=-1$ و $x_2=\frac{-2-4}{-2}=3$

ومنه التعميل : $-u_n^2+2u_n+3=-(u_n-3)(u_n+1)$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-3)(u_n+1)}{u_n+3}$

لدينا : $u_n\ge0$ اذن : $u_n+3\ge0$ و $u_n+1\ge0$

و لدينا : $u_n\le3$ اذن : $u_n-3\le0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-3)(u_n+1)}{u_n+3}\ge0$ وبالتالي (u_n) تزايدية

3) $$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{5u_n+3}{u_n+3}-3}{\frac{5u_n+3}{u_n+3}+1}=\frac{\frac{5u_n+3-3(u_n+3)}{u_n+3}}{\frac{5u_n+3+(u_n+3)}{u_n+3}}=\frac{\frac{2u_n-6}{u_n+3}}{\frac{6u_n+6}{u_n+3}}=\frac{2u_n-6}{6u_n+6}$$

$$v_{n+1}=\frac{2(u_n-3)}{6(u_n+1)}=\frac{1}{3}\frac{u_n-3}{u_n+1}=\frac{1}{3}v_n$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$

وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-3}{u_0+1}=\frac{1-3}{1+1}=-1$

4) بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=-1$

فان: $v_n=(-1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا: $v_nu_n+v_n-u_n=-3\Leftrightarrow v_n(u_n+1)=u_n-3\Leftrightarrow v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}$

$$u_n=\frac{3+v_n}{1-v_n}\Leftrightarrow u_n=\frac{-3-v_n}{v_n-1}\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-3-v_n\Leftrightarrow$$

ونعلم أن :

$v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ اذن $u_n=\frac{3-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

1)قواعد مهمة :يجب حفظها

① $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

② $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

③ $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

④ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$

(2

⑤ $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\times\tan b}$

⑥ $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\times\tan b}$

(3 $\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a$ و $\cos(2a)=1-2\sin^2 a$

$\cos(2a)=2\cos^2 a-1$ اذن : $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$

$\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$ و $\cos^2 a+\sin^2 a=1$

$\sin(2a)=2\sin a\times\cos a$ و $1+\tan^2 a=\dfrac{1}{\cos^2 a}$

$\tan(2a)=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ $\qquad$ $\tan(x)=\dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

(4 $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$ و $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\times\cos\frac{x}{2}$

$\cos x=\dfrac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ و $\sin x=\dfrac{2\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

5)بوضع : $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$

نجد : $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ **و** $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ **و** $\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$

6)قواعد لكيفية تحويل جداء إلى مجموع:

$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$

$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$

$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$

$\cos a\sin b=-\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]$

7)قواعد لكيفية تحويل مجموع إلى جداء:

$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin p-\sin q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

تمرين1: أحسب $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

أجوبة: $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{4\pi-3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

يمكننا استعمال نتائج الجدول التالي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

④ $\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$

$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

تمرين2: أحسب $\tan\frac{\pi}{12}$

الجواب: $\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\times\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$

$\tan\frac{\pi}{12}=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$

تمرين3:

1. أحسب $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$ و $\tan\frac{5\pi}{12}$
2. أحسب $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$ و $\tan\frac{7\pi}{12}$
3. بين أن : $\cos x=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

أجوبة: (1 $\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{2\pi+3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$

$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

④ $\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}$

$\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{5\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}}{\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{\sqrt6-\sqrt2}=\frac{\left(\sqrt6+\sqrt2\right)^2}{6-2}=\frac{\left(\sqrt6+\sqrt2\right)^2}{4}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\frac{\left(\sqrt6+\sqrt2\right)^2}{4}=\frac{8+2\sqrt{12}}{4}=\frac{8+4\sqrt3}{4}=2+\sqrt3$$

(2 $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{4\pi+3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt2}{4}-\frac{\sqrt6}{4}=\frac{\sqrt2-\sqrt6}{4}$$

④ $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt6}{4}+\frac{\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$$

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\cos\frac{7\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}}{\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{\sqrt2-\sqrt6}=\frac{\left(\sqrt6+\sqrt2\right)^2}{2-6}=\frac{\left(\sqrt6+\sqrt2\right)^2}{-4}$$

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\frac{8+2\sqrt{12}}{-4}=\frac{8+4\sqrt3}{-4}=-2-\sqrt3$$

(3 $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x$ ؟؟

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x+\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x$$

$$=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt3}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt3}{2}\sin x=2\times\frac{1}{2}\cos x=\cos x$$

تمرين4: بين أن : $\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin x=0$

الجواب : لدينا

$$\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin x\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\cos x=\sin x\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos x$$

$$\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos x$$

$$\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\cos x=\sin x\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos x$$

$$\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos x$$

اذن : $\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin x=-2\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x=-\sin x+\sin x=0$

تمرين5: علما أن: $0\prec a\prec\frac{\pi}{2}$ و $0\prec b\prec\frac{\pi}{2}$ و $\cos a=\sin b=\frac{1}{2}$

1. أحسب $\sin a$ و $\cos b$
2. أحسب $\sin(a+b)$

أجوبة:(1 حساب $\cos b$

نعلم أن : $\cos^2 b+\sin^2 b=1$ يعني $\cos^2 b=1-\sin^2 b$ يعني $\cos^2 b=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

يعني $\cos^2 b=\frac{3}{4}$ يعني $\cos b=\frac{\sqrt3}{2}$ أو $\cos b=-\frac{\sqrt3}{2}$ ونعلم أن : $0\prec b\prec\frac{\pi}{2}$

اذن : $\cos b=\frac{\sqrt3}{2}$

حساب $\sin a$

نعلم أن : $\cos^2 a+\sin^2 a=1$ يعني $\sin^2 a=1-\cos^2 a$ يعني $\sin^2 a=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

يعني $\sin^2 a=\frac{3}{4}$ يعني $\sin a=\frac{\sqrt3}{2}$ أو $\sin a=-\frac{\sqrt3}{2}$ ونعلم أن : $0\prec a\prec\frac{\pi}{2}$

اذن : $\sin a=\frac{\sqrt3}{2}$

2)نعلم أن: $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

اذن : $\sin(a+b)=\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

تمرين6: علما أن : $\sin x=\frac{1}{3}$ و $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

أحسب $\cos(2x)$ و $\sin(2x)$

أجوبة: نعلم أن: $\cos(2x)=1-2\sin^2 x$

اذن : $\cos(2x)=1-2\left(\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

و نعلم أن: $\sin(2x)=2\sin x\times\cos x$ ومنه يجب حساب: $\cos x$

لدينا : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ يعني $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ يعني $\cos^2 b=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2$

يعني $\cos^2 x=\frac{8}{9}$ يعني $\cos x=\frac{\sqrt8}{3}$ أو $\cos x=-\frac{\sqrt8}{3}$ ونعلم أن : $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

اذن : $\cos x=\frac{\sqrt8}{3}$ ومنه : $\sin(2x)=2\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt8}{3}=\frac{2\sqrt8}{9}$

تمرين7: أحسب $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$ (لاحظ أن $\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\pi}{8}$)

أجوبة: حساب : $\cos\frac{\pi}{8}$

نستعمل العلاقة: $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ ونضع مثلا : $a=\frac{\pi}{8}$

ونجد : $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos 2\frac{\pi}{8}}{2}$ يعني $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}$ يعني $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{2+\sqrt2}{4}$

يعني $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt2}{4}}$ أو $\cos\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2+\sqrt2}{4}}$

ولكننا نعلم أن : $0\le\frac{\pi}{8}\le\frac{\pi}{2}$ اذن : $\cos\frac{\pi}{8}\ge0$ ومنه : $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt2}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$

حساب: $\sin\frac{\pi}{8}$ يمكننا استعمال احدى القواعد التالية : $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$ أو

$\sin(2a)=2\sin a\times\cos a$ أو $\cos^2 a+\sin^2 a=1$

لدينا : $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$ ونضع مثلا : $a=\frac{\pi}{8}$

ونجد : $\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos 2\frac{\pi}{8}}{2}$ يعني $\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}$ يعني $\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{2-\sqrt2}{4}$

يعني $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt2}{4}}$ أو $\sin\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2-\sqrt2}{4}}$

ولكننا نعلم أن : $0\le\frac{\pi}{8}\le\frac{\pi}{2}$ اذن : $\sin\frac{\pi}{8}\ge0$ ومنه : $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt2}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$

تمرين8: بين أن : $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=2$ $\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

الجواب : $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=\frac{\sin 3x\cos x-\sin x\cos 3x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}$

$$=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}=\frac{\sin 2x}{\sin x\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x}=2$$

تمرين9: علما أن: $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=3$ أحسب: $\tan x$ و $\sin x$ و $\cos x$

الجواب : نسعمل القواعد : $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ و $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$

$$\tan x=\frac{2\times\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{2\times3}{1-3^2}=\frac{6}{-8}=-\frac{3}{4} \quad \text{و} \quad \sin x=\frac{2\times\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{2\times3}{1+3^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$\sin x=\frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1-3^2}{1+3^2}=\frac{-8}{10}=-\frac{4}{5}$$

تمرين10: بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}$

1) $\sin^2 2x-\cos 2x-1=-2\cos^2 x\times\cos 2x$

2) $2\sin^2 x+12\cos^2 x=5\cos 2x+7$

أجوبة: 1) $\sin^2 2x-\cos 2x-1=(2\cos x\sin x)^2-2\cos^2 x+1-1$

$$4\cos^2 x\sin^2 x-2\cos^2 x=-2\cos^2 x\cos 2x$$

2) $2\sin^2 x+12\cos^2 x=2\sin^2 x+12\left(1-\sin^2 x\right)=-10\sin^2 x+12$

$$=\frac{-10}{2}(1-\cos 2x)+12=-5(1-\cos 2x)+12=5\cos 2x+7$$

تمرين11: بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}$

1) $\sin 3x=\sin x\times\left(3-4\sin^2 x\right)$

2) $\cos 3x=\cos x\left(4\cos^2 x-3\right)$

3) $\cos(4x)=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$

4) $\sin(4x)=4\sin x\left(2\cos^3 x-\cos x\right)$

5) $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$

أجوبة: 1) $\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x$

$$=2\sin x\cos^2 x+\left(1-2\sin^2 x\right)\sin x=2\sin x\left(1-\sin^2 x\right)+\left(1-2\sin^2 x\right)\sin x$$

$$=2\sin x-2\sin^3 x+\sin x-2\sin^3 x=3\sin x-4\sin^3 x=\sin x\left(3-4\sin^2 x\right)$$

2) $\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos x\cos 2x-\sin 2x\sin x$

$$=\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)+\sin x\times2\cos x\sin x=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x\sin^2 x$$

$$=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x\left(1-\cos^2 x\right)=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x+2\cos^2 x$$

$$=4\cos^3 x-3\cos x=\cos x\left(4\cos^2 x-3\right)$$

3) $\cos(4x)=\cos(2\times2x)=2\cos^2 2x-1=2\left(2\cos^2 x-1\right)^2-1$

$$=2\left(4\cos^4 x-4\cos^2 x+1\right)-1=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$$

4) $\sin(4x)=\sin(2\times2x)=2\sin 2x\cos 2x=2\times2\sin x\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)$

$$\sin(4x)=4\sin x\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)=4\sin x\left(2\cos^3 x-\cos x\right)$$

5) $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$ ؟؟

طريقة1:

$$\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos(x+2x))=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x)$$

$$=\frac{1}{4}\left(3\cos x+\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)-2\sin x\sin x\cos x\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\cos^3 x-\cos x-2\cos x+2\cos^3 x+3\cos x\right)=\frac{1}{4}\left(4\cos^3 x\right)=\cos^3 x$$

طريقة2: نستعمل صيغة تحويل جداء الى مجموع

$$\cos^3 x=\cos^2 x\times\cos x=\frac{1+\cos 2x}{2}\times\cos x=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 2x\times\cos x)$$

$$\cos^3 x=\frac{1}{2}\left(\cos x+\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)\right)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$$

ومنه : $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$

تمرين12: علما أن : $P(x)=\sin 2x-\sin x$ و $Q(x)=1+\cos x+\cos 2x$

بين أن : $Q(x)=\cos x(2\cos x+1)$ و أن $P(x)=\sin x(2\cos x-1)$

أجوبة :

$$Q(x)=1+\cos x+\cos 2x=1+\cos x+2\cos^2 x-1=\cos x+2\cos^2 x=\cos x(1+2\cos x)$$

$$P(x)=\sin 2x-\sin x=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(2\cos x-1)$$

تمرين13:

أكتب على شكل مجموع :

1) $\cos 2x\times\sin 4x$ 2) $\sin x\times\sin 3x$ 3) $\cos 4x\times\cos 6x$

أجوبة :

1) $\cos 2x\times\sin 4x=\frac{1}{2}(\sin(2x+4x)-\sin(2x-4x))=\frac{1}{2}(\sin 6x-\sin(-2x))$

$$=\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 2x)=\frac{1}{2}\sin 6x+\frac{1}{2}\sin 2x$$

2) $\sin x\times\sin 3x=\frac{1}{2}(\cos(x+3x)-\cos(x-3x))=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos(-2x))$

$$\sin x\times\sin 3x=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos(2x))=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos(2x)$$

3) $\cos 4x\times\cos 6x=\frac{1}{2}(\cos(4x+6x)+\cos(4x-6x))=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos(-2x))$

$$\cos 4x\times\cos 6x=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos(2x)$$

تمرين14: أكتب على شكل جداء: $\sin 2x+\sin 4x$

الجواب: $\sin 2x+\sin 4x=2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)$

$$\sin 2x+\sin 4x=2\sin 3x\cos(-2x)=2\sin 3x\cos 2x$$

تمرين15:

1. بين $\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)$

2. بين $\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=-2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$

3. استنتج أن : $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}}{\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}}=-\dfrac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

أجوبة: (1

$$\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{11}+\frac{7\pi}{11}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{11}-\frac{7\pi}{11}}{2}\right)$$

$$\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(-\frac{2\pi}{11}\right)=2\sin\frac{5\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}$$

(2

$$\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=2\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{11}+\frac{7\pi}{11}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{11}-\frac{7\pi}{11}}{2}\right)$$

$$\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(-\frac{2\pi}{11}\right)=-2\cos\frac{5\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11}$$

3) $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}}{\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}}=\dfrac{2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)}{-2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

$$=-\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)}\times\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}=-\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)\times\frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}=-\frac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$$

تمرين16: بين أن : $\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\tan 3x\times\tan x$

الجواب: $\cos 2x-\cos 4x=-2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-4x}{2}\right)=2\sin(3x)\sin x$

$$\cos 2x+\cos 4x=-2\cos\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)=2\cos 3x\cos x$$

ملاحظة: $\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$

$$\frac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\frac{2\sin 3x\sin x}{2\cos 3x\cos x}=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\times\frac{\sin x}{\cos x}=\tan 3x\times\tan x$$

تمرين17: بين أن : $\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=-\sin 4x\times\sin x$

الجواب : $\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=\left(\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)\left(\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)$

$$\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}=2\cos\left(\frac{\frac{5x}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}}{2}\right)=2\cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=-2\sin\left(\frac{\frac{5x}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}}{2}\right)=-2\sin(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

ومنه : $\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=2\cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\times -2\sin(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$$=-2\cos(2x)\times\sin(2x)2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)=-\sin(4x)\sin x$$

تمرين18: بين أن : $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=2\sin x\cos x(1+2\cos x)$

الجواب :

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\sin 2x+\sin x+\sin 3x=\sin 2x+2\sin 2x\cos x$$
$$=\sin 2x+2\sin 2x\cos x=\sin 2x(1+2\cos x)=2\sin x\cos x(1+2\cos x)$$

تمرين19: بين أن $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

الجواب: $a=1$ و $a=-1$.

نحسب : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

تمرين20: حل في $[0;2\pi]$ المعادلة : $\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$

الجواب: نحول أولا : $\sqrt{3}\cos x+\sin x$

$a=\sqrt{3}$ و $a=1$.

نحسب : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$$

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$$

يعني: $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

يعني: $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=2k\pi$

ومنه : $S=\left\{0;\frac{\pi}{3};2\pi\right\}$

تمرين1: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim_{x\to -1}\left(3+x-3x^2\right)$ 2) $\lim_{x\to 1}\frac{5x-1}{3x^2-x}$

أجوبة: 1) $\lim_{x\to -1} 3+x-3x^2 = 3+(-1)-3(-1)^2 = 3+(-1)-3 = -1 = l$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{5x-1}{3x^2-x} = \frac{5\times 1-1}{3(-1)^2-(-1)} = \frac{4}{3+1} = 1 = l$

تمرين2: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim_{x\to +\infty} x^6$ 2) $\lim_{x\to -\infty} x^{2014}$ 3) $\lim_{x\to -\infty} x^{2015}$ 4) $\lim_{x\to -\infty} -7x^9$

أجوبة: 1) $\lim_{x\to +\infty} x^6 = +\infty$ 2) $\lim_{x\to -\infty} x^{2014} = +\infty$

3) $\lim_{x\to -\infty} x^{2015} = -\infty$ 4) $\lim_{x\to -} -7x^9 = +\infty$

تمرين3: أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^3}$ 2) $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^5}$ 3) $\lim_{x\to -\infty}\frac{5}{x^7}$ 4) $\lim_{x\to +\infty}\frac{-4}{x^5}$ 5) $\lim_{x\to +\infty}\frac{12}{x^{2009}}$

الأجوبة : 1) $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^3} = 0^+$ 2) $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^5} = 0^-$ 3) $\lim_{x\to -\infty}\frac{5}{x^7} = 0^-$

4) $\lim_{x\to +\infty}\frac{-4}{x^5} = 0^-$ 5) $\lim_{x\to +\infty}\frac{12}{x^{2009}} = 0^+$

تمرين4: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}$ 2) $\lim_{x\to 0^-}\frac{-5}{x^3}$ 3) $\lim_{x\to 0^+}\frac{9}{x^5}$

4) $\lim_{x\to 0^-}\frac{-12}{x^4}$ 5) $\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}}$ 6) $\lim_{x\to 0^+} 3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$

الأجوبة : 1) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3} = +\infty$ 2) $\lim_{x\to 0^-}\frac{-5}{x^3} = -\infty$ 3) $\lim_{x\to 0^+}\frac{9}{x^5} +\infty$

4) $\lim_{x\to 0^-}\frac{-12}{x^4} = -\infty$ 5) $\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty$ 6) $\lim_{x\to 0^+} 3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}} = 0+7+\infty = +\infty$

تمرين5: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim_{x\to 3^+}\frac{3x+1}{2x-6}$ 2) $\lim_{x\to 3^-}\frac{3x+1}{2x-6}$

أجوبة : $\lim_{x\to 3^+} 3x+1 = 9+1 = 10$ و $\lim_{x\to 3^+} 2x-6 = 0$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$2x-6$	$-$	0	$+$

ومنه : $\lim_{x\to 3^+} 2x-6 = 0^+$ و بالتالي : $\lim_{x\to 3^+}\frac{3x+1}{2x-6} = +\infty$

2) $\lim_{x\to 3^-} 2x-6 = 0^-$ و بالتالي : $\lim_{x\to 3^-}\frac{3x+1}{2x-6} = -\infty$

تمرين6: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim_{x\to 2^+}\frac{3x-8}{2x-4}$ و $\lim_{x\to 2^-}\frac{3x-8}{2x-4}$

2) $\lim_{x\to 3^+}\frac{x-4}{-2x+6}$ و $\lim_{x\to 3^-}\frac{x-4}{-2x+6}$ 3) $\lim_{x\to 1^+}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1}$

و $\lim_{x\to 1^-}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1}$ 4) $\lim_{x\to -2^\pm}\frac{-5x^2+1}{x+2}$ 5) $\lim_{x\to 2^\pm}\frac{5x-20}{-2x+4}$

أجوبة : 1) $\lim_{x\to 2^+} 3x-8 = -2$ و $\lim_{x\to 2^+} 2x-4 = 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2x-4$	$-$	0	$+$

ومنه : $\lim_{x\to 2^+} 2x-4 = 0^+$ و بالتالي : $\lim_{x\to 2^+}\frac{3x-8}{2x-4} = -\infty$

و $\lim_{x\to 2^-} 2x-4 = 0^-$ بالتالي : $\lim_{x\to 2^+}\frac{3x-8}{2x-4} = +\infty$

2) $\lim_{x\to 3^+} x-4 = -1$ و $\lim_{x\to 3^+} -2x+6 = 0$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-2x+6$	$+$	0	$-$

ومنه : $\lim_{x\to 3^+} -2x+6 = 0^-$ و بالتالي : $\lim_{x\to 3^+}\frac{x-4}{-2x+6} = +\infty$

و $\lim_{x\to 3^-} -2x+6 = 0^+$ و بالتالي : $\lim_{x\to 3^-}\frac{x-4}{-2x+6} = -\infty$

3) $\lim_{x\to 1^+}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1} = +\infty$

$\lim_{x\to 1^+} x-9 = -8$ و $\lim_{x\to 1^+} -2x^2+3x-1 = 0$

ندرس اشارة $-2x^2+3x-1$

نلاحظ أن : 1 جذر للحدودية $-2x^2+3x-1$

اذن : هي تقبل القسمة على : $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية

نجد أن : $-2x^2+3x-1 = (x-1)(-2x+1)$

ومنه: $-2x^2+3x-1=0$ يعني $(x-1)(-2x+1)=0$ يعني $x=\frac{1}{2}$ أو $x=1$

x	$-\infty$	1/2		1	$+\infty$
$-2x^2+3x-1$	$-$	0	$+$	0	$-$

ومنه : $\lim_{x\to 1^+}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1} = +\infty$ و $\lim_{x\to 1^-}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1} = -\infty$

4) $\lim_{x\to -2^\pm}\frac{-5x^2+1}{x+2}$ لدينا $\lim_{x\to -2^+} -5x^2+1 = -19$ و $\lim_{x\to -2^+} x+2 = 0$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$

ومنه : $\lim_{x\to -2^+}\frac{-5x^2+1}{x+2} = -\infty$ و $\lim_{x\to -2^-}\frac{-5x^2+1}{x+2} = +\infty$

5) لدينا $\lim_{x\to 2^+} 5x-20 = -10$ و $\lim_{x\to 2^+} -2x+4 = 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2x+4$	$+$	0	$-$

ومنه : $\lim_{x\to 2^+}\frac{5x-20}{-2x+4} = +\infty$ و $\lim_{x\to 2^-}\frac{5x-20}{-2x+4} = -\infty$

تمرين7: أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to 0^+} 3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$

الجواب :

$\lim_{x\to0^+} 3x = 0$ و $\lim_{x\to0^+} 7 = 7$ و $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ ومنه: $\lim_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

تمرين8: أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{x\to+\infty}5x^4$ و 2) $\lim_{x\to+\infty}x^2-x$

3) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)^{2008}\times\left(x^3+1\right)^{2009}$ 4) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)\times\frac{1}{x}$ 5) $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$

أجوبة: 1) $\lim_{x\to+\infty}5x^4=5\times(+\infty)=+\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty}x^2-x=+\infty-\infty$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نرفع ال ش غ م مثلا بالتعميل :

$\lim_{x\to+\infty}x^2-x=\lim_{x\to+\infty}x(x-1)$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}x-1=+\infty$ ومنه : $\lim_{x\to+\infty}x^2-x=+\infty$

3) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)^{2008}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+1\right)^{2009}=-\infty$ ومنه :

$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)^{2008}\times\left(x^3+1\right)^{2009}=-\infty$

4) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\infty\times0$

نرفع ال ش غ م مثلا بالنشر : $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)\times\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}x+\frac{1}{x}=-\infty+0=-\infty$

5) $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{x}=-\infty$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل :

$+\infty-\infty$

نرفع ال ش غ م مثلا بالتعميل : $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)=+\infty$

تمرين9: أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{3x+7}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ 2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x^2}$ 3) $\lim_{x\to0}\frac{1}{|x|}$

أجوبة: 1) لدينا : $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{3x+7}=\frac{1}{7}$ و $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

ومنه : $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{3x+7}+\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+7}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ ومنه : $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x^2}=0$

3) $\lim_{x\to0}|x|=0^+$ ومنه : $\lim_{x\to0}\frac{1}{|x|}=+\infty$

تمرين10: أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{x\to1}\frac{4x-5}{|x-4|}$ 2) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$

أجوبة: 1) لدينا : $\lim_{x\to1}4x-5=-1$ و $\lim_{x\to1}|x-4|=3$

ومنه : $\lim_{x\to1}\frac{4x-5}{|x-4|}=-\frac{1}{3}$

2) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$ لدينا : $\lim_{x\to2}x^2-4=0$ و $\lim_{x\to2}x-2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2^2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x+2=4$$

تمرين11: أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-9}$ 2) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}$

3) $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}$ 4) $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}$ 5) $\lim_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}$

6) $\lim_{x\to1}\frac{2x^3+x^2-3}{2x^2+x-3}$ 7) $\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x-2}$ 8) $\lim_{x\to0}\frac{-9}{\sqrt{x}}$

أجوبة: 1) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$ لدينا : $\lim_{x\to3}x^2-9=0$ و $\lim_{x\to3}x-3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-3^2}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to3}x+3=6$$

2) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}$ لدينا : $\lim_{x\to\frac{1}{2}}4x^2-1=0$ و $\lim_{x\to\frac{1}{2}}2x-1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x)^2-1^2}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(2x+1)}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}2x+1=2$$

3) $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}$ لدينا : $\lim_{x\to3}x-3=0$ و $\lim_{x\to3}x^2-2x-3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 3 جذر للحدودية x^2-2x-3

اذن : هي تقبل القسمة على : $x-3$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن : $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{4}$$

4) $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}$ لدينا : $\lim_{x\to1}2x^2-5x+3=0$ و $\lim_{x\to1}x^2+2x-3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 1 جذر للحدودية $2x^2-5x+3$ و للحدودية x^2+2x-3

اذن : الحدوديتان تقبلان القسمة على : $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن : $2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$

وأن : $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{2x-3}{x+3}=\frac{-1}{4}$$

5) $\lim_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}$ لدينا : $\lim_{x\to2}3x^2-5x-2=0$ و $\lim_{x\to2}2x^2-5x+2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 2 جذر للحدودية $3x^2-5x-2$ و للحدودية $2x^2-5x+2$

اذن : الحدوديتان تقبلان القسمة على : $x-2$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن :

$3x^2-5x-2=(x-2)(3x+1)$ وأن : $2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)$

$$\lim_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(3x+1)}{(x-2)(2x-1)}=\lim_{x\to2}\frac{3x+1}{2x-1}=\frac{7}{3}$$

6) $\lim_{x\to1}\frac{2x^3+x^2-3}{2x^2+x-3}$ لدينا : $\lim_{x\to1}2x^3+x^2-3=0$ و $\lim_{x\to1}2x^2+x-3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 1 جذر للحدودية $2x^3+x^2-3$ و للحدودية $2x^2+x-3$

اذن : الحدوديتان تقبلان القسمة على : $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن :

$2x^3+x^2-3=(x-1)\left(2x^2+3x+3\right)$ وأن : $2x^2+x-3=(x-1)(2x+3)$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^3+x^2-3}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(2x^2+3x+3\right)}{(x-1)(2x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+3x+3}{2x+3}=\frac{8}{5}$$

7) $\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x-2}$ لدينا : $\lim_{x\to2}x^4-16=0$ و $\lim_{x\to2}x-2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^4-2^4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2)^2-(2^2)^2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-2^2)(x^2+2^2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)(x^2+4)=32$$

(8 $\lim_{x\to0}-\frac{9}{\sqrt{x}}=-\infty$ لأن : $\lim_{x\to0}\sqrt{x}=0^+$

تمرين12: أحسب النهاية: $\lim_{x\to+\infty}3x^2+5x-4$

الجواب: نهاية دالة حدودية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

اذن : $\lim_{x\to+\infty}3x^2+5x-4=\lim_{x\to+\infty}3x^2=+\infty$

تمرين13: أحسب النهاية: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6-x^2+1}{x^4+x-4}$

الجواب: نهاية دالة جذرية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6-x^2+1}{x^4+x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}2x^{6-4}=\lim_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$$

تمرين14: أحسب النهايات التالية :1) $\lim_{x\to+\infty}1+5x-9x^2$

(2 $\lim_{x\to-\infty}\left(-5x^3-4x+12\right)$ (3 $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5+3x^2+x}{-10x^5-x-1}$

(4 $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}$ (5 $\lim_{x\to-\infty}\frac{20x^3-7x^2+x}{10x^4-3x-6}$

(6 $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+4x^2+1}{x^8-x+3}$ (7 $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{(x-1)^2}$

أجوبة : (1 $\lim_{x\to+\infty}1+5x-9x^2=\lim_{x\to+\infty}-9x^2=-\infty$

(2 $\lim_{x\to-\infty}-5x^3-4x+12=\lim_{x\to-\infty}-5x^3=+\infty$

(3 $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5+3x^2+x}{-10x^5-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5}{-10x^5}=-\frac{5}{10}=-\frac{1}{2}$

(4 $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}-3x^3=+\infty$

(5 $\lim_{x\to-\infty}\frac{20x^3-7x^2+x}{10x^4-3x-6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{20x^3}{10x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{20}{10x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0^-$

(6 $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+4x^2+1}{x^8-x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5}{x^8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^3}=0^+$

(7 $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$

تمرين15: أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{x\to2}\sqrt{3x^2+4}$

(2 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}$ (3 $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

أجوبة : (1 $\lim_{x\to2}\sqrt{3x^2+4}=\sqrt{3\times2^2+4}=\sqrt{16}=4$

(2 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}$ لدينا: $\lim_{x\to+\infty}x+7=+\infty$ اذن : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}=+\infty$

(3 $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$ لدينا: $\lim_{x\to2}\sqrt{x-1}-1=0$ و $\lim_{x\to2}x-2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-1^2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x-1-1}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{2}$$

تمرين16: أحسب النهايات التالية :1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-5x+1}$

(2 $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-5x+7}$ (3 $\lim_{x\to+\infty}-3x\sqrt{6x^2+x-4}$ (4 $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(5 $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ (6 $\lim_{x\to1^+}\frac{1-2x}{\sqrt{x-1}}$ (7 $\lim_{x\to-3}\frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}$

(8 $\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{\sqrt{x-2}-1}$ (9 $\lim_{x\to5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$

أجوبة : (1 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-5x+1}$ لدينا: $\lim_{x\to+\infty}3x^2-5x+1=\lim_{x\to+\infty}3x^2=+\infty$

اذن : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-5x+1}=+\infty$

(2 $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-5x+7}$ لدينا : $\lim_{x\to-\infty}-5x+7=+\infty$ اذن : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-5x+7}=+\infty$

(3 $\lim_{x\to+\infty}-3x\sqrt{6x^2+x-4}$ لدينا $\lim_{x\to-\infty}-3x=-\infty$ و $\lim_{x\to}\sqrt{6x^2+x-4}=+\infty$

اذن : $\lim_{x\to+\infty}-3x\sqrt{6x^2+x-4}=-\infty$

(4 $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ لدينا: $\lim_{x\to1}\sqrt{x}-1=0$ و $\lim_{x\to1}x-1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$
$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

(5 $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ لدينا: $\lim_{x\to4}\sqrt{x}-2=0$ و $\lim_{x\to4}x-4=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$
$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

(6 $\lim_{x\to1^+}\frac{1-2x}{\sqrt{x-1}}$ لدينا : $\lim_{x\to1^+}1-2x=-1$ و $\lim_{x\to1^+}\sqrt{x-1}=0^+$ ومنه $\lim_{x\to1^+}\frac{1-2x}{\sqrt{x1}}=-\infty$

(7 $\lim_{x\to-3}\frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}$ لدينا: $\lim_{x\to-3}1-\sqrt{x+4}=0$ و $\lim_{x\to-3}x+3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to-3}\frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{\left(1-\sqrt{x+4}\right)}{(x+3)\left(1+\sqrt{x+4}\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{1^2-\left(\sqrt{x+4}\right)^2}{(x+3)\left(1+\sqrt{x+4}\right)}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{-x-3}{(x+3)\left(1+\sqrt{x+4}\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{-(x+3)}{(x+3)\left(1+\sqrt{x+4}\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{-1}{1+\sqrt{x+4}}=-\frac{1}{2}$$

(8 $\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{\sqrt{x-2}-1}$ لدينا : $\lim_{x\to3}x^2-3x=0$ و $\lim_{x\to3}\sqrt{x-2}-1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{\sqrt{x-2}-1}=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{\left(\sqrt{x-2}+1\right)\left(\sqrt{x-2}-1\right)}=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{\left(\left(\sqrt{x-2}\right)^2-1^2\right)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{x-3}=\lim_{x\to3}x\left(\sqrt{x-2}+1\right)=6$$

(9 $\lim_{x\to5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ لدينا: $\lim_{x\to5}2-\sqrt{x-1}=0$ و $\lim_{x\to5}x-5=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{\left(2-\sqrt{x-1}\right)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{2^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}{(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{5-x}{(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{-(x-5)}{(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{-1}{2+\sqrt{x-1}}=\frac{-1}{4}$$

تمرين17: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

1. أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

2. هل الدالة f تقبل نهاية عند : $x_0=1$ ؟

أجوبة : 1) ندرس اشارة $x-1$: $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}, x>1 \\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{-(x-1)}, x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}, x>1 \\ f(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}, x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=x+1, x>1 \\ f(x)=-(x+1), x<1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} x+1=2$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} -(x+1)=-2$

2) نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ ومنه الدالة f

لا تقبل نهاية عند : $x_0=1$

تمرين18: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=\dfrac{x^2-16}{|x-4|}$

1. أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to4^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)$

2. هل الدالة f تقبل نهاية عند : $x_0=4$ ؟

أجوبة : 1) ندرس اشارة $x-4$: $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$

x	$-\infty$ 4 $+\infty$
$x-4$	$-$ 0 $+$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}, x>4 \\ f(x)=\dfrac{x^2-16}{-(x-4)}, x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=\dfrac{(x+4)(x-4)}{x-4}, x>4 \\ f(x)=\dfrac{(x+4)(x-4)}{-(x-4)}, x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=x+4, x>4 \\ f(x)=-(x+4), x<4 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to4^+} x+4=8$ و $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to4^-} -(x+4)=-8$

2) نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to4^+} f(x)$ ومنه

الدالة f لاتقبل نهاية عند : $x_0=4$

تمرين19: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=\dfrac{|x|}{x}+x^4$

1. أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

2. هل الدالة f تقبل نهاية عند : $x_0=0$ ؟

أجوبة :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{x}+x^4, x>0 \\ f(x)=-\dfrac{x}{x}+x^4, x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=1+x^4, x>0 \\ f(x)=-1+x^4, x<0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} 1+x^4=1$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} -1+x^4=-1$

2) نلاحظ أن: $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to4^+} f(x)$

ومنه الدالة f لاتقبل نهاية عند : $x_0=0$

تمرين20: أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{4x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{\tan 3x}$ 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 4x}$

أجوبة : 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{4x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\times\dfrac{2x}{4x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\times\dfrac{1}{2}=1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{6x}\times\dfrac{6x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{6x}\times\dfrac{3x}{\tan 3x}\times2=1\times1\times2=2$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{2x}\times\dfrac{4x}{\sin 4x}\times\dfrac{2x}{4x}=1\times1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

تمرين21: أحسب النهايات التالية : 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\tan x}$ 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 10x}{\sin 5x}$

أجوبة : 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\times3=1\times3=3$

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\times\dfrac{x}{\tan x}=1\times1=1$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 10x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 10x}{10x}\times\dfrac{5x}{\sin 5x}\times\dfrac{10x}{5x}=1\times1\times2=2$

تمرين22: أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\sin(x)$

الجواب: نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\quad -1\le\sin x\le1$

اذن: $2x-1\le\sin x+2x\le1+2x$ اذن: $2x-1\le\sin x+2x$

ونعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1=+\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\sin(x)=+\infty$

تمرين23: أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^2+\cos x$

الجواب: نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\quad -1\le\cos x\le1$

اذن: $-4x^2-1\le-4x^2+\cos x\le1-4x^2$ اذن: $-4x^2+\cos x\le1-4x^2$

ونعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-4x^2=-\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^2+\cos x=-\infty$

تمرين24: أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

الجواب: نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\quad -1\le\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\le1$

اذن: $-x^2\le x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\le x^2$ ولدينا : $\lim\limits_{x\to0} x^2=0$ و $\lim\limits_{x\to0} -x^2=0$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$

تمرين25: أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2-\cos x}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{3-\sin x}$

أجوبة: 1) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ -1\le\cos x\le1$ اذن: $-1\le-\cos x\le1$

اذن: $1\le2-\cos x\le3$ اذن: $\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2-\cos x}\le\dfrac{1}{1}$ اذن: $\dfrac{x}{3}\le\dfrac{x}{2-\cos x}\le\dfrac{x}{1}$

اذن: $\dfrac{x}{3}\le\dfrac{x}{2-\cos x}$ ونعلم أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{3}=+\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2-\cos x}=+\infty$

2) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\quad -1\le\sin x\le1$ اذن: $-1\le-\sin x\le1$

اذن: $2\le3-\sin x\le4$ اذن: $\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{3-\sin x}\le\dfrac{1}{2}$

اذن: $\dfrac{x^3}{4}\le\dfrac{x^3}{3-\sin x}\le\dfrac{x^3}{2}$ اذن :

$\dfrac{x^3}{3-\sin x}\le\dfrac{x^3}{2}$ ونعلم أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{2}=-\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{3-\sin x}=-\infty$

تمرين26: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}-2x$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$ 3) $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

أجوبة : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}-2x$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-2x=-\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نتخلص من ال ش غ م بالتعميل ب x^2 داخل الجذر مربع:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}-2x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-2x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-2x$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-2x$ لأن : $\sqrt{x^2}=|x|$ وبما أن $x\to+\infty$: فان $\sqrt{x^2}=|x|=x$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-2x=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-2\right)=+\infty\times(-1)=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+x=+\infty$

3) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x$ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+4}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}3x=+\infty$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x=+\infty$

3) ب) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+4}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}3x=-\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نتخلص من ال ش غ م بالتعميل ب x^2 داخل الجذر مربع:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+3x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+3x$$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}|x|\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+3x$ لدينا : $\sqrt{x^2}=|x|$ وبما أن $x\to-\infty$: فان $\sqrt{x^2}=|x|=-x$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x=\lim\limits_{x\to-\infty}-x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+3x=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}-3\right)=+\infty\times(-2)=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=0$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+x=+\infty$

دائما نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{\infty}{\infty}$

نعمل ب x^2 داخل الجذر مربع وب x في البسط ونجد :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{1}{2}$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x-1=+\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{\infty}{\infty}$

نعمل ب x^2 داخل الجذر مربع وب x في البسط ونجد :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

لأن : $\sqrt{x^2}=|x|$ وبما أن $x\to+\infty$: فان $\sqrt{x^2}=|x|=x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1-0}{\sqrt{1+0}}=1$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

تمرين27: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}, & x\geq -1\\ f(x)=\dfrac{x^2-3}{x}, & x<-1\end{cases}$$

1. أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$

2. هل الدالة f تقبل نهاية عند : $x_0=-1$ ؟

أجوبة : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x^2+4x+3}{x+1}$ لدينا $\lim\limits_{x\to-1^+}x^2+4x+3=0$ و $\lim\limits_{x\to-1^+}x+1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : -1 جذرللحدودية x^2+4x+3

اذن : هي تقبل القسمة على: $x+1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن : $x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x+3)(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}x+3=2$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-3}{x}=\frac{1-3}{-1}=\frac{-2}{-1}=2$$

2) نعم الدالة f تقبل نهاية عند : $x_0=-1$

لأن : $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=2$

تمارين للبحث:

تمرين1: أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^5+3x^2+x}{-10x^5-x-1}$ 　 2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^3+2x^2+1}{x^4+3x-1}$

3) $\lim_{x\to2^-} \frac{-2x+1}{x^2-x-2}$ 　 4) $\lim_{x\to2^+} \frac{-2x+1}{x^2-x-2}$

5) $\lim_{x\to-3} \frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}$ 　 6) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x$

تمرين2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}; x\geq 0 \\ f(x)=x^3; x<0 \end{cases}$$

1. أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to0^-} f(x)$
2. استنتج : $\lim_{x\to0} f(x)$

تمرين3: أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x$ 　 2) $\lim_{x\to-\infty} x-\sqrt{x^2-x}$

3) $\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2-x}$ 　 4) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{5x^2+x-1}-2x+1$

5) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{5x^2+x-1}+2x+1$ 　 6) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x-1}+x$

تمرين4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=x^3-\frac{1}{8}; x>\frac{1}{2} \\ f(x)=1-2x; x\leq\frac{1}{2} \end{cases}$$

أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

و $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)$ 　 $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron »
dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

تمرين1: ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A بحيث :

$\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

وليكن O منتصف القطعة $[BC]$

1.أنشئ صورة المثلث ABC بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

2.أنشئ صورة المثلث ABC بالدوران r' الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

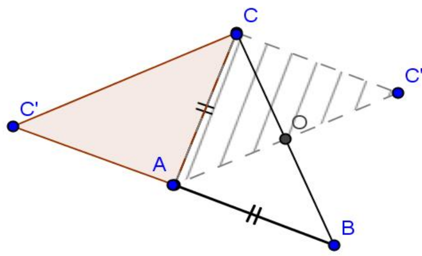
أجوبة: 1) $r(A)=A$ لأن A مركز الدوران r :

و $r(B)=C$ لأن : $\begin{cases} AB=AC \\ \left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

و $r(B)=C'$ ومنه صورة المثلث ABC بالدوران r هو المثلث ACC' :

1) $r'(A)=C$ و $r'(B)=A$ و $r'(C)=C''$

ومنه صورة المثلث ABC بالدوران r هو المثلث ACC'' :

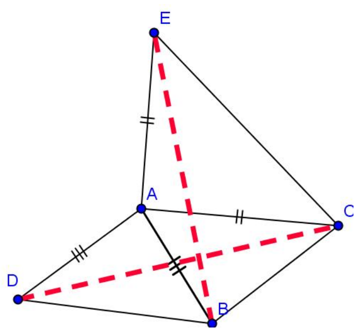


تمرين2: ABC مثلثا ننشئ خارجه مثلثين ABD و ACE متساويي الساقين وقائمي الزاوية في A

1. بين أن : $BE=CD$

2. بين أن : $(BE)\perp(CD)$

أجوبة: 1)



نعتبر الدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

لدينا : $\begin{cases} AD=AB \\ \left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ومنه : ❶ $r(D)=B$

ولدينا : $\begin{cases} AC=AE \\ \left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ومنه : ❷ $r(C)=E$

من ❶و❷ وبما أن الدوران يحافظ على المسافة فان : $BE=CD$

2) لدينا : ❶ $r(D)=B$ و ❷ $r(C)=E$ اذن :

$\left(\overline{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{EB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أن : $(BE)\perp(CD)$

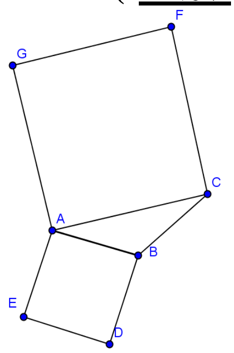
تمرين3: ABC مثلث بحيث القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ موجب .

ننشئ خارج المثلث ABC المربعين $ABDE$ و $ACFG$

نعتبر الدوران r الذي مركزه A و زاوية $\frac{\pi}{2}$

1)حدد $r(E)$ و $r(C)$ 2)بين أن : $\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}}\right)[2\pi]$

أجوبة: 1)



لدينا : $\begin{cases} AE=AB \\ \left(\overline{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ومنه : ❶ $r(E)=B$

لدينا : $\begin{cases} AC=AG \\ \left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ومنه : ❷ $r(C)=G$

ولدينا: ❸ $r(A)=A$ لأن A مركز الدوران r :

2) من ❶و❷ و❸ وبما أن الدوران يحافظ على قياس الزوايا فان : $\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}}\right)[2\pi]$

تمرين4: $ABCD$ مربع مركزه O بحيث : $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و I و J نقطتان من المستوى بحيث : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

وليكن r الدوران الذي مركزه O و زاوية $\frac{\pi}{2}$

بين أن : $OI=OJ$ وأن : $(OI)\perp(OJ)$

الجواب :

يكفي أن نبين أن : $r(I)=J$ ؟؟؟؟

نضع : $r(I)=I'$

لدينا : $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ومنه : $r(A)=B$

ولدينا : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ اذن: ❶ $\overrightarrow{BI'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ لأن الدوران الحفاظ على معامل استقامية متجهتين

ونعلم أن : $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❷

من ❶و❷ نستنتج أن : $\overrightarrow{BI'}=\overrightarrow{BJ}$ أي $I'=J$ أي $r(I)=J$

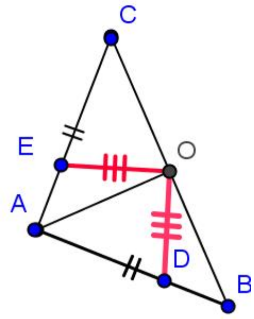
وبالتالي : $\begin{cases}OI=OJ\\ (\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

تمرين5: ABC مثلث قائم الزاوية A ومتساوي الساقين فبحيث : $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و O منتصف القطعة $[BC]$

وليكن D بحيث : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ وليكن E بحيث : $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

باعتبار الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ بين أن المثلث ODE قائم الزاوية ومتساوي الساقين في O

الجواب :



يكفي أن نبين أن : $r(E)=D$ ؟؟؟

نضع : $r(E)=E'$

لدينا : $\begin{cases}OA=OC\\ (\overline{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ ومنه : $r(C)=A$ ❶

ولدينا : $\begin{cases}OA=OB\\ (\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ ومنه : $r(A)=B$ ❷

ولدينا : $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ ❸اذن من ❶و❷ و❸:نجد أن

$\overrightarrow{AE'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❹لأن الدوران : يحافظ على معامل استقامية متجهتين

ونعلم أن : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❺

من ❹و❺ نستنتج أن : $\overrightarrow{AE'}=\overrightarrow{AD}$ أي $E'=D$ أي $r(E)=D$

وبالتالي : $\begin{cases}OE=OD\\ (\overline{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ يعني ان : أن المثلث ODE قائم الزاوية ومتساوي الساقين في O

تمرين6: $ABCD$ مربع مركزه O بحيث : $(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و (D) مستقيم يوازي المستقيم (BD) و يقطع (AD) في M و (AB) في N

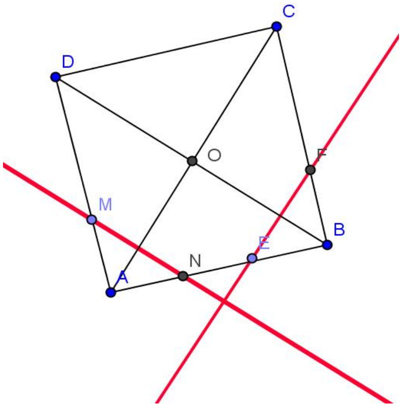
وليكن r الدوران الذي مركزه O و زاوية $\frac{\pi}{2}$

نعتبر النقطتين E و F صورتي النقطتين M و N بالدوران r على ا لتوالي.

1. أرسم الشكل و بين أن : $(EF)\perp(MN)$
2. حدد صورة المستقيم (BD) بالدوران r
3. أ)بين أن : $DN=FA$ ب)بين أن : $(EF)\|(AC)$

الأجوبة :1)

أنظر الشكل جانبه



لدينا : $r(M)=E$ ❶ و $r(N)=F$ ❷

من ❶و❷ نستنتج أن :

$(\overline{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{EF}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ أي أن : $(EF)\perp(MN)$

2) صورة المستقيم (BD) بالدوران r ؟؟؟

لدينا : $\begin{cases}0B=0C\\ (\overline{\overrightarrow{0B},\overrightarrow{OC}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ اذن : $r(B)=C$ ❶

ولدينا : $\begin{cases}0D=0A\\ (\overline{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ اذن : $r(D)=A$ ❷

من ❶و❷ نستنتج أن: $r((BD))=(AC)$

3) أ) $DN=FA$ ؟؟؟

ولدينا : $r(D)=A$ ❶ و $r(N)=F$ ❷

اذن : $DN=FA$ لأن : الدوران يحافظ على المسافة

ب)نبين أن : $(EF)\|(AC)$:

لدينا : $(MN)\|(BD)$حسب المعطيات و لدينا :

و $r((BD))=(AC)$ و $r((MN))=(EF)$

وبما أن : الدوران يحافظ على التوازي فان : $(EF)\|(AC)$

تمارين للبحث

تمرين1: $ABCD$ مربع بحيث : $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

1. حدد زاوية الدوران r الذي مركزه A و $r(D)=B$
2. حدد زاوية الدوران r' الذي مركزه C و $r'(D)=B$

تمرين2: ABC مثلث متساوي الأضلاع بحيث : $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

1.حدد زاوية الدوران r_1 الذي مركزه B و يحول A إلى C

2.حدد مركز و زاوية الدوران r_2 الذي يحول A إلى B و B إلى C.

تمرين3: $ADEF$ مربع بحيث : $(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

ننشئ خارجه المثلث CED متساوي الأضلاع

و داخله المثلث BEF متساوي الأضلاع

1. نعتبر الدوران r الذي مركزه E و زاوية $\frac{\pi}{3}$

بين أن : $r(F)=B$ و $r(D)=C$

2. لتكن A_1 النقطة بحيث : $r(A_1)=A$

a) بين أن المثلث AEA_1 متساوي الأضلاع

b) بين أن النقط : A_1 و D و F مستقيمية

c) استنتج أن النقط : A و B و C مستقيمية

تمرين1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=5x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0=1$

الجواب : $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{5x^2-5}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{5(x^2-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{5(x^2-1^2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{5(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}5(x+1)=5\times2=10$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0=1$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=10=f'(1)$ و هو العدد المشتق عند $x_0=1$

تمرين2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2-2x+1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0=2$.

الأجوبة: 1) $f(2)=2^2-2\times2+1=1$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x+1-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x=2$ ومنه f قابلة للاشتقاق عند: $x_0=1$

$2=f'(2)$ و هو العدد المشتق عند $x_0=2$

2) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=2x-3\Leftrightarrow y=1+2(x-2)\Leftrightarrow y=f(2)+f'(2)(x-2)$

تمرين3: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=x^3+|x|$

1. أحسب $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (**قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند** $x_0=0$)
2. أحسب $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (**قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند** $x_0=0$)
3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$ ؟
4. حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة f على اليمين عند $x_0=0$.
5. حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة f على اليسار عند $x_0=0$.
6. كيف نسمي النقطة $A(0,f(0))$ ؟

الأجوبة: 1) $\begin{cases} f(x)=x^3+x; x\ge0 \\ f(x)=x^3-x; x\le0 \end{cases}$ و $f(0)=0^3+|0|=0$

$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3+x-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x^2+1)}{x}=\lim_{x\to0^+}x^2+1=1$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$ و $1=f'_d(0)$

و هو العدد المشتق على اليمين عند $x_0=0$

2) $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3-x-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x^2-1)}{x}=\lim_{x\to0^+}x^2-1=-1$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=0$ و $-1=f'_g(0)$

و هو العدد المشتق على اليسار عند $x_0=0$

3)

f قابلة للاشتقاق على اليمين و على اليسار عند $x_0=0$

ولكن: $f'_d(0)\ne f'_g(0)$

ومنه: f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0=0$.

$y=f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_d): y=x\Leftrightarrow y=0+1(x-0)\Leftrightarrow y=f(0)+f'_d(0)(x-0)$

5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0=0$.

$y=f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_g): y=-x\Leftrightarrow y=0-1(x-0)\Leftrightarrow y=f(0)+f'_g(0)(x-0)$

6) لدينا $f'_d(0)\ne f'_g(0)$ النقطة: $A(0;f(0))$ تسمى نقطة مزواة

تمرين4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=|x^2-1|$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0=1$
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0=1$
3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$ ؟
4. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0=1$.
5. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0=1$.
6. كيف نسمي النقطة $A(1,f(1))$ ؟

الأجوبة: $f(x)=|x^2-1|$ ندرس اشارة : x^2-1

$x^2-1=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=1$ أو $x=-1$

ومنه: $\begin{cases} f(x)=x^2-1; x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[\\ f(x)=-(x^2-1); x\in[-1;1] \end{cases}$ و $f(1)=|1^2-1|=0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x2-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1) $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1-0}{x-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}x+1=2$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=1$ و $2=f'_d(1)$

و هو العدد المشتق على اليمين عند $x_0=1$

2) $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x^2-1)-0}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}-(x+1)=-2$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$ و $-2=f'_d(1)$

و هو العدد المشتق على اليسار عند $x_0=1$

3)

f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=1$

ولكن : $f'_d(1)\neq f'_g(1)$

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$

4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0=1$.

$$y=f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$$

$$(\Delta_d): y=2x-4 \Leftrightarrow y=0+2(x-2) \Leftrightarrow y=f(1)+f'_d(1)(x-1)$$

5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0=0$.

$$y=f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$$

$$(\Delta_g): y=-2x+2 \Leftrightarrow y=0-2(x-1) \Leftrightarrow y=f(1)+f'_g(1)(x-1)$$

6) لدينا $f'_d(1)\neq f'_g(1)$ النقطة : $A(1;f(1))$ تسمى نقطة مزواة

<u>تمرين5:</u> حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=2$ 2) $f(x)=3x-5$ 3) $f(x)=x^{10}$

4) $f(x)=4x^3-\frac{1}{2}x^2-1$ 5) $f(x)=\frac{5}{x}$ 6) $f(x)=6\sqrt{x}-4$

7) $f(x)=6x^4-\cos x+3\sin x$ 8) $f(x)=\cos(7x+2)$

9) $f(x)=\frac{4}{5}\sin(5x+4)$ 10) $f(x)=3\tan x-1$

11) $f(x)=x\cos x$ 12) $f(x)=\frac{1}{2x+1}$

13) $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ 14) $f(x)=(3x+4)^3$ 15) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

<u>أجوبة :</u> 1) $f'(x)=(2)'=0$ 2) $f'(x)=(3x-5)'=3$

3) $f'(x)=\left(x^{10}\right)'=10x^{10-1}=10x^9$

4) $f'(x)=\left(4x^3-\frac{1}{2}x^2-1\right)'=4\times3x^{3-1}-\frac{1}{2}\times2x-0=12x^2-x$

5) $f'(x)=\left(\frac{5}{x}\right)'=\left(5\times\frac{1}{x}\right)'=5\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-5}{x^2}$

6) $f'(x)=\left(6\sqrt{x}-4\right)'=6\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{x}$

7)

$$f'(x)=\left(6x^4-\cos x+3\sin x\right)'=6\times4x^3+\sin x+3\cos x=24x^3+\sin x+3\cos x$$

8) $f'(x)=\cos(7x+2)'=-7\times\sin(7x+2)$

9) $f'(x)=\frac{4}{5}\sin(5x+4)'=5\frac{4}{5}\times\cos(5x+4)=4\times\cos(5x+4)$

10) $f'(x)=(3\tan x-1)'=3\times\left(1+\tan^2 x\right)-0=3\times\left(1+\tan^2 x\right)$

11) نستعمل القاعدة التالية : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$$f'(x)=(x\times\cos x)'=x'\times\cos x+x\times\cos' x=1\times\cos x-x\times\sin x=\cos x-x\sin x$$

12) نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2x+1}\right)'=-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}=-\frac{2}{(2x+1)^2}$$

13) $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)'=\frac{(3x-1)'(x+2)-(3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{3(x+2)-1\times(3x-1)}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$$

14) $f(x)=(3x+4)^3$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((3x+4)^3\right)'=3\times(3x+4)^{3-1}\times(3x+4)'=3\times3\times(3x+4)^{3-1}=9(3x+4)^2$$

15) نستعمل القاعدة التالية : $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

<u>تمرين6:</u> حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=11$ 2) $f(x)=7x+15$ 3) $f(x)=2x^3$

4) $f(x)=4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1$ 5) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6$

6) $f(x)=\frac{3}{x}$ 7) $f(x)=4\sqrt{x}-1$ 8) $f(x)=\cos 2x+3\sin 3x$

9) $f(x)=\left(3x^2+2\right)(7x+1)$ 10) $f(x)=\frac{1}{5x+7}$

11) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ 12) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$ 13) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$

14) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ 15) $f(x)=(2x-1)^7$

<u>أجوبة :</u> 1) $f'(x)=(11)'=0$ 2) $f'(x)=(7x+15)'=7$

3) $f'(x)=\left(2x^3\right)'=2\times3x^{3-1}=6x^2$

4) $f'(x)=\left(4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=4\times4x^{4-1}-\frac{1}{3}\times3x^2-1+0=16x^3-x^2-1$

5) $f'(x)=\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6\right)'=\frac{1}{5}\times5x^{5-1}-\frac{1}{4}\times4x^3-4+0=x^4-x^3-4$

6) $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=\left(3\times\frac{1}{x}\right)'=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-3}{x^2}$

7) $f'(x)=\left(4\sqrt{x}-1\right)'=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$

8) $f'(x)=\left(\cos 2x+3\sin 3x\right)'=-2\sin 2x+3\times3\cos 3x=-2\sin 2x+9\cos 3x$

9) $f(x)=\left(3x^2+2\right)(7x+1)$

نستعمل القاعدة التالية : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$$f'(x)=\left(\left(3x^2+2\right)\times(7x+1)\right)'=\left(3x^2+2\right)'\times(7x+1)+\left(3x^2+2\right)\times(7x+1)'$$

$$f'(x)=6x\times(7x+1)+7\left(3x^2+2\right)=42x^2+6x+21x^2+14=63x^2+6x+14$$

10) نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{5x+7}\right)'=-\frac{(5x+7)'}{(5x+7)^2}=-\frac{5}{(5x+7)^2}$$

11) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+8x}\right)'=\frac{\left(x^2+8x\right)'}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$$

12) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x)=\left(\frac{7x}{x^3+1}\right)'=\frac{(7x)'(x^3+1)-7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{7(x^3+1)-7x\times 3x^2}{(x^3+1)^2}$

$f'(x)=\frac{7x^3+7-21x^3}{(x^3+1)^2}=\frac{7-14x^3}{(x^3+1)^2}$

13) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$f'(x)=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2}=-\frac{\cos x}{(\sin x)^2}$

14) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}$

$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$

15) $f(x)=(2x-1)^7$ نستعمل القاعدة التالية : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$f'(x)=\left((2x-1)^7\right)'=7\times(2x-1)^{7-1}\times(2x-1)'=14(2x-1)^6$

تمرين7: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3-5x^2+4x-2$

أحسب المشتقة الأولى و الثانية و الثالثة

الجواب: $f'(x)=(x^3-5x^2+4x-2)'=3x^2-5\times 2x^1+4-0=3x^2-10x+4$

$f''(x)=(3x^2-10x+4)'=6x-10$ و $f'''(x)=(6x-10)'=6$

تمرين8: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2+2x-2$

1) حدد D_f 2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3) أدرس تغيرات 4) حدد جدول تغيرات f

الجواب: 1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+2x-2=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x-2=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x)=(x^2+2x-2)'=2x+2$

$f'(x)=0$ يعني $2x+2=0$ يعني $x=-1$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$2x+2$		$-$	0	$+$	

- اذا كانت: $x\in[-1;+\infty[$ فان : $f'(x)\geq 0$ ومنه f تزايديه
- اذا كانت: $x\in]-\infty;-1]$ فان : $f'(x)\leq 0$ ومنه f تناقصية

4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

تمرين9: حدد مطاريف الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-6x+1$

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$ و $f'(x)=(x^2-6x+1)'=2x-6$

$f'(x)=0$ يعني $2x-6=0$ يعني $x=3$

ندرس اشارة : $f'(x)$ ونحدد جدول التغيرات

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

f' تنعدم في 3 و تتغير إشارتها اذن $f(3)=-8$ مطراف للدالة f وبالضبط قيمة دنيا للدالة f

تمرين10: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2+x+1$

1) حدد D_f 2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3) أحسب مشتقة الدالة f و أدرس اشارتها 4) حدد جدول تغيرات f

5) حدد معادلة لمماس منحنى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0=1$

6) حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

7) حدد مطاريف الدالة f ان وجدت

8) أرسم (C_f) في معلم متعامد ممنظم

الأجوبة: $f(x)=2x^2+x+1$

1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2+x+1=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2+x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x)=(2x^2+x+1)'=4x+1$

$f'(x)=0$ يعني $4x+1=0$ يعني $x=-\frac{1}{4}$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$4x+1$		$-$	0	$+$	

4) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{7}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

5) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=5x-21 \Leftrightarrow y=4+5(x-5) \Leftrightarrow y=f(1)+f'(1)(x-1)$

لأن : $f(1)=4$ و $f'(1)=5$

6) أ) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيلنحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $2x^2+x+1=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=1$ و $c=1$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times 1\times 2=-7<0$

ومنه هذه المعادلة ليس لها حل: وبالتلي التمثيل المبياني لا يقطع محور الأفاصيل

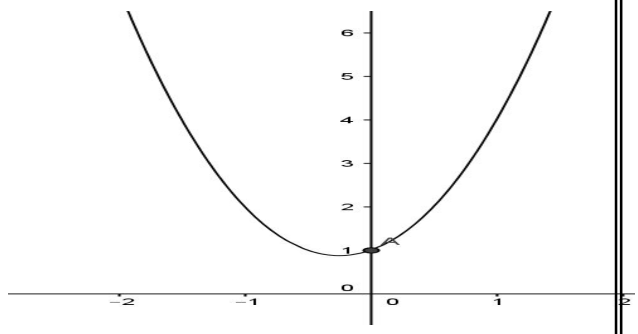
ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=1$ ومنه نقطة التقاطع هي: $A(0;1)$

7)الدالة تقبل قيمة دنيا هي : $\frac{7}{8}$

8)رسم: C_f

2-	-1	-1/4	0	1	2
7	2	7/8	1	4	11



تمرين11: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2+4x+3$

1) حدد D_f 2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3)أحسب مشتقة الدالة f و أدرس اشارتها 4) حدد جدول تغيرات f

5)حدد معادلة لمماس منحى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0=-1$

6)حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

7)حدد مطاريف الدالة f ان وجدت

8)أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و المستقيم (D) الذي معادلته $(D): y=3$ في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

9)حدد نقط تقاطع (C_f) و (D).

10)حل مبيانيا في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2+4x\geq 0$.

الأجوبة: $f(x)=x^2+4x+3$

1)الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2+4x+3=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2+4x+3=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=(x^2+4x+3)'=2x+4$

$f'(x)=0$ يعني $2x+4=0$ يعني $x=-2$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$	

اذا كانت: $x\in[-2;+\infty[$ فان : $f'(x)\geq 0$ ومنه f تزايدية

اذا كانت: $x\in]-\infty;-2]$ فان : $f'(x)\leq 0$ ومنه f تناقصية

4)نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

5) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ $x_0=-1$

$y=f(-1)+f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y=2(x+1)\Leftrightarrow y=2x+2$

لأن: $f(1)=0$ و $f'(1)=2$

6)أ)تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل

نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني $x^2+4x+3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=1$ و $b=4$ و $c=3$

$$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times3\times1=16-12=4=(2)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-4+\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{-4+2}{2\times1}=-1$ و $x_2=\frac{-4-\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{-4-2}{2\times1}=-3$

ومنه نقط التقاطع هم: $A(-1;0)$ و $B(-3;0)$

ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

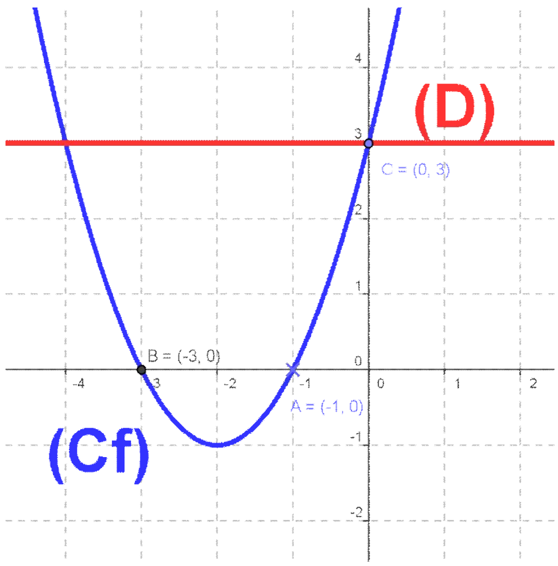
نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=3$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;3)$

7)الدالة تقبل قيمة دنيا هي : -1

8)رسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و المستقيم $(D): y=3$

x	-4	-3	-2	-1	0	1
f(x)	3	0	-1	0	3	8



9) تحديد نقط تقاطع (C_f) و (D).

نحل المعادلة : $f(x)=y$ يعني $x^2+4x+3=3$

يعني $x^2+4x=0$ يعني $x(x+4)=0$ يعني $x=0$ أو $x+4=0$

يعني $x=0$ أو $x=-4$

ومنه نقط التقاطع هم: $E(0;3)$ و $F(-4;3)$

10) $x^2+4x\geq 0\Leftrightarrow x^2+4x+3\geq 3\Leftrightarrow f(x)\geq y\Leftrightarrow$ منحنى الدالة (C_f) يوجد فوق المستقيم (D)

ومنه : $S=[-4;0]$

تمرين12: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=-x^2+2x+3$.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

2) أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

3) أحسب مشتقة الدالة f وأدرس اشارتها

4) حدد جدول تغيرات الدالة f .

5) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل.

6) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب.

7) حدد معادلة لمماس منحى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0=2$

8) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدال f

الأجوبة :

1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}-x^2+2x+3=\lim_{x\to+\infty}-x^2=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}-x^2+2x+3=\lim_{x\to-\infty}-x^2=-\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=\left(-x^2+2x+3\right)'=-2x+2$

$f'(x)=0$ يعني $-2x+2=0$ يعني $x=1$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-2x+2$	$+$	0	$-$

- اذا كانت: $x\in[1;+\infty[$ فان : $f'(x)\leq 0$ ومنه f تناقصية
- اذا كانت: $x\in]-\infty;1]$ فان : $f'(x)\geq 0$ ومنه f تزايدية

4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

5)

تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل نحل المعادلة :

$f(x)=0$ يعني $-x^2+2x+3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=-1$ و $b=2$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4\times3\times(-1)=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(2)+\sqrt{16}}{-2}=-1$ و $x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{-2}=3$

ومنه نقط التقاطع هم: $A(-1;0)$ و $B(3;0)$

6) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=3$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;3)$

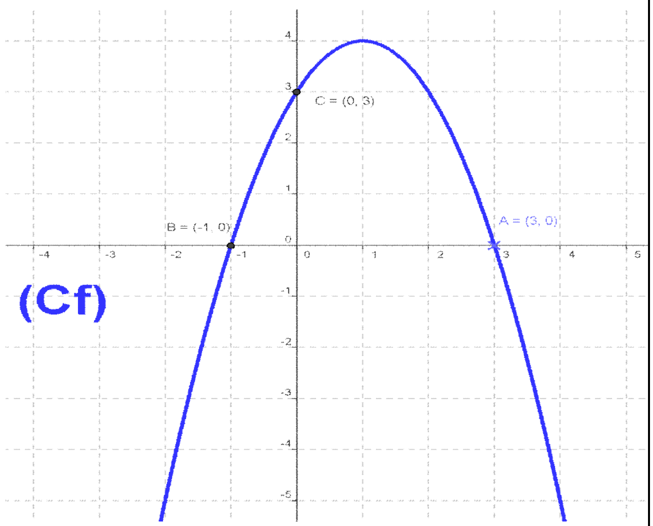
7) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ $x_0=2$

$y=f(2)+f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=3-2(x-2)\Leftrightarrow y=-2x+7$

لأن : $f(2)=3$ و $f'(2)=-2$

8) رسم: C_f

x	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	-5	0	3	4	3	0	-5



تمرين13: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+2x; x\leq 1 \\ f(x)=-\frac{2}{x}+5; x>1 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=|x|(x-1)$$

1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=1$

2) هل الدالة f قابلة للاشتقاق ؟

3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة g عند $x_0=0$

الجواب : $\begin{cases} f(x)=x^2+2x; x\leq 1 \\ f(x)=-\frac{2}{x}+5; x>1 \end{cases}$ و $f(1)=1^2+2\times1=3$

(1 $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-\frac{4}{x}+5-3}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-\frac{4}{x}+2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{-4+2x}{x}}{x-1}$

$=\lim_{x\to1^+}\frac{-4+2x}{x}\times\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-4+2x}{x}\times\frac{1}{x-1}=-\infty$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=1$

$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 1 جذر للحدودية x^2+2x-3

اذن : هي تقبل القسمة على: $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن: $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}x+3=4$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$ و $f_g'(1)=4$

2) f غير قابلة للاشتقاق على اليمين

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$

3) $g(x)=|x|(x-1)$ و $g(0)=0$ $\begin{cases} g(x)=x(x-1);\, x\ge 0 \\ g(x)=-x(x-1);\, x\le 0\end{cases}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-1)-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}x-1=-1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$ و $-1=f'_d(0)$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x(x-1)-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}-x+1=1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=0$ و $-1=g'_g(0)$

g قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$

ولكن : $g'_d(0)\neq g'_g(0)$

ومنه : g غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

تمرين14: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=2x^2-2x-3$.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

2) أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

3) أحسب مشتقة الدالة f وأدرس اشارتها

4) حدد جدول تغيرات الدالة f .

5) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل.

6) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب.

7) حدد معادلة لمماس منحنى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0=-3$

8) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

الأجوبة : 1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}2x^2-2x-3=\lim_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}2x^2-2x-3=\lim_{x\to-\infty}2x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=(2x^2-2x-3)'=4x-2$

$f'(x)=0$ يعني $4x-2=0$ يعني $x=\frac{1}{2}$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$4x-2$	$-$	0	$+$

اذا كانت: $x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ فان : $f'(x)\ge 0$ ومنه f تزايديه

اذا كانت: $x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ فان : $f'(x)\le 0$ ومنه f تناقصية

4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

5) تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل

نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني $2x^2-2x-3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=-2$ و $c=-3$

$$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times2\times(-3)=4+24=28>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{2+\sqrt{28}}{2\times2}=\frac{2+\sqrt{4\times7}}{2\times2}=\frac{2+2\sqrt{7}}{2\times2}=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ و $x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

ومنه نقط التقاطع هم : $A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2};0\right)$ و $B\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2};0\right)$

6) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=-3$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;-3)$

7) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ $x_0=-3$

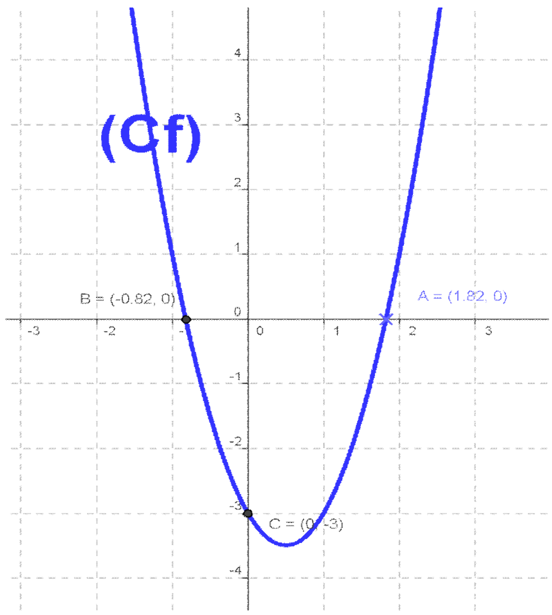
$y=f(-3)+f'(-3)(x+3)$

$y=-14x+21\Leftrightarrow y=21-14(x+3)$

لأن : $f(-3)=21$ و $f'(-3)=-14$

8) رسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

x	-2	-1	0	1/2	1	2	3
f(x)	9	1	-3	-7/2	-3	1	9



تمرين15: حل المعادلة التفاضلية التالية: $y''+16y=0$

الجواب: $y''+4^2y=0\Leftrightarrow y''+16y=0$:

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+16y=0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي :

$y:x\to\alpha\cos4x+\beta\sin4x$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

تمرين16: حل المعادلات التفاضلية التالية: 1) $y''+4y=0$

2) $y''+8y=0$ 3) $y''+y=0$ 4) $9y''+16y=0$

الجواب: 1) $y''+2^2y=0\Leftrightarrow y''+4y=0$:

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+4y=0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي :

$y:x\to\alpha\cos2x+\beta\sin2x$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

(2 : $y''+\left(2\sqrt{2}\right)^2 y=0 \Leftrightarrow y''+8y=0$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+8y=0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos 2\sqrt{2}x+\beta\sin 2\sqrt{2}x$

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

(3 : $y''+y=0\Leftrightarrow y''+1^2 y=0$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+y=0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos 1x+\beta\sin 1x$

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

(4 : $y''+\left(\frac{4}{3}\right)^2 y=0\Leftrightarrow y''+\frac{16}{9}y=0\Leftrightarrow 9y''+16y=0$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+8y=0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos\frac{4}{3}x+\beta\sin\frac{4}{3}x$

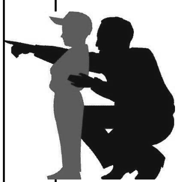
حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

ملخص لمشتقة بعض الدوال وللعمليات على الدوال المشتقة

الدالة	الدالة المشتقة f'
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
$f(x)=u+v$	$f'(x)=u'+v'$
$f(x)=u-v$	$f'(x)=u'-v'$
$f(x)=k.u$	$f'(x)=k.u'$
$f(x)=u\times v$	$f'(x)=u'\times v+u\times v'$
$f(x)=u^n$	$f'(x)=nu^n\times u'$
$f(x)=\frac{1}{u}$	$f'(x)=-\frac{u'}{u^2}$
$f(x)=\frac{u}{v}$	$f'(x)=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
$f(x)=\sqrt{u}$	$f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

لدالة	الدالة المشتقة f'
$f(x)=k$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=ax$	$f'(x)=a$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$ $n\in\mathbb{Z}^*$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos(ax+b)$	$f'(x)=-a\sin(ax+b)$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$f'(x)=a\cos(ax+b)$
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien



أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:متجهات الفضاء

المستوى : الأولى باك علوم تجريبية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: لتكن A و B و C و D أربع نقط غير مستقيمية

بين أنه اذا كان : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$ لكل M من الفضاء

فان : $ABCD$ متوازي الأضلاع.

الجواب: يكفي أن نبين مثلا أن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ؟؟؟؟

لدينا :

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$ يعني $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}$

يعني $\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ يعني $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

تمرين2: نضع : $\vec{u}=3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MD}$ لكل M من الفضاء

بين أن : المتجهة $\vec{u}$ غير مرتبطة بالنقطة M

الجواب : $\vec{u}=3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{AD}$

يعني $\vec{u}=-2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AD}$ ومنه المتجهة $\vec{u}$ غير مرتبطة بالنقطة M

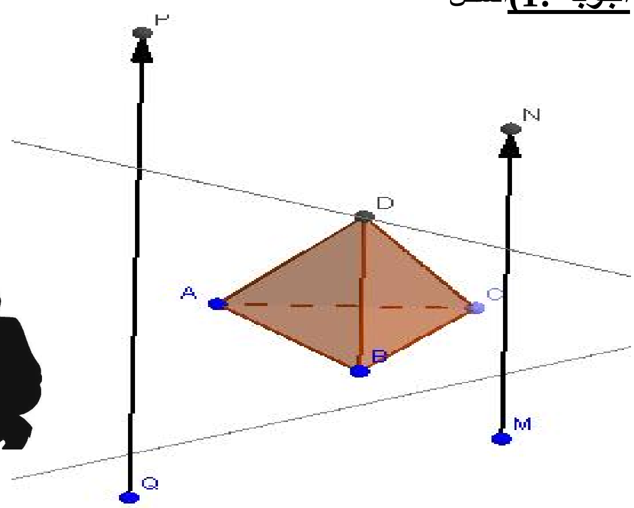
تمرين3: ليكن $ABCD$ رباعي الأوجه

نعتبر النقط M و N و P و Q أربع نقط بحيث :

$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CQ}=3\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{CD}$

1. أنشئ الشكل .
2. أكتب كلا من المتجهتين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{PQ}$ بدلالة $\overrightarrow{BD}$
3. استنتج أن المتجهتين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{PQ}$ مستقيميتان .
4. ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (MN) و (PQ)؟

أجوبة :(1 الشكل



(2 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AD}=2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=2\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}=-\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}=-3\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CB}=-3\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\right)$

$\overrightarrow{PQ}=-3\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\right)=-3\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=-3\overrightarrow{BD}$

(3 وجدنا $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{BD}$ يعني $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ ❶

ووجدنا $\overrightarrow{PQ}=-3\overrightarrow{BD}$ يعني $\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ ❷

من ❶ و ❷ نستنتج أن : $\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ أي $\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$

ومنه المتجهتين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{PQ}$ مستقيميتان .

(4 وجدنا $\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$ اذن المستقيمان (MN) و (PQ) متوازيان

تمرين4: ليكن $ABCD$ رباعي الأوجه

و M نقطة من الفضاء بحيث :

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$$

1. أكتب المتجهة $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$
2. استنتج أن النقطة M تنتمي إلى المستوى (ABC)
3. استنتج أن المتجهات $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EC}$ مستوائية .

أجوبة:(1

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}$$

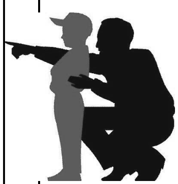
(2 وجدنا $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}$

ومنه النقطة M تنتمي إلى المستوى (ABC)

(3وجدنا $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}$

ومنه المتجهات $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستوائية

« c’est en forgeant que l’on devient forgeron » dit un proverbe.
c’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien



في كل ما يلي الفضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

تمرين1: نعتبر النقط A و B و C و D بحيث :

$\overrightarrow{OA}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ و $\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$ و

$\overrightarrow{OC}=\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$ و $\overrightarrow{AD}=3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$

1) حدد إحداثيات A و B و C و D في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

2) حدد إحداثيات المتجهات $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ في الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

أجوبة 1: $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ يعني $A(1;2;-3)$

$\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$ يعني $B(2;5;3)$

$\overrightarrow{OC}=\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$ يعني $C(1;-4;2)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}$ يعني $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OA}$

يعني $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AO}=3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}+\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}=4\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$

يعني $D(4;4;2)$

2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-(\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k})+2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}=-\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}+2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}=\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$ ومنه $\overrightarrow{AB}(1;3;6)$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=-(\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k})+\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$

$\overrightarrow{AC}=-\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}+\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}=0\vec{i}-6\vec{j}+5\vec{k}$ ومنه $\overrightarrow{AC}(0;-6;5)$

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ يعني $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}-2(0\vec{i}-6\vec{j}+5\vec{k})$

يعني $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}-2(0\vec{i}-6\vec{j}+5\vec{k})=\vec{i}+15\vec{j}-4\vec{k}$ ومنه $\vec{u}(1;15;-4)$

تمرين2: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

النقط: $A(-3;2;1)$ و $B(5;3;-1)$

1) حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$

2) حدد مثلوث إحداثيات I منتصف القطعة $[AB]$

3) أحسب المسافة AB

الجواب : 1) $\overrightarrow{AB}(5+3;3-2;-1-1)$ يعني $\overrightarrow{AB}(8;1;-2)$

2) $I\left(\frac{5+(-3)}{2};\frac{3+2}{2};\frac{-1+1}{2}\right)$ يعني $I\left(1;\frac{5}{2};0\right)$

3) $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(5+3)^2+(3-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{64+1+4}=\sqrt{69}$

تمرين3: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

المتجهات $\vec{u}(1;-1;2)$ و $\vec{v}(-2;2;-4)$ و $\vec{w}(1;1;2)$

1) أدرس استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

2) أدرس استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{w}$

الأجوبة : 1) نحسب المحددات المستخرجة: لدينا:

$\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=4-4=0$ و $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-4+4=0$ و $\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2-2=0$

ومنه المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين

2) نحسب المحددات المستخرجة: لدينا: $\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-2-2=-4\neq 0$

ومنه المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{w}$ غير مستقيميتين

تمرين4: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط

$A(1;2;1)$ و $B(2;1;3)$ و $C(-1;4;-3)$ و $D(2;3;3)$

1. أدرس استقامية النقط A و B و C
2. أدرس استقامية النقط A و B و D

الأجوبة : 1) $\overrightarrow{AB}(2-1;1-2;3-1)$ يعني $\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$

$\overrightarrow{AC}(-1-1;4-2;-3-1)$ يعني $\overrightarrow{AC}(-2;2;-4)$

نحسب المحددات المستخرجة: لدينا:

$\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=4-4=0$ و $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-4+4=0$ و $\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2-2=0$

ومنه المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتين وبالتالي النقط : A و B و C مستقيمية

2) $\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$ و $\overrightarrow{AD}(1;1;2)$

$\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-2-2=-4\neq 0$ ومنه المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مستقيميتين

وبالتالي النقط : A و B و D غير مستقيمية

تمرين5: نعتبر المتجهات $\vec{u}(-1;1;1)$ و $\vec{v}(0;-4;4)$ و $\vec{w}(-2;0;4)$

أحسب محددة المتجهات : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$

الجواب:

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & -4 & 0\\ 1 & 4 & 4\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 4 & 4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0 & -2\\ 4 & 4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0 & -2\\ -4 & 0\end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & -4 & 0\\ 1 & 4 & 4\end{vmatrix}=-1\times-16-1\times 8+1\times(-8)=16-16=0$$

تمرين6: نعتبر المتجهات $\vec{u}(1;1;1)$ و $\vec{v}(-2;1;1)$

و $\vec{w}(0;1;2)$ و $\vec{x}(0;3;3)$

و $\vec{y}(1;m;2)$ حيث m بارا متر حقيقي.

1. بين أن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{x}$ مستوائية
2. بين أن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية
3. حدد العدد m بحيث تكون المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{y}$ مستوائية

أجوبة : 1) $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{x})=\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&1&3\\1&1&3\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&3\\1&3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-2&0\\1&3\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2&0\\1&3\end{vmatrix}$

$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{x})=3-3+6-6=0$

ومنه : المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{x}$ مستوائية

2) $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-2&0\\1&2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2&0\\1&1\end{vmatrix}$

$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=1+4-2=3\neq 0$

ومنه : المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية

3) $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{y}$ مستوائية يعني

$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{y})=0$ يعني $\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&1&m\\1&1&2\end{vmatrix}=0$ يعني

$1\begin{vmatrix}1&m\\1&2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-2&1\\1&2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2&1\\1&m\end{vmatrix}=0$ يعني $6-3m=0$ يعني $m=2$

تمرين7: نعتبر النقط: $A(1;1;-2)$ و $B(0;2;-1)$ و $C(1;-3;2)$ و $D(-1;1;2)$ و $E(1;1;3)$

1. بين أن النقط A و B و C و D مستوائية
2. بين أن النقط A و B و C و E مستوائية؟

أجوبة : 1) $\overrightarrow{AB}(-1;1;1)$ و $\overrightarrow{AC}(0;-4;4)$ و $\overrightarrow{AD}(-2;0;4)$ و

$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-1&0&-2\\1&-4&0\\1&4&4\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-4&0\\4&4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0&-2\\4&4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&-2\\-4&0\end{vmatrix}=0$

ومنه : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مستوائية

و بالتالي النقط A و B و C و D مستوائية

2) $\overrightarrow{AE}(0;0;5)$

$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE})=\begin{vmatrix}-1&0&0\\1&-4&0\\1&4&5\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-4&0\\4&5\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0&0\\4&5\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&0\\-4&0\end{vmatrix}=20\neq 0$

ومنه : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}$ غير مستوائية

و بالتالي النقط A و B و C و E غير مستوائية

تمرين8: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط : $A(1;3;1)$ و $B(2;1;2)$ و $C(3;-3;1)$ و $D(2;-1;0)$ و المتجهة $\vec{u}(-1;4;1)$

1) حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (D) المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}$

2) هل النقط $B(2;1;2)$ و $C(3;-3;1)$ و $D(2;-1;0)$ تنتمي للمستقيم (D)؟

3) حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (BC)

4) أدرس الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (BC)

أجوبة : 1) $(D)\begin{cases}x=1-t\\y=3+4t\\z=1+t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$

2) $\begin{cases}2=1-t\\1=3+4t\\2=1+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t=-\frac{1}{2}\\t=-1\end{cases}$ ومنه $B\notin(D)$

$\begin{cases}3=1-t\\-3=3+4t\\1=1+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\t=-\frac{3}{2}\\t=0\end{cases}$ ومنه $C\notin(D)$ و $\begin{cases}2=1-t\\-1=3+4t\\0=1+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t=-1\\t=-1\end{cases}$ ومنه $D\in(D)$

3) المستقيم (BC) يمر من النقطة $B(2;1;2)$ و $\overrightarrow{BC}(1;-4;-1)$ متجهة موجهة له اذن $(t\in\mathbb{R})$ $(BC)\begin{cases}x=2+1t\\y=1-4t\\z=2-t\end{cases}$

4) $\overrightarrow{BC}(1;-4;-1)$ و $\vec{u}(-1;4;1)$

نلاحظ أن : $\overrightarrow{BC}=-\vec{u}$ ومنه $\overrightarrow{BC}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين

وبالتالي المستقيمين (D) و (BC) متوازيين

تمرين9: ليكن (D) و (Δ) مستقيمين من الفضاء معرفان على التوالي بتمثيليهما البرامتريان : $(t\in\mathbb{R})$ $(D)\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=1+t\end{cases}$

$(\Delta)\begin{cases}x=3+k\\y=-1+2k\\z=3-k\end{cases}\ (k\in\mathbb{R})$

بين أن المستقيمين (D) و (Δ) غير متوازيين

الجواب : $\vec{u}(1;-1;1)$ متجهة موجهة ل (D)

و $\vec{v}(1;2;-1)$ متجهة موجهة ل (Δ)

نلاحظ أن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين

وبالتالي المستقيمين (D) و (Δ) غير متوازيين

تمرين10: حدد تمثيلا بارا متريا للمستوى $P(A;\vec{u};\vec{v})$ حيث: $A(1;-3;1)$ و $\vec{u}(-2;4;1)$ و $\vec{v}(-1;0;2)$

الجواب : $(P):\begin{cases}x=1-2t-t'\\y=-3+4t\\z=1+t+2t'\end{cases}$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ و $(t'\in\mathbb{R})$

هو تمثيل بارا متريا للمستوى $P(A;\vec{u};\vec{v})$

تمرين11: حدد معادلة ديكارتيه للمستوى (P) المار من $A(1;-3;1)$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}(-2;4;1)$ و $\vec{v}(-1;0;2)$

الجواب : نلاحظ أن $\vec{u}(-2;4;1)$ و $\vec{v}(-1;0;2)$ غير مستقيميتين

$M(x;y;z)\in P(A;\vec{u};\vec{v})$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية

يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$ يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y+3;z-1)$ يعني : $\begin{vmatrix}x-1&-2&-1\\y+3&4&0\\z-1&1&2\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}4&0\\1&2\end{vmatrix}-(y+3)\begin{vmatrix}-2&-1\\1&2\end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix}-2&-1\\4&0\end{vmatrix}=0$

يعني : $8(x-1)+3(y+3)+4(z-1)=0$ يعني : $8x-8+3y+9+4z-4=0$

يعني : $(P)\ :8x+3y+4z-3=0$

تمرين12: نعتبر النقط $A(1;2;3)$ و $B(1;1;2)$ و $C(-1;2;-1)$

1) بين أن النقط A و B و C غير مستقيمية

2) أعط تمثيلا بارامتريا للمستوى (ABC)

3) أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

أجوبة : 1) $\overrightarrow{AB}(0;-1;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;0;-4)$

نحسب المحددات المستخرجة :لدينا $d_1=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & -4\end{vmatrix}=4\neq 0$

ومنه المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيميتين وبالتالي النقط : A و B و C غير مستقيمية

2)لدينا المستوى (ABC) يمر من النقطة A و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين موجهتين له

اذن : $(P):\begin{cases}x=1+0t-2t'\\ y=2-1t+0t'\\ z=3-1t-4t'\end{cases}$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ و $(t'\in\mathbb{R})$ هو تمثيل بارامتري للمستوى (ABC)

3) $M(x;y;z)\in(ABC)$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستوائية

يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y-2;z-3)$ يعني : $\begin{vmatrix}x-1 & 0 & -2\\ y-2 & -1 & 0\\ z-3 & -1 & -4\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & -4\end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix}0 & -2\\ -1 & -4\end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix}0 & -2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0$

يعني : $4(x-1)+2(y-2)-2(z-3)=0$ يعني : $4x-4+2y-4-2z+6=0$

يعني : $4x+2y-2z-2=0$ يعني : $(P):2x+y-z-1=0$

ملحوظة 1: ليكن $(Q)=P(B;\vec{u'};\vec{v'})$ و $(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$ مستويين من الفضاء لدينا :

1. إذا كان : $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u'})=0$ و $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v'})=0$

فان : (P) و (Q) منطبقان أو متوازيان قطعا.

2. إذا كان : $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u'})\neq 0$ أو $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v'})\neq 0$

فان : (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم.

ملحوظة2: ليكن (P) و (P') مستويين من الفضاء معرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$(P):ax+by+cz+d=0$ مع $(a;b;c)\neq(0;0;0)$

و $(P'):a'x+b'y+c'z+d'=0$ مع $(a';b';c')\neq(0;0;0)$

1. يكون المستويان (P) و (P') متقاطعين إذا وفقط إذا كان : $ab'-ba'\neq 0$ أو $ac'-ca'\neq 0$ أو $bc'-cb'\neq 0$.

2. يكون المستويان (P) و (P') متوازيين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم k بحيث : $a'=ka$ و $b'=kb$ و $c'=kc$.

3. يكون المستويان (P) و (P') منطبقين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم k بحيث : $a'=ka$ و $b'=kb$ و $c'=kc$ و $d'=kd$

تمرين13: ليكن (P) و (Q) مستويين من الفضاء معرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$(P):3x-3y-6z-2=0$ و $(Q):x-y-2z-3=0$

أدرس الوضع النسبي للمستويين : (P) و (Q)

الجواب: المستويان (P) و (P') متوازيين قطعا $k=3$

تمرين14: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

النقطة $A(1;1;0)$ و المتجهتين $\vec{u}(1;1;1)$ و $\vec{v}(1;-1;2)$

و المستوى (Q) الذي معادلة الديكارتية : $(Q)\ x+y-z+1=0$

1) أعط معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من A و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

2) أدرس الوضع النسبي للمستويين (Q) و (P).

الجواب : 1)نلاحظ أن $\vec{u}(1;1;1)$ و $\vec{v}(1;-1;2)$ غير مستقيميتين

$M(x;y;z)\in P(A;\vec{u};\vec{v})$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية

يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$ يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y-1;z)$ يعني : $\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 1\\ y-1 & 1 & -1\\ z & 1 & 2\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0$

يعني : $3(x-1)-(y-1)-2z=0$ يعني : $(P):3x-y-2z-2=0$

2) $(Q):x+y-z+1=0$ و $(P):3x-y-2z-2=0$

تمرين15: حدد معادلتان ديكارتيتان للمستقيم $(D)=D(A;\vec{u})$

في الحالات التالية :

1) $A(1;-1;2)$ و $\vec{u}(1;2;3)$ متجهة موجهة له.

2) $A(1;-1;3)$ و $\vec{u}(0;1;2)$ متجهة موجهة له.

الجواب : 1) $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$ يعني $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$

$$\begin{cases}\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}\\ \frac{x-1}{1}=\frac{z-2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-1)=y+1\\ 3(x-1)=z-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y-3=0\\ 3x-z-1=0\end{cases}$$

(2

$$\begin{cases}x=1\\ \frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 2(y+1)=z-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 2y-z+5=0\end{cases}$$

تمرين16: $(P):3x-y-2z-2=0$ و $(t\in\mathbb{R})$ $(D)\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\\ z=3+2t\end{cases}$

أدرس الوضع النسبي للمستوى (P) و المستقيم (D)

الجواب : $(P):x+y-z+1=0$

اذن : $(1+t)+(2-t)-(3+2t)t+1=0$ يعني $t=\frac{1}{2}$

اذن : (D) يقطع المستوى (P) في النقطة : $\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\\ y=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\\ z=3+2\frac{1}{2}=4\end{cases}$

$A\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};4\right)$ هي نقطة التقاطع

تمرين17: $(P):3x-y-2z-2=0$ و $(t\in\mathbb{R})$ $(D)\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=-2+4t\end{cases}$

أدرس الوضع النسبي للمستوى (P) و المستقيم (D)

الجواب : $(P):5x+2y-3z-10=0$

اذن : $5(1+2t)+2(-1+t)-3(-2+4t)t-10=0$ يعني $-1=0$ غير ممكن اذن : (D) و (P) متوازيان قطعا

ملاحظة: ليكن $(D)=D(A;\vec{w})$ و $(P)=P(B;\vec{u};\vec{v})$

- إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$ و $A\in(P)$ فان $(D)\subset(P)$
- إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$ و $A\notin(P)$ فان (D) يوازي قطعا (P)
- إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\neq 0$ فان (D) يخترق (P).

تمرين18: $(D)=D(A;\vec{w})$ و $(P)=P(B;\vec{u};\vec{v})$ حيث $\vec{u}(1;-1;1)$

و $\vec{v}(0;1;0)$ و $\vec{v}(0;2;0)$ و $A(0;0;-1)$ و $B(1;0;0)$

1) حدد معادلة ديكارتية للمستوى $(P)=P(B;\vec{u};\vec{v})$

2) أدرس الوضع النسبي للمستوى (P) و المستقيم (D)

الجواب : 1) نلاحظ أن $\vec{u}(1;-1;1)$ و $\vec{v}(0;1;0)$ غير مستقيميتين

$M(x;y;z)\in P(B;\vec{u};\vec{v})$ يعني $\overrightarrow{BM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية

يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$ يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$

$\overrightarrow{BM}(x-1;y;z)$ يعني : $\begin{vmatrix}x-1&1&0\\y&-1&1\\z&1&0\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}=0$

يعني : $-(x-1)-0+z=0$ يعني : $(P):-x+z+1=0$

(2 $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&1&2\\1&0&0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&0\\1&2\end{vmatrix}=0$

ولدينا $A\in(P)$ لأن:

$(P):-0-1+1=0$ ومنه $(D)\subset(P)$

تمرين1: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$f(x)=\dfrac{2x-1}{3x-6}$

حدد $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ وأول النتيجتين هندسيا

الجواب : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x-1}{3x-6}$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$3x-6$	$-$ 0 $+$

$\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-1=3$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} 3x-6=0^+$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} 3x-6=0^-$

ومنه : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$

التأويل المبياني : المستقيم ذا المعادلة $x=2$ مقارب للمنحنى (C_f)

تمرين2: نعتبر الدالة العددية f

للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\dfrac{6x+1}{2x-5}$

حدد $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ وأول النتيجتين هندسيا

الجواب : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6x}{2x}=\dfrac{6}{2}=3$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{6x}{2x}=\dfrac{6}{2}=3$

التأويل المبياني : المستقيم ذا المعادلة $y=3$ مقارب للمنحنى (C_f)

تمرين3: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة

كالتالي : $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{x-3}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. حدد معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

الجواب:

(1 $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-3\neq 0\}$

ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{3\}=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

(2 $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{x-3}$ يعني $f(x)-(2x-1)=\dfrac{1}{x-3}$

يعني $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)-(2x-1)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{+\infty}=0$ ومنه المستقيم

ذا المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

تمرين4: نعتبر الدالة العددية f المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x}$

أحسب $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ وأول هندسيا النتيجة

الجواب : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

تمرين5: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x

المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3$

أحسب $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ وأول هندسيا النتيجة

الجواب : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty} x^2=+\infty$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

تمرين6: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة

كالتالي : $f(x)=\sqrt{x}-x$

1. حدد حيز تعريف الدالة f و أحسب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$
2. حدد طبيعة الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f

الجواب : (1 $D_f=\mathbb{R}^+$

(2 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}-x=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)=-\infty$

(3 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x}-x}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x}-1=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1=\dfrac{1}{+\infty}-1=-1=a$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)-ax=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)-(-1)x=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)+x=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}=+\infty$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم

ذي المعادلة $y=-x\Leftrightarrow y=(-1)x$ بجوار $+\infty$

تمرين7: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$

كالتالي : $f(x)=\dfrac{1}{12}x^4-2x^2+x+\dfrac{2}{3}$

1. أحسب $f''(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$
2. أدرس تقعر المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع تحديد نقطتي انعطافه

الجواب : (1

$f'(x)=\left(\dfrac{1}{12}x^4-2x^2+x+\dfrac{2}{3}\right)'=\dfrac{1}{12}4\times x^3-4x+1=\dfrac{1}{3}x^3-4x+1$

$f''(x)=\left(\dfrac{1}{3}x^3-4x+1\right)'=x^2-4$

(2 $f''(x)=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow x^2-2^2=0\Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ أو $x=-2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x2-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب الموجبة على المجال: $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$
- تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب الموجبة على المجال: $[-2,2]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

نقطتي انعطافه $A(1,f(1))$ و $B(-1,f(-1))$

تمرين8: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x-x^2}$

1. حدد حيز تعريف الدالة f
2. بين أن المستقيم $x=\frac{1}{2}$ محور تماثل للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f

الجواب:

1) $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-x^2\ge 0\}$

$x-x^2=0 \Leftrightarrow x(1-x)=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $x=1$

ومنه جدول الاشارة :

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$x-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

ومنه: $D_f=[0,1]$

2) $x=a$ يعني $x=\frac{1}{2}$

أ) نبين أنه : اذا كانت $x\in[0,1]$ فان : $1-x\in[0,1]$ ؟؟؟

$x\in[0,1] \Leftrightarrow 0\le x\le 1 \Leftrightarrow -1\le -x\le 0 \Leftrightarrow 1-1\le 1-x\le 1+0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0\le 1-x\le 1 \Leftrightarrow 1-x\in[0,1]$

ب) نبين أن : $f(1-x)=f(x)$ ؟؟؟؟

$f(1-x)=\sqrt{(1-x)-(1-x)^2}=\sqrt{1-x-(1-2x+x^2)}$

$=\sqrt{1-x-1+2x-x^2}=\sqrt{x-x^2}=f(x)$

ومنه $x=\frac{1}{2}$ محور تماثل منحنى الدالة f .

تمرين9: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{x^2-x}{x+1}$

1. بين أن $\forall\in D_f\ f(x)=x-2+\frac{2}{x+1}$
2. بين أن النقطة $\Omega(-1;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

الجواب : 1) $f(x)=\frac{x^2-x}{x+1}=\frac{(x-2)(x+1)+2}{x+1}=x-2+\frac{2}{x+1}$

2) $\Omega(-1;-3)$ $\Omega(a;b)$

أ) نبين أنه : اذا كانت $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ فان : $-2-x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ ؟؟؟

$x\in\mathbb{R}-\{-1\} \Leftrightarrow x\ne -1 \Leftrightarrow -x\ne 1 \Leftrightarrow -2-x\ne -2+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2-x\ne -1 \Leftrightarrow -2-x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

ب) نبين أن : $f(-2-x)+f(x)=-6=2b$ ؟؟؟؟

$f(-4-x)+f(x)=-4-x-1+\frac{1}{-4-x+2}+x-1+\frac{1}{x+2}$

$=-4-2+\frac{1}{-x-2}+\frac{1}{x+2}=-6+-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}=-6$

ومنه $\Omega(-2;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

تمرين10: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2+4x+3$

2) حدد D_f 2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3) أحسب مشتقة الدالة f و أدرس اشارتها 4) حدد جدول تغيرات f

5) حدد معادلة لمماس منحى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0=-1$

6) حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

7) حدد مطاريف الدالة f ان وجدت

8) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و المستقيم (D) الذي معادلته $(D): y=3$ في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

9) حدد نقط تقاطع (C_f) و (D) .

10) حل مبيانيا في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2+4x\ge 0$.

الأجوبة : $f(x)=x^2+4x+3$

1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2+4x+3=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2+4x+3=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=(x^2+4x+3)'=2x+4$

$f'(x)=0$ يعني $2x+4=0$ يعني $x=-2$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2x+4$	$-$	0	$+$

اذا كانت: $x\in[-2;+\infty[$ فان : $f'(x)\ge 0$ ومنه f تزايدية

اذا كانت: $x\in]-\infty;-2]$ فان : $f'(x)\le 0$ ومنه f تناقصية

4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

5) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ $x_0=-1$

$y=f(-1)+f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y=2(x+1) \Leftrightarrow y=2x+2$

لأن : $f(1)=0$ و $f'(1)=2$

6) أ) تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل

نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني $x^2+4x+3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=1$ و $b=4$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times3\times1=16-12=4=(2)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-4+\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{-4+2}{2\times1}=-1$ و $x_2=\frac{-4-\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{-4-2}{2\times1}=-3$

ومنه نقط التقاطع هم: $A(-1;0)$ و $B(-3;0)$

ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$

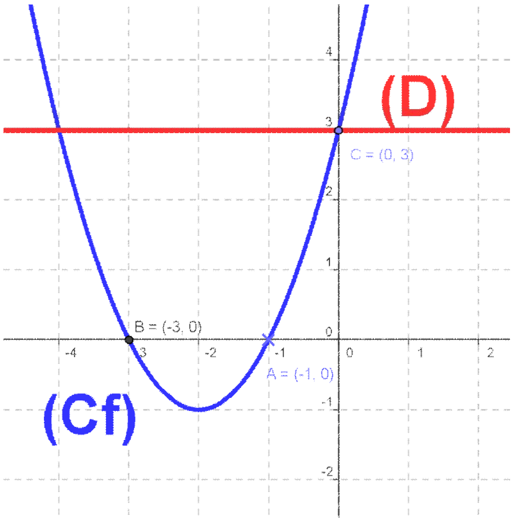
$f(0)=3$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;3)$

7) الدالة تقبل قيمة دنيا هي : -1

8) رسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

و المستقيم $(D): y=3$

x	-4	-3	-2	-1	0	1
f(x)	3	0	-1	0	3	8



9) تحديد نقط تقاطع (C_f) و (D).

نحل المعادلة : $f(x)=y$ يعني $x^2+4x+3=3$

يعني $x^2+4x=0$ يعني $x(x+4)=0$ يعني $x=0$ أو $x+4=0$

يعني $x=0$ أو $x=-4$

ومنه نقط التقاطع هم : $E(0;3)$ و $F(-4;3)$

10) $x^2+4x\geq 0 \Leftrightarrow x^2+4x+3\geq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)\geq y \Leftrightarrow$ منحنى الدالة (C_f)

يوجد فوق المستقيم (D) ومنه : $S=[-4;0]$

تمرين11: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أدرس زوجية الدالة f
3. أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f
4. أدرس الفروع اللانهاية لمنحنى الدالة f
5. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها
6. حدد جدول تغيرات الدالة f
7. حدد معادلة لمماس المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في النقطة A التي أفصولها $x_0=-1$
8. حدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.
9. حدد مطا ريف الدالة f اذا وجدت
10. أرسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

أجوبة : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$ (1 $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2)أ) اذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان $-x\in\mathbb{R}$

ب) $f(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-4(-x)=-\frac{1}{3}x^3-4(-x)=-\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)=-f(x)$

ومنه f دالة فردية

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

لأن نهاية دالة حدودية عند مالانهايةهي نهاية حدها الأكبر درجة

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^2=+\infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}x^2=+\infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

5) $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)'=\frac{1}{3}3\times x^2-4=x^2-4$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2-2^2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ أو $x=-2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x2-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(6

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$16/3$	$\searrow$	$-16/3$	$\nearrow$	$+\infty$

7)معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0=-1$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $f(-1)=\frac{11}{3}$ و $f'(-1)=-3$

$y=f(-1)+f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y=\frac{11}{3}-3(x+1) \Leftrightarrow y=-3x+\frac{2}{3}$

8) أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\frac{1}{3}x^3-4x=0$

يعني $x\left(\frac{1}{3}x^2-4\right)=0$ يعني $x=0$ أو $\frac{1}{3}x^2-4=0$

يعني $x=0$ أو $x^2=12$ يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{12}$ أو $x=-\sqrt{12}$

يعني $x=0$ أو $x=2\sqrt{3}$ أو $x=-2\sqrt{3}$

ومنه نقط التقاطع هم : $A(2\sqrt{3};0)$ و $B(-2\sqrt{3};0)$ و $O(0;0)$

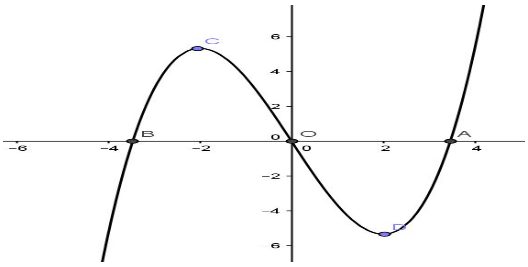
ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ لدينا $f(0)=0$ ومنه نقطة التقاطع هي: $O(0;0)$

9) $f(2)=-\frac{16}{3}$ هي قيمة دنيا للدالة f

$f(-2)=\frac{16}{3}$ هي قيمة قصوى للدالة f

9)التمثيل المبياني للدالة f



تمرين12: نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة g.
2. أحسب نهايات الدالة g في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
3. أحسب الدلة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g.
4. أنشئ منحنى الدالة g.

الحل: 1)حيز تعريف الدالة g هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1\}$ و منه $D=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x+1}{x+1}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2x+1}{x+1}=+\infty$

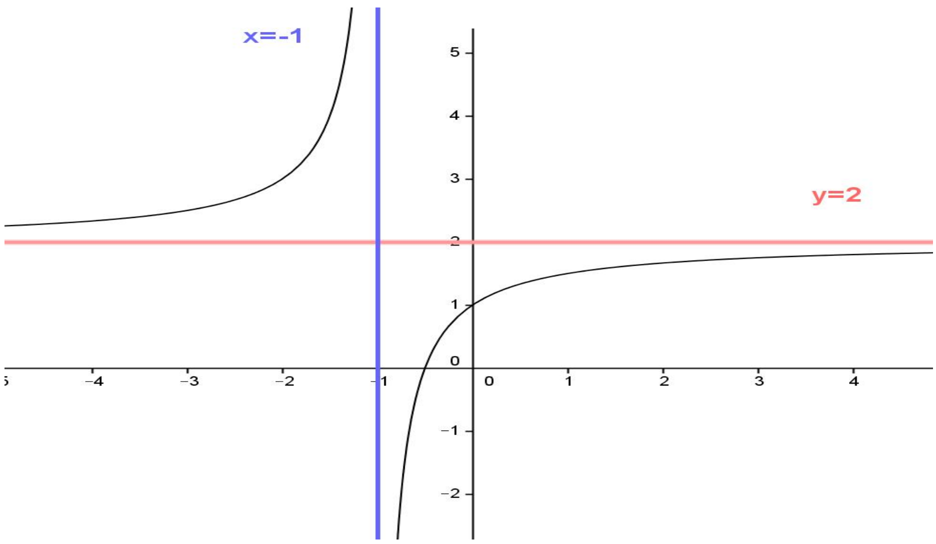
يعني المستقيم ذا العادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى.

3)لكل x من D لدينا: $g'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ يعني: $(\forall x\in D)\ g'(x)>0$

جدول تغيرات الدالة.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	||	$+$
$g(x)$	$2 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 2$

منحنى الدالة g.



تمرين13: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

و $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)$

3) أحسب مشتقة الدالة f وأدرس إشارتها

4) حدد جدول تغيرات الدالة f.

5) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل.

6) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب.

7) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

الأجوبة :

1)حيز تعريف الدالة f هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2\}$

و منه $D=]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad$ $+\infty$
$x+2$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{2x+3}{x+2}=-\infty$$

و $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{2x+3}{x+2}=+\infty$

يعني المستقيم ذا العادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحنى.

3) **__طريقة 1 :__**

$f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

لكل x من D لدينا:

$$g'(x)=\left(\frac{2x+3}{x+2}\right)'=\frac{(2x+3)'(x+2)-(2x+3)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{2(x+2)-1\times(2x+3)}{(x+2)^2}$$

$f'(x)=\frac{2x+4-2x-3}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+2)^2}>0$ لكل x من D

__طريقة 2 :__ لكل x من D لدينا: $f'(x)=\frac{\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+2)^2}$

يعني: $(\forall x\in D)\ f'(x)>0$

4) __جدول تغيرات الدالة.__

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 2$

5) تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل نحل المعادلة :

$f(x)=0$ يعني $\frac{2x+3}{x+2}=0$ يعني $2x+3=0$

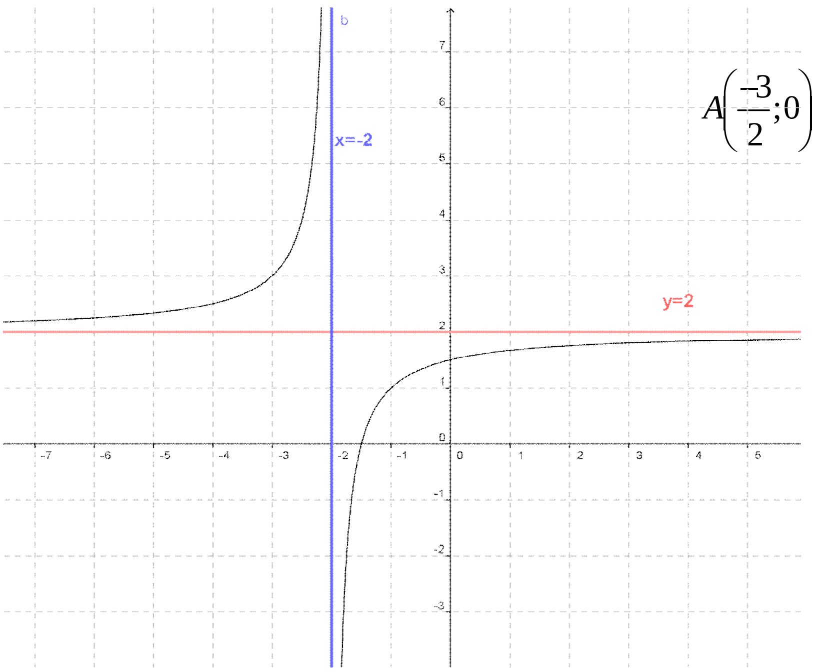
يعني $x=\frac{-3}{2}$ ومنه نقطة التقاطع مع محور الأفاصيلهي: $A\left(\frac{-3}{2};0\right)$

6) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور

الأراتيبنحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=\frac{3}{2}$ ومنه نقطة التقاطع هي: $B\left(0;\frac{3}{2}\right)$

7) رسم: C_f



تمرين14: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{4x^2+2x-2}$

1. حدد D_f و حدد $f'(x)$
2. أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. بين : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$ و أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x$
4. أستنتج معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

أجوبة: (1 $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/4x^2+2x-2\geq 0\right\}$

$$2x^2+x-1=0 \Leftrightarrow 4x^2+2x-2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{-1+3}{2\times2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ **و** $x_2=\frac{-4}{4}=-1$ ومنه جدول الاشارة :

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$4x^2+2x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه: $D_f=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$$f'(x)=\left(\sqrt{4x^2+2x-2}\right)'=\frac{\left(4x^2+2x-2\right)'}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{8x+2}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{4x+1}{\sqrt{4x^2+2x-2}}$$

(2 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}$

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}4x^2+2x-2=\lim\limits_{x\to-\infty}4x^2=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

(3 $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}$$

لدينا : $x\to-\infty$ ومنه : $|x|=-x$

ومنه

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}=-\sqrt{4}=-2=a$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+2x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}+2x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+2x-2-4x^2}{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}+2\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{-\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}+2\right)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}=b$$

(4ومنه : $y=ax+b$ أي $y=-2x-\frac{1}{2}$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$