المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
للجهة الشرقية
النيابة الإقليمية - وجدة -

جمبع دروس الأولى باك علوم تجريبية
مع تمارين
وأمثلة وأنشطة محلولة

إعداد : نجيب عثماني

(أستاذ الثانوي تأهيلي الدرجة الممتازة)

السنة الدراسية : 2017/2016

« c’est en forgeant que l’on devient forgeron » dit un proverbe.
c’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien

مذكرة رقم 1 في درس المنطق 8 س

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
ـ العبارات؛ العمليات على العبارات؛ الدوال العبارية؛ المكممات، ـ الاستدلالات الرياضية: الاستدلال بالخلف؛ الاستدلال بمضاد العكس؛ الاستدلال بفصل الحالات؛ الاستدلال بالتكافؤ؛ الاستدلال بالترجع.	ـ التمكن من استعمال الاستدلال المناسب حسب الوضعية المدروسة؛ ـ التمكن من صياغة براهين واستدلالات رياضية واضحة وسليمة منطقيا.	ـ ينبغي تقريب العبارات والقوانين المنطقية وطرائق الاستدلال انطلاقا من أنشطة متنوعة ومختلفة مستقاة من الرصيد المعرفي للتلميذ ومن وضعيات رياضية سبق له التعامل معها؛ ـ ينبغي تجنب البناء النظري والإفراط في استعمال جداول الحقيقة؛ ـ إن درس المنطق لا ينتهي بانتهاء هذا الفصل بل ينبغي استثمار نتائجه، كلما سنحت الفرصة لذلك، بمختلف فصول المقرر اللاحقة.

نشاط1:

1. أنقل الجدول التالي ثم ضع العلامة "X" في الخانة المناسبة .

	صحيح	خاطئ
كل زوجي قابل للقسمة على 4		X
مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي	X	
$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$		X
اذا كان n^2 عددا فرديا فان n عدد فردي	X	
المعادلة : $x^2=-1$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$		X
جميع المستقيمات المتعامدة في الفضاء متقاطعة		X
114516مضاعف للعدد4	X	
$\left((-2)^2=-4\right)$		X

2. هل توجد من بين الجمل الواردة في الجدول أعلاه جمل صحيحة و خاطئة في آن واحد

الجواب : كل النصوص الرياضيةاما صحيحة و إما خاطئة وتسمى عبارات

I.العبارات و العمليات على العبارات

1.1. العبارات

نسمي عبارة كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا و إما خاطئا

نرمز عادة لعبارة بأحد الرموز p أو q أو r ......

غالبا ما نعبر عن حقيقة عبارة بجدول يسمى جدول حقيقة عبارة :

الرمز 1 يعني أن العبارة p صحيحة

و الرمز 0 يعني أن العبارة p خاطئة

p
1
0

1.2. العمليات على العبارات

a. نفي عبارة

نعتبر العبارة : " 3 عدد زوجي " p

ما قيمة حقيقة العبارة p حدد نفي العبارة p نرمز لها ب $\overline{p}$

ما قيمة حقيقة العبارة $\overline{p}$ إذن نفي عبارة p هو كل عبارة تكون صحيحة إذا كانت p خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت p صحيحة

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

نرمز لنفي العبارة p بالرمز $\overline{p}$ أو $\neg p$

أمثلة:

حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية:

- $p\quad \left((-2)^2=4\right)$
- $q\quad \sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

الأجوبة: p عبارة صحيحة : $\left((-2)^2\neq 4\right)\ :\ \overline{p}$

qعبارة خاطئة : $\left(\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\right)\ :\ \overline{q}$

b. عطف عبارتين

عطف عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : q و p والتي تكون صحيحة فقط ا إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا.

جدول حقيقة العطف المنطقي

p	q	p و q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

أمثلة:حدد قيمة حقيقة العبارات الآتية :

$A"\left(\sqrt{3}\geq 1\right)$ و $\left((-2)^2>3\right)"$ ، $B"\ \sqrt{2}\in Q$ و $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}>3\right)"$

الأجوبة: A عبارة صحيحة : لأنها مكونة من عبارتين صحيحتين

A عبارة صحيحة : لأنها مكونة من عبارتين صحيحتين

B عبارة خاطئة : لأنها عطف عبارة صحيحة مع خاطئة

c. فصل عبارتين

فصل عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $\left(p\right.$ أو $\left.q\right)$ والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارتان p و q خاطئتين معا.

p	q	p أو q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

أمثلة: حدد قيمة الحقيقة و العبارة النافية لكل عبارة من العبارات الآتية :

$A"\ \left(\sqrt{4}=2\right)$ أو $\left(\frac{1}{2}\in\mathbb{N}\right)"$

$B"\left((-2)^2>3\right)$ أو 3عدد فردي)"

$C"\left(\sqrt{2}\leq 1\right)$ و$\left(\pi=3.14\right)"$

الأجوبة: A عبارة صحيحة : لأن $\left(\sqrt{4}=2\right)$ عبارة صحيحة

B عبارة صحيحة : لأنها فصل عبارتين صحيحتين

Cعبارة خاطئة : لأنها فصل عبارتين خاطئتين

$\overline{A}$" $\left(\sqrt{4}\neq 2\right)$ و $\left(\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}\right)$"

$\overline{B}$" $\left((-2)^2\le 3\right)$ و 3عدد زوجي"

$\overline{C}$" $(\sqrt{2}>1)$ أو $(\pi\neq 3.14)$"

d. **استلزام عبارتين:** استلزام عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز: $(p\Rightarrow q)$ والتي تكون خاطئة فقط اذا كانت p صحيحة و q خاطئة

p	q	$(p\Rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ملاحظات

❖ العبارة: $(p\Rightarrow q)$ تقرأ: " p تستلزم q " أو " اذا كانت p فان q "

❖ العبارة : $(q\Rightarrow p)$ تسمى الاستلزام العكسي للاستلزام $(p\Rightarrow q)$

❖ للبرهان أن العبارة : $(p\Rightarrow q)$ صحيحة نفترض أن العبارة p صحيحة و نبين أن العبارة q صحيحة

مثال1: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

A" 2 عدد فردي $\Rightarrow$ $(0,1\in\mathbb{N})$"

B" $n>4 \Rightarrow n>2$"

الأجوبة: A عبارة صحيحة و B عبارة صحيحة

نشاط: أتمم ملأ الجدول التالي :

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p}$ أو q	$(p\Rightarrow q)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

نتيجة : العبارتان $(p\Rightarrow q)$ و $\overline{p}$ أو q متكافئتان

مثال2: حدد نفي العبارة الآتية :

A" $x^2=9\Rightarrow x=3$ أو $x=-3$"

e. تكافؤ عبارتين

تكافؤ عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p\Leftrightarrow q)$ والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا أو خاطئتين معا.

p	q	$(p\Leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

جدول حقيقة التكافؤ المنطقي

العبارة : $(p\Leftrightarrow q)$ تقرأ : " p تكافئ q "

أمثلة: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$(\sqrt{3}\ge 1) \Leftrightarrow ((-2)^2=4)$

$(\sqrt{5}\ge 3) \Leftrightarrow -1\in\mathbb{N}$

خاصية : العبارتان $(p\Leftrightarrow q)$ و $[(q\Rightarrow p)$ و $(p\Rightarrow q)]$ متكافئتان

II. الدالة العبارية و المكممات:

نشاط1: نعتبر التعبير التالي : $(x\in\mathbb{R});x^2-x\ge 0$

- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=2$
- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=\frac{1}{2}$
- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=-1$

الأجوبة : من أجل $x=2$ نجد : $2\ge 0$ ومنه نحصل على عبارة صحيحة

من أجل $x=2$ نجد : $-\frac{1}{4}\ge 0$ ومنه نحصل على عبارة خاطئة

من أجل $x=\frac{1}{2}$ نجد : $-\frac{1}{4}\ge 0$ ومنه نحصل على عبارة خاطئة

من أجل $x=-1$ نجد : $2\ge 0$ ومنه نحصل على عبارة صحيحة

إذن التعبير: $(x\in R);x^2-x\ge 0$ يصبح صحيحا من أجل بعض قيم x من $\mathbb{R}$ خاطئا من أجل بعض قيم x

نقول أننا أمام دالة عبارية تحتوي على متغير x ينتمي إلى المجموعة $\mathbb{R}$

نكتب : $\exists x\in\mathbb{R}/x^2-x\ge 0$ ونقرأ يوجد x من $\mathbb{R}$ بحيث $x^2-x\ge 0$

نشاط2: نعتبر التعبير التالي : $(n\in\mathbb{N});n^2\ge 0$

- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $n=2$
- هل توجد قيم ل : n لا تحقق التعبير السابق؟

الأجوبة : من أجل $n=2$ نحصل :على عبارة صحيحة

نلاحظ أننا نحصل على عبارة صحيحة مهما تكن قيمة المتغير n

نكتب : $\forall n\in\mathbb{N}/n^2\ge 0$

1) الدالة العبارية

نسمي دالة عبارية كل نص رياضي يحتوي على متغير (أو عدة متغيرات) ينتمي إلى مجموعة معلومة E حيث تصبح عبارة كلما عوضنا المتغير بعنصر من E ونرمز عادة لدالة عبارية بالرمز $A(x;y)$ أو $B(x)$ أو ....

2) العبارات المكممة

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\exists x\in E, A(x)$ " ونقرأ : " يوجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$" وتكون العبارة " $\exists x\in E, A(x)$ " صحيحة إذا وجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$

انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\forall x\in E, A(x)$ " ونقرأ : " مهما يكن x من E لدينا $A(x)$" وتكون العبارة " $\forall x\in E, A(x)$ " صحيحة إذا كانت جميع عناصر E تحقق الخاصية $A(x)$.

تمرين1: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

1. "$\forall x\in\mathbb{R}/x^2>0$"
2. " $\exists x\in\mathbb{R}, x^2-2=0$ "
3. " 5عدد فردي $\Leftrightarrow$ $\exists x\in\mathbb{R}, x^2+1=0$ "
4. " $\left(2<\sqrt{3}\right)\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\in\mathbb{N}$"
5. $(\forall x\in\mathbb{R});-1\le\cos x\le 1$
6. $(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}):n<m$
7. $2n+1$ عدد زوجي $(\exists n\in\mathbb{N})$
8. $(\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\in\mathbb{N}$
9. $(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y-x>0$
10. $(\exists! x\in\mathbb{R});2x+4=0$
11. $(\exists! x\in\mathbb{R});x^2=2$

12. $(\exists x\in\mathbb{Z});\frac{x}{4}\in\mathbb{Z}$

13. $(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y^2=x$

الأجوبة: 1) خاطئة 2) صحيحة 3) خاطئة 4) خاطئة 5) صحيحة 6) صحيحة 7) خاطئة 8) خاطئة 9) صحيحة 10) صحيحة 11) خاطئة 12) صحيحة 13) خاطئة نأخذ $x=-1$

خاصية : نفي العبارة " $\forall x\in E, A(x)$ "هو العبارة " $\exists x\in E,\overline{A(x)}$ "

نفي العبارة " $\exists x\in E, A(x)$ " هو العبارة " $\forall x\in E,\overline{A(x)}$ "

تمرين2: حدد العبارة النافية للعبارات الآتية: 1) $(\forall n\in\mathbb{N});2^n\succ 5(n+1)$

2) " $\exists x\in\mathbb{R}, x^2-2=0$ و $-\frac{3}{2}\in\mathbb{Q}$ "

3) $(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}):n<m$ 4) كل مثلث قائم الزاوية له زاوية حادة

5) توجد نافذة في المؤسسة مكسورة 6) $(\forall n\in\mathbb{Z}):n\in\mathbb{Z}\Rightarrow n\ge 0$

الأجوبة: 1) $(\exists n\in\mathbb{N}):2^n\le 5(n+1)$

2) $(\forall x\in\mathbb{R}):x^2-2\neq 0$ أو $-\frac{3}{2}\notin\mathbb{Q}$

3) $(\exists n\in\mathbb{N});(\forall m\in\mathbb{N}):n\ge m$ 4) يوجد مثلث قائم الزاوية له زاوية غيرحادة

5) كل نوافذ المؤسسة غير مكسورة 6) $(\exists n\in\mathbb{Z}):n\in\mathbb{Z}$ و $n<0$

تمرين3: حدد العبارة النافية للعبارات الآتية:

1) $P;(\forall x\in\mathbb{R}):x\neq 2\Rightarrow x^2\neq 4$

2) $Q;(\exists x\in\mathbb{R}):x<2\Rightarrow x^2\ge 2015$

الأجوبة: 1) $\overline{P};(\exists x\in\mathbb{R}):x\neq 2$ و $x^2=4$

2) $\overline{Q};(\forall x\in\mathbb{R}):x<2$ و $x^2<2015$

III. الاستدلالات الرياضية:

1. الاستدلال الاستنتاجي :

مثال : ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن: $2<x<4\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{1}{x-1}<1$

الأجوبة: نفترض أن : $2<x<4$ ونبين أن : $\frac{1}{3}<\frac{1}{x-1}<1$

لدينا : $2<x<4$ اذن : $2-1<x-1<4-1$

اذن : $1<x-1<3$ اذن : $\frac{1}{3}<\frac{1}{x-1}<1$

ومنه : $2<x<4\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{1}{x-1}<1$

تمرين4: ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن: $-2<x<\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$

الأجوبة: نفترض أن : $-2<x<\frac{1}{3}$ ونبين أن : $\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$

لدينا : $-2<x<\frac{1}{3}$ اذن: $-2+4<x+4<\frac{1}{3}+4$ اذن $2<x+4<\frac{13}{3}$

اذن $\frac{3}{13}<\frac{1}{x+4}<\frac{1}{2}$

ولدينا : $-2<x<\frac{1}{3}$ اذن $-6<3x<1$ اذن: $-1<-3x<6$

اذن $4<-3x+5<11$

ومنه : $\frac{12}{13}<\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$ ومنه $\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$

الاستدلال بالمثال المضاد :

مثال : بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

" $p\;(\forall x\in\mathbb{R}^*);x+\frac{1}{x}\ge 2$ "

الجواب : نعتبر: $x=-2$ لدينا : $-2+\frac{1}{-2}=-\frac{5}{2}<2$ اذن : p خاطئة

تمرين5: بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

p " $\forall x\in]0;1[$ و $\forall y\in]0;1[$, $0<\frac{x+y}{xy(1-xy)}<1$ "

الجواب : نعتبر: $x=\frac{1}{2}$ و $y=\frac{1}{2}$ لدينا : $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{12}}=\frac{12}{3}>1$

اذن : p خاطئة

2. الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

لكي نبرهن أن الاستلزام $(p\Rightarrow q)$ صحيح يكفي أن نبرهن أن الاستلزام المضاد للعكس $(\overline{q}\Rightarrow\overline{p})$ صحيح

مثال1: ليكن $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$ بين أن: $x+y>1\Rightarrow y>\frac{1}{2}$ أو $x>\frac{1}{2}$

الجواب: نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $x\le\frac{1}{2}$ و $y\le\frac{1}{2}\Rightarrow x+y\le 1$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $x\le\frac{1}{2}$ و $y\le\frac{1}{2}$ اذن : $x+y\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ اذن: $x+y\le 1$

ومنه : $x\le\frac{1}{2}$ و $y\le\frac{1}{2}\Rightarrow x+y\le 1$ وبالتالي : $x+y>1\Rightarrow y>\frac{1}{2}$ أو $x>\frac{1}{2}$

تمرين6: بين باستعمال الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس أنه : اذا كان : $x\in]1;+\infty[$ و $y\in]1;+\infty[$

$(x\neq y)\Rightarrow(x^2-2x\neq y^2-2y)$

الجواب: نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $x^2-2x=y^2-2y\Rightarrow x=y$ ؟؟؟؟؟

لدينا: $x^2-2x=y^2-2y\Rightarrow x^2-2x-y^2+2y=0$

$\Rightarrow x^2-y^2-2(x-y)=0\Rightarrow(x-y)(x+y)-2(x-y)=0$

$\Rightarrow(x-y)(x+y-2)=0\Rightarrow x-y=0$ أو $x+y-2\Rightarrow x=y$ أو $x+y-2=0$

ونعلم أن : $x\in]1;+\infty[$ يعني $x>1$ و: ونعلم أن : $x\in]1;+\infty[$ يعني $y>1$

ومنه $x+y>2$ يعني $x+y-2>0$ ومنه $x+y-2\neq 0$

ومنه : $x^2-2x=y^2-2y\Rightarrow x=y$

وبالتالي: $(x\neq y)\Rightarrow(x^2-2x\neq y^2-2y)$

تمرين7: ليكن : $x\in\mathbb{R}$ بين أن: $x\neq-8\Rightarrow\frac{x+2}{x+5}\neq 2$

الجواب: نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow x=-8$ ؟؟؟؟؟

لدينا: $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow x+2=2(x+5)$

$x+2=2(x+5)\Rightarrow x+2=2x+10\Rightarrow -x=8\Rightarrow x=-8$

ومنه : $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow x=-8$

تمرين8: $x\in]1;+\infty[$ و $y\in]2;+\infty[$

بين أن: $(x\neq y)\Rightarrow(x^2-3x\neq y^2-3y)$

الجواب: نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $x^2-3x=y^2-3y\Rightarrow x=y$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $x^2-3x=y^2-3y \Rightarrow x^2-3x-y^2+3y=0$

$\Rightarrow x^2-y^2-3(x-y)=0 \Rightarrow (x-y)(x+y)-3(x-y)=0$

$\Rightarrow (x-y)(x+y-3)=0 \Rightarrow x-y=0$ أو $x+y-3 \Rightarrow x=y$ أو $x+y-3=0$

ونعلم أن : $x\in]1;+\infty[$ يعني $x>1$ و: ونعلم أن : $y\in]2;+\infty[$ يعني $y>2$

ومنه $x+y>3$ يعني $x+y-3>0$ ومنه $x+y-3\neq 0$

ومنه : $x^2-3x=y^2-3y \Rightarrow x=y$

وبالتالي: $(x\neq y)\Rightarrow (x^2-3x\neq y^2-3y)$

3. الاستدلال بالتكافؤ:

يعتمد الاستدلال بالتكافؤ على القانون المنطقي التالي :

إذا كان : $(p \Leftrightarrow q)$ و $(q \Leftrightarrow r)$ فان : $(p \Leftrightarrow r)$

مثال: بين أن : $\forall(a;b)\in(\mathbb{R}^{*+})^2 \quad a+b\geq 2\sqrt{ab}$

الجواب :نستعمل الاستدلال بالتكافؤ:

$a+b\geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{ab}\geq 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0$

و هذا صحيح لأن المربع دائما موجب

وبالتالي : $\forall(a;b)\in(\mathbb{R}^{*+})^2 \quad a+b\geq 2\sqrt{ab}$

تمرين9: بين أن : $\forall x>0 , x+\frac{1}{x}\geq 2$

الجواب :نستعمل الاستدلال بالتكافؤ: $\forall x>0$

$x+\frac{1}{x}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}\geq 2$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}-2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$

والعبارة : $\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$ صحيحة لأن : المربع موجب و $\forall x>0$

و بالتالي $\forall x>0; x+\frac{1}{x}\geq 2$ صحيحة

4. الاستدلال بفصل الحالات :

مثال: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E): |3x-6|=1$

الجواب :ندرس اشارة : $3x-6$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$

الحالة 1: اذا كانت : $x\geq 2$ فان : $3x-6\geq 0$ ومنه :

$(E): |3x-6|=1$

$x=\frac{7}{3}\in S \Leftrightarrow 3x=7 \Leftrightarrow 3x-6=1 \Leftrightarrow$

الحالة 2: اذا كانت : $x\leq 2$ فان : $3x-6\leq 0$ ومنه :

$(E): |3x-6|=1$

$x=\frac{5}{3}\in S \Leftrightarrow -3x=-5 \Leftrightarrow -3x+6=1 \Leftrightarrow -(3x-6)=1 \Leftrightarrow$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\left\{\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right\}$

تمرين10: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$3+2|x-4|=x+5$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$x-4$	$-$	0	$+$

الجواب :ندرس اشارة : $x-4$

الحالة 1: اذا كانت : $x\geq 4$ فان : $x-4\geq 0$ ومنه : $|x-4|=x-4$

$x=10\in S \Leftrightarrow 3+2x-8=x+5 \Leftrightarrow 3+2|x-4|=x+5$

الحالة 2: اذا كانت : $x\leq 4$ فان : $x-4\leq 0$ ومنه : $|x-4|=-x+4$

$x=2\in S \Leftrightarrow 3-2x+8=x+5 \Leftrightarrow 3+2|x-4|=x+5$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\{2;10\}$

تمرين11: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E): x^2-|x+1|+1=0$

الجواب :ندرس اشارة : $x+1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

الحالة1: اذا كانت : $x\geq -1$ فان : $x+1\geq 0$

ومنه : $(E): x^2-|x+1|+1=0$

$x(x-1)=0 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x^2-(x+1)+1=0 \Leftrightarrow$

$x=0\in S$ أو $x=1\in S \Leftrightarrow$

الحالة2: اذا كانت : $x\leq -1$ فان: $x+1\leq 0$

ومنه : $(E): x^2-|x+1|+1=0$

$x^2+x+2=0 \Leftrightarrow x^2+(x+1)+1=0 \Leftrightarrow$ وهذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ لأن : $\Delta=-7<0$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\{0;1\}$

تمرين12: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات. بين أن : n^2+n عدد زوجي $\forall n\in\mathbb{N}$

الجواب: الحالة 1: n عدد زوجي اذن : $\exists k\in\mathbb{N}/n=2k$

$n^2+n=(2k)^2+2k=4k^2+2k=2(2k^2+k)=2k'$

ومنه : n^2+n عدد زوجي

الحالة 2: n عدد فردي اذن : $\exists k\in\mathbb{N}/n=2k+1$

$n^2+n=(2k+1)^2+2k+1=4k^2+4k+1+2k+1$

$n^2+n=4k^2+6k+2=2(2k^2+3k+1)=2k'$

ومنه : n^2+n عدد زوجي

وبالتالي : n^2+n عدد زوجي $\forall n\in\mathbb{N}$

5. الاستدلال بالخلف :

لكي نبرهن أن عبارة صحيحة نفترض أن العبارة خاطئة ونحاول الحصول على تناقض مع المعطيات

مثال1: بين باستعمال الاستدلال بالخلف أن : $\forall x\in\mathbb{R}/\frac{x^2-1}{x^2+1}\neq 1$

الجواب : نفترض أن : $\exists x\in\mathbb{R}/\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$

يعني $x^2-1=x^2+1$ يعني $-1=+1$ و هذا غير صحيح

ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي : $\forall x\in\mathbb{R}/\frac{x^2-1}{x^2+1}\neq 1$

تمرين13: $n\in\mathbb{N}$ **بين أنه اذا كان** n^2 عدد زوجي فان : n عدد زوجي

الجواب : نفترض أن : n عدد فردي أي أن : $\exists k\in\mathbb{N}/n=2k+1$

ومنه : $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1$

أي : n^2 عدد فردي و هذا يتناقض مع المعطيات : n^2 عدد زوجي

ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي : n عدد زوجي

6. الاستدلال بالترجع

لتكن $p(n)$ عبارة مرتبطة بعدد صحيح طبيعي n

لكي نبرهن أن العبارة $p(n)$ صحيحة $\forall n\in\mathbb{N}$

نمر بثلاث مراحل :

- نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$
- نفترض أن العبارة صحيحة بالنسبة ل n
- نبين أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n+1$

مثال1: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};3^n\ge 1+2n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $3^0\ge 1+2\times 0$ أي : $1\ge 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $3^n\ge 1+2n$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $3^{n+1}\ge 1+2(n+1)$ أي نبين أن : $3^{n+1}\ge 2n+3$ ؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع :

$3^n\ge 1+2n$ اذن : $3^n\times 3\ge 3\times(1+2n)$

يعني : $3^{n+1}\ge 6n+3$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $6n+3\ge 2n+1$ (يمكن حساب الفرق)

$(6n+3)-(2n+1)=6n+3-2n-1=4n+2\ge 0$

لدينا اذن : $3^{n+1}\ge 6n+3$ و $6n+3\ge 2n+1$ ومنه: $3^{n+1}\ge 2n+3$

تمرين14: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};3^n\ge 1+n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $3^0\ge 1+0$ أي : $1\ge 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $3^n\ge 1+n$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $3^{n+1}\ge 1+(n+1)$ أي نبين أن : $3^{n+1}\ge n+2$ ؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $3^n\ge 1+n$ اذن :

$3^n\times 3\ge 3\times(1+n)$

يعني : $3^{n+1}\ge 3n+3$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $3n+3\ge n+2$ (يمكن حساب الفرق)

$(3n+3)-(n+2)=3n+3-n-2=2n+1\ge 0$

لدينا اذن : $3^{n+1}\ge 3n+3$ و $3n+3\ge n+2$ ومنه: $3^{n+1}\ge n+2$

تمرين15: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};2^n\ge 1+n$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $2^0\ge 1+0$ أي : $1\ge 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $2^n\ge 1+n$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $2^{n+1}\ge 1+(n+1)$ أي نبين أن : $2^{n+1}\ge n+2$ ؟؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $2^n\ge 1+n$ اذن : $2^n\times 2\ge 2\times(1+n)$

يعني : $2^{n+1}\ge 2n+2$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $2n+2\ge n+2$ (يمكن حساب الفرق)

$(2n+2)-(n+2)=n\ge 0$

لدينا اذن : $2^{n+1}\ge 2n+2$ و $2n+2\ge n+2$ ومنه: $2^{n+1}\ge n+2$

تمرين16: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$:

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1=\frac{1\times(1+1)}{2}=\frac{1\times 2}{2}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}$ ؟؟

لدينا : $1+2+3+...+n+(n+1)=(1+2+3+...+n)+(n+1)$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

اذن : $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n\times(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$

$$1+2+3+...+n+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

لدينا اذن : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

تمرين17: بين n^3+2n يقبل القسمة على 3 مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي n

الجواب :يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/n^3+2n=3k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $0^3+2\times 0=0$ مضاعف للعدد 3 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/n^3+2n=3k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3+2(n+1)=3k'$ ؟؟؟؟؟

$$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2=$$

$$(n^3+2n)+3n^2+3n+3=3k+3(n^2+n+1)=3(k+n^2+n+1)$$

$=3(k+n^2+n+1)=3k'$ مع $k'=k+n^2+n+1$

ومنه : $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3+2(n+1)=3k'$

وبالتالي n^3+2n يقبل القسمة على 3 مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي n

تمرين18: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$: $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1^2=\frac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6}=\frac{1\times 2\times 3}{6}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$ ؟

لدينا : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=(1^2+2^2+3^2+...+n^2)+(n+1)^2$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

اذن : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)$$

$$=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right)=(n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)$$

ويمكننا أن نلاحظ أن : $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$

ومنه : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$

تمرين19: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: 1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1^3=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^3=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}\right)^2$ ؟؟

لدينا : $1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left(1^3+2^3+3^3+...+n^3\right)+(n+1)^3$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

اذن : $1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+(n+1)\right)=(n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)$$

$$=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4}=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{2^2}=^2\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

ومنه : $\forall n\in\mathbb{N}^*: 1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

تمرين20: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}: 2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $2^0=1$ و $2^{0+1}-1=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n+2^{n+1}=2^{n+2}-1$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n+2^{n+1}=\left(2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n\right)+2^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$

اذن : $=2^{n+1}-1+2^{n+1}=2\times2^{n+1}-1=2^1\times2^{n+1}-1=2^{n+2}-1$

ومنه : $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n+2^{n+1}=2^{n+2}-1$

والتالي : $\forall n\in\mathbb{N}: 2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$

تمرين21: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}: 5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $5^0=1$ و $\frac{5^{0+1}-1}{4}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $5^0+5^1+5^2...+5^n+5^{n+1}=\frac{5^{n+2}-1}{4}$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $5^0+5^1+5^2+5^3+...+5^n+5^{n+1}=\left(5^0+5^1+5^2+5^3+...+5^n\right)+5^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$

اذن : $5^0+5^1+5^2...+5^n+5^{n+1}=\frac{5^{n+1}-1}{4}+5^{n+1}$

$$=\frac{5^{n+1}-1+4\times5^{n+1}}{4}=\frac{5\times5^{n+1}-1}{4}=\frac{5^{n+2}-1}{4}$$

ومنه : $5^0+5^1+5^2...+5^n+5^{n+1}=\frac{5^{n+2}-1}{4}$

والتالي : : $5^0+5^1+5^2...+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

تمرين1:1) بين أن: $3^0+3^1+3^2...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

2) أ) بين أن : $12n+14\geq6(n+1)+7$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ب) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $2^n\geq6n+7$ $\forall n\geq6$

الجواب (1: نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $3^0=1$ و $\frac{3^{0+1}-1}{2}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $3^0+3^1+3^2...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $3^0+3^1+3^2...+3^n+3^{n+1}=\frac{3^{n+2}-1}{2}$ ؟؟

لدينا : $3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^n+3^{n+1}=\left(3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^n\right)+3^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $3^0+3^1+3^2...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$

اذن : $3^0+3^1+3^2...+3^n+3^{n+1}=\frac{3^{n+1}-1}{2}+3^{n+1}$

$$=\frac{3^{n+1}-1}{2}+3^{n+1}=\frac{3^{n+1}-1+2\times3^{n+1}}{2}=\frac{3\times3^{n+1}-1}{2}=\frac{3^{n+2}-1}{2}$$

ومنه : $3^0+3^1+3^2...+3^n+3^{n+1}=\frac{3^{n+2}-1}{2}$

والتالي : : $3^0+3^1+3^2...+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

2)أ) نبين أن : $12n+14\geq6(n+1)+7$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق :

$$(12n+14)-(6(n+1)+7)=2n+14-6n-6-7=6n+1\geq0$$

ومنه : $12n+14\geq6(n+1)+7$ $\forall n\in\mathbb{N}$

2)ب)نبين أن : $2^n\geq6n+7$ $\forall n\geq6$ ؟؟؟؟؟

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=6$

لدينا $2^6\geq6\times6+7$ لأن : $64\geq43$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=6$

المرحلة2: نفترض أن: $2^n\geq6n+7$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $2^{n+1}\geq6(n+1)+7$ ؟؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $2^n\geq6n+7$ اذن :

$$2\times2^n\geq2\times(6n+7)$$

يعني : $2^{n+1}\geq12n+14$ اذن لم نجد بعد النتيجة

وحسب السؤال 2)أ) لدينا : $12n+14\geq6(n+1)+7$ $\forall n\in\mathbb{N}$

لدينا اذن : $2^{n+1}\geq12n+14$ و $12n+14\geq6(n+1)+7$

ومنه : $2^{n+1}\geq6(n+1)+7$

وبالتالي : $2^n\geq6n+7$ $\forall n\geq6$ ؟؟؟؟؟

تمرين23:بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$.

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1\times(1+1)=1\times2=2$ و $\frac{1}{3}\times1\times(1+1)\times(1+2)=\frac{1}{3}\times2\times3=2$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)$

المرحلة3: نبين أن :

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)+(n+1)\times(n+2)=\frac{1}{3}(n+1)\times(n+2)\times(n+3)$$ ؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع :

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)$$

اذن:

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)+(n+1)\times(n+2)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)+(n+1)\times(n+2)$$

$$=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)+(n+1)\times(n+2)=(n+1)\times(n+2)\left(\frac{1}{3}n+1\right)=(n+1)\times(n+2)\left(\frac{n+3}{3}\right)$$

ومنه

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)+(n+1)\times(n+2)=\frac{1}{3}(n+1)\times(n+2)\times(n+3)$$

تمرين24: بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}$$

الجواب : نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $\frac{1}{1\times2\times3}=\frac{1}{6}$ و $\frac{1\times(1+3)}{4(1+1)\times(1+2)}=\frac{4}{4\times2\times3}=\frac{1}{6}$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن:

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}$$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن:

$$S=\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)\times(n+4)}{4(n+2)\times(n+3)}$$ ؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع :

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}$$

اذن :

$$=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{n\times(n+3)^2}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}+\frac{4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$

$$=\frac{n\times(n+3)^2+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{n\times(n^2+6n+9)+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$

يمكننا أن نبين أن : $n^3+6n^2+9n+4=(n+1)^2\times(n+4)$

ومنه: $S=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)^2\times(n+4)}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)\times(n+4)}{4\times(n+2)\times(n+3)}$

ومنه $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$

تمرين25: بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}$.

$b_n=4^{2n+2}-1$ يقبل القسمة على 15

الجواب :يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/b_n=15k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $b_0=4^{2\times0+2}-1=4^2-1=15$

مضاعف للعدد 15 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/4^{2n+2}-1=15k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/4^{2(n+1)+2}-1=15k'$ ؟؟؟؟؟

أي نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/4^{2n+4}-1=15k'$ ؟؟؟؟؟

أي نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/b_{n+1}=15k'$ ؟؟؟؟؟

نحسب مثلا : $b_{n+1}-b_n=\left(4^{2n+4}-1\right)-\left(4^{2n+2}-1\right)$

$$b_{n+1}-b_n=4^{2n+2+2}-4^{2n+2}=4^{2n+2}\left(4^2-1\right)$$

$$b_{n+1}-b_n=15\times4^{2n+1}$$

اذن : $b_{n+1}-b_n=15\times4^{2n+1}$ يعني $b_{n+1}=15\times4^{2n+1}+b_n$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $\exists k\in\mathbb{N}/b_n=15k$

ومنه $b_{n+1}=15\times4^{2n+1}+15k$ اي $b_{n+1}=15\times(4^{2n+1}+k)$

وبالتالي $\exists k'\in\mathbb{N}/b_{n+1}=15k'$

تمرين26: بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}$.

n^3-n يقبل القسمة على 6

الجواب :يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/n^3-n=6k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $0^3-0=0$ مضاعف للعدد 6 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/n^3-n=6k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3-(n+1)=6k'$ ؟؟؟؟؟

$$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=$$

$$=(n^3-n)+3n^2+3n=6k+3(n^2+n)=6k+3n(n+1)$$

ونعلم أن : $n(n+1)$ عدد زوجي لأنه جداء عددين متتاليين $n(n+1)=2m$

$$(n+1)^3-(n+1)=6k+3\times2m=6k+6m=6(k+m)=6k'$$

وبالتالي: $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3-(n+1)=6k'$

تمرين27: 1)بين أن : $11^{n+1}-1=10\times11^n+11^n-1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

2)بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن: 11^n-1 مضاعف للعدد 10 $\forall n\in\mathbb{N}$

الجواب (1:

$$11^{n+1}-1=11\times11^n-1=(10+1)\times11^n-1=10\times11^n+11^n-1$$

2) يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/11^n-1=10k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $11^0-1=1-1=0$ مضاعف للعدد 10 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/11^n-1=10k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k\in\mathbb{N}/11^{n+1}-1=10k'$ ؟؟؟؟؟

نعلم حسب 1) $11^{n+1}-1=10\times11^n+11^n-1$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $\exists k\in\mathbb{N}/11^n-1=10k$

اذن: $11^{n+1}-1=10\times11^n+10k$

اذن: $11^{n+1}-1=10\left(11^n+k\right)=10k'$ مع $k'=11^n+k$

ومنه : $11^{n+1}-1$ مضاعف للعدد 10

وبالتالي: 11^n-1 مضاعف للعدد 10 $\forall n\in\mathbb{N}$

تمرين28: نضع : $A_n=3^{2n}-2^n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) تحقق من أن : $A_{n+1}=2A_n+7\times3^{2n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

2) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن A_n مضاعف للعدد 7 $\forall n\in\mathbb{N}^*$

الجواب: 1) $A_{n+1}=3^{2(n+1)}-2^{n+1}=3^{2n+2}-2^{n+1}=3^{2n}\times3^2-2^n\times2^1$

$A_{n+1}=9\times 3^{2n}-2^n\times 2^1=(7+2)\times 3^{2n}-2^n\times 2^1=7\times 3^{2n}+2\times 3^{2n}-2^n\times 2^1$

$A_{n+1}=7\times 3^{2n}+2\times 3^{2n}-2^n\times 2^1=7\times 3^{2n}+2\left(3^{2n}-2^n\right)=7\times 3^{2n}+2\times A_n$

2) يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}^*/A_n=7k$

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $A_1=3^{2\times 1}-2^1=3^2-2=9-2=7$

مضاعف للعدد 7 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

المرحلة2: نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}^*/A_n=7k$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}^*/A_{n+1}=7k'$ ؟؟؟؟؟

حسب السؤال1) : $A_{n+1}=7\times 3^{2n}+2\times A_n$

اذن : $A_{n+1}=7\times 3^{2n}+2\times A_n=7\times 3^{2n}+2\times 7k=7\times\left(3^{2n}+2k\right)=7\times k'$

وبالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad A_n=3^{2n}-2^n$

تمرين29: ليكن a عدد حقيقي موجب قطعا

1) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};(1+a)^n\geq 1+n\times a$

2) استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N};\quad 2^n>n$

الجواب :1) نمر بثلاث مراحل :

المرحلة1: نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $(1+a)^0\geq 1+0\times a$ لأن : $1\geq 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل

$n=0$

المرحلة2: نفترض أن: $(1+a)^n\geq 1+n\times a$ صحيحة

المرحلة3: نبين أن: $(1+a)^{n+1}\geq 1+(n+1)\times a$ ؟؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $(1+a)^n\geq 1+n\times a$

اذن : $(1+a)(1+a)^n\geq(1+a)(1+n\times a)$

يعني : $(1+a)^{n+1}\geq(1+a)(1+n\times a)$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نقارن : $(1+a)(1+n\times a)$ و $1+(n+1)\times a$ (يمكن حساب الفرق)

$(1+a)(1+n\times a)-(1+(n+1)\times a)=1+na+a+na^2-1-n\times a-a$

$(1+a)(1+n\times a)-(1+(n+1)\times a)=na^2\geq 0$

اذن : $(1+a)(1+n\times a)\geq(1+(n+1)\times a)$

ومنه : $(1+a)^{n+1}\geq 1+(n+1)\times a$

وبالتالي : $\forall n\in\mathbb{N};(1+a)^n\geq 1+n\times a$

2)وجدنا : $\forall a>0;\forall n\in\mathbb{N};(1+a)^n\geq 1+n\times a$

نأخذ مثلا : $a=1$ فنجد : $\forall n\in\mathbb{N};(1+1)^n\geq 1+n\times 1$

أي : $\forall n\in\mathbb{N};2^n\geq 1+n$

ولكن نعلم أن : $\forall n\in\mathbb{N}:1+n>n$

اذن : $\forall n\in\mathbb{N};2^n>n$

مذكرة رقم 2 في درس عموميات حول الدوال

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

ـ الدالة المكبورة، الدالة المصغورة؛ الدالة المحدودة؛ الدالة الدورية؛ ـ مقارنة دالتين؛ التأويل الهندسي؛ ـ مطاريف دالة؛ ـ رتابة دالة عددية؛ ـ تركيب دالتين عدديتين؛ ـ رتابة مركب دالتين رتيبتين؛ ـ التمثيل المبياني للدالتين: $x \to \sqrt{x+a}$ و $x \to ax^3$؛	ـ مقارنة تعبيرين باستعمال مختلف التقنيات؛ ـ استنتاج تغيرات دالة أو القيم القصوية والدنوية لدالة انطلاقا من تمثيلها المبياني أو من جدول تغيراتها؛ ـ التعرف على تغيرات الدوال من الشكل $f+\lambda$ و λf انطلاقا من تغيرات الدالة f؛ ـ استعمال التمثيل المبياني لدالة أو جدول تغيراتها لتحديد صورة مجال ولحل بعض المعادلات والمتراجحات؛ ـ تحديد تغيرات gof انطلاقا من تغيرات g و f.	ـ ينبغي تعويد التلاميذ على استنتاج تغيرات دالة عددية انطلاقا من تمثيلها المبياني. كما ينبغي الاهتمام بإنشاء المنحنيات؛ ـ ينبغي تناول الحل المبياني لمعادلات ومتراجحات من النوع $f(x)=c$ و $f(x)\le c$ و $f(x)\le g(x)$ و $f(x)=g(x)$ و $f(x)<g(x)$ ـ يمكن في حدود الإمكان؛ استعمال الآلات الحاسبة والبرانم المعلوماتية المدمجة في الحاسوب والتي تمكن من دراسة الدوال؛ ـ يستحسن معالجة وضعيات مختارة تنطلق من ميادين أخرى.

I. مجموعة تعريف دالة عددية"تذكير"

أمثلة: حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي :

1) $f(x)=2x^3+x+3$ 2) $g(x)=\dfrac{3x+1}{2x^2-x-1}$ 3) $h(x)=\sqrt{2x^2-x-1}$

أجوبة: 1) $f(x)=2x^3+x+3$

يعني $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $g(x)=\dfrac{3x+1}{2x^2-x-1}$ يعني $D_g=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-x-1\neq 0\}$

$2x^2-x-1=0$ نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=-1$ و $c=-1$

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times2}=\dfrac{1+3}{4}=\dfrac{4}{4}=1$ و $x_2=\dfrac{1-3}{2\times2}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

ومنه: $D_g=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2};1\right\}$

3) $h(x)=\sqrt{2x^2-x-1}$ $D_h=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-x-1\geq 0\}$

$x_1=1$ و $x_2=-\dfrac{1}{2}$ نحدد جدول الاشارة :

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$2x2-x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه : $D_h=\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

تمرين1: حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي:

1) $f(x)=\dfrac{|x|(2x+1)}{x(2x^2+x-3)}$ 2) $g(x)=\dfrac{4x+1}{x^2+x+1}$ 3) $h(x)=\dfrac{x^2+x-3}{2|x|-1}$

4) $A(x)=\dfrac{x^2-3}{4|x|+2}$ 5) $B(x)=\dfrac{x^2-3}{|x-1|-|x+1|}$ 6) $C(x)=\sqrt{3-x^2}$

أجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x(2x^2+x-3)\neq 0\}$

$x(2x^2+x-3)=0\Leftrightarrow x=0$ أو $2x^2+x-3=0$

$2x^2+x-3=0$ نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=1$ و $c=-3$

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times2\times(-3)=1+24=25=(5)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{25}}{2\times2}=\dfrac{-1+5}{4}=\dfrac{4}{4}=1$ و $x_2=\dfrac{-1-5}{2\times2}=\dfrac{-6}{4}=-\dfrac{3}{2}$

ومنه: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2};0;1\right\}$

2) $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x+1\neq 0\}$

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$$

ومنه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

وبالتالي : $D_f=\mathbb{R}$

3) $D_h=\{x\in\mathbb{R}/2|x|-1\neq 0\}$

$2|x|-1=0\Leftrightarrow |x|=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ أو $x=-\dfrac{1}{2}$

ومنه: $D_h=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right\}$

4) $D_A=\{x\in\mathbb{R}/4|x|+2\neq 0\}$

$4|x|+2=0\Leftrightarrow |x|=-\dfrac{1}{2}$

وهذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $D_A=\mathbb{R}$

5) $D_B=\{x\in\mathbb{R}/|x-1|-|x+1|\neq 0\}$

$|x-1|-|x+1|=0\Leftrightarrow |x-1|=|x+1|$

ومنه: $x-1=-(x+1)$ أو $\Leftrightarrow x-1=x+1$

$2x=0$ أو $-1=1 \Leftrightarrow x=0$

$D_B=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

6) $C(x)=\sqrt{3-x^2}$ $D_C=\{x\in\mathbb{R}/3-x^2\geq 0\}$

$3-x^2=0\Leftrightarrow(\sqrt{3})^2-x^2=0\Leftrightarrow(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)=0$

$x=-\sqrt{3}$ أو $x=\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}+x=0$ أو $\Leftrightarrow \sqrt{3}-x=0$

نحدد جدول الاشارة :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$3-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

ومنه : $D_C=\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$

II. الدالة المكبورة و الدالة المصغورة و الدالة المحدودة

نشاط : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. بين أن: $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)\leq 1$
3. بين أن: $\forall x\in\mathbb{R}\quad 0\leq f(x)$
4. ماذا تستنتج؟ماذا نقول عن الدالة f ؟

الأجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$x^2=-1\Leftrightarrow x^2+1=0$ و هذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

$D_f=\mathbb{R}$

2) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ x^2\geq 0$

اذن: $x^2+1\geq 0+1$ يعني $x^2+1\geq 1$

يعني $\dfrac{1}{x^2+1}\leq 1\Leftrightarrow f(x)\leq 1\ \forall x\in\mathbb{R}$

نقول f دالة مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 1

سؤال: هل الدالة f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 2؟ نعم

3) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ x^2\geq 0$

اذن: $x^2+1\geq 0+1$ يعني $x^2+1\geq 1$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ 0\leq f(x)$

نقول f دالة مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 0

سؤال: هل الدالة f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد -1؟ نعم

4)نستنتج أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 0\leq f(x)\leq 1$

اذن : f مكبورة و مصغورة على $\mathbb{R}$ نقول f دالة محدودة على $\mathbb{R}$

2. تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

•نقول إن f دالة مكبورة على مجال I إذا وجد عدد حقيقي M بحيث : $\forall x\in I\quad f(x)\leq M$

•نقول إن f دالة مصغورة على مجال I إذا وجد عدد حقيقي m بحيث : $\forall x\in I\quad f(x)\geq m$

•نقول إن f دالة محدودة على مجال I إذا كانت مكبورة و مصغورة على المجال I .

3. خاصية:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.تكون f دالة محدودة على المجال I إذا وجد عدد حقيقي k بحيث : $|f(x)|\leq k\quad \forall x\in I$

تمرين2: حدد من بين الدوال f التالية الدوال المكبورة و المصغورة و المحدودة

1. $f(x)=|x|+6$ $\quad I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=2\cos x+1$ $\quad I=\mathbb{R}$
3. $f(x)=-x^4-4$ $\quad I=\mathbb{R}$
4. $f(x)=\sqrt{x}+6$ $\quad I=\mathbb{R}^+$
5. $f(x)=\sin x-2$ $\quad I=\mathbb{R}$

الأجوبة: 1) نعلم أن : $|x|\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

اذن: $|x|+6\geq 0+6$ يعني $|x|+6\geq 6$

أي $\forall x\in\mathbb{R}\ 6\leq f(x)$

اذن f دالة مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 6

2) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ -1\leq\cos x\leq 1$

اذن: $-2\leq 2\cos x\leq 2$ يعني $-2+1\leq 2\cos x+1\leq 2+1$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ -1\leq f(x)\leq 3$

اذن: f دالة محدودة على $\mathbb{R}$

3) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ x^4\geq 0$ يعني $-x^4\leq 0$ يعني $-x^4-4\leq 0-4$

يعني $f(x)\leq -4$ ومنه f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد -4

4) نعلم أن : $\sqrt{x}\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}^+$ يعني $\sqrt{x}+6\geq 0+6$

يعني $6\leq f(x)$ ومنه f مصغورة على $I=\mathbb{R}^+$ بالعدد 6

5) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ -1\leq\sin x\leq 1$

اذن: $-1-2\leq\sin x-2\leq 1-2$ يعني $-3\leq\sin x-2\leq -1$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ -3\leq f(x)\leq -1$

اذن: f دالة محدودة على $\mathbb{R}$

تمرين3: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-2x+5$

بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 4

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 4\leq f(x)$

اذن نحسب الفرق : $f(x)-4=x^2-2x+5-4=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ 4\leq f(x)$

وبالتالي f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 4

تمرين4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=-2x^2+4x+1$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد 3

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq 3$

اذن نحسب الفرق : $3-f(x)=3-(-2x^2+4x+1)=3+2x^2-4x-1$

$3-f(x)=2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2\geq 0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq 3$

وبالتالي f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 3

تمرين5: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\dfrac{5+4x^4}{x^4+1}$

بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 4

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 4\leq f(x)$

اذن نحسب الفرق :

$$f(x)-4=\frac{5+4x^4}{x^4+1}-4=\frac{5+4x^4-4(x^4+1)}{x^4+1}=\frac{5+4x^4-4(x^4+1)}{x^4+1}=\frac{1}{x^4+1}\geq 0$$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ 4\leq f(x)$

تمرين6: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=[1;+\infty[$ بما يلي:

$f(x)=-5x-\sqrt{x-1}$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد -5 على $I=[1;+\infty[$

الجواب: يكفي أن نبين أن : $\forall x\in[1;+\infty[\ f(x)\leq -5$

نعلم أن : $\forall x\in[1;+\infty[\ \sqrt{x-1}\geq 0$ يعني $-\sqrt{x-1}\leq 0$ $\quad(1)$

ولدينا : $x\in[1;+\infty[\Leftrightarrow x\geq 1\Leftrightarrow -5x\leq -5$ $\quad(2)$

من : (1) و(2) نحصل على : $-\sqrt{x-1}-5x\leq 0-5$

يعني $f(x)\leq -5$ ومنه f مكبورة على $I=[1;+\infty[$ بالعدد -5

تمرين7: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\dfrac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. بين أن الدالة f مكبورة بالعدد $\dfrac{7}{3}$ على $\mathbb{R}$.
3. بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 1 على $\mathbb{R}$.
4. ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f ؟

الأجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+3x+3\neq 0\}$

$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times3\times1=9-12=-3<0$

ومنه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

وبالتالي : $D_f=\mathbb{R}$

2) يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq\dfrac{7}{3}$

اذن نحسب الفرق :

$$\frac{7}{3}-f(x)=\frac{7}{3}-\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}=\frac{7(x^2+3x+3)-3(2x^2+7x+7)}{x^2+3x+3}$$

$$\frac{7}{3}-f(x)=\frac{7x^2+21x+21-6x^2-21x-21}{x^2+3x+3}=\frac{x^2}{x^2+3x+3}$$

بالنسبة للحدودية x^2+3x+3 وجدنا أن : $\Delta<0$

ومنه اشارتها هي اشارة $a=1$ أي أن : $x^2+3x+3>0$

وبما أنه لدينا : $x^2\geq 0$ فان : $\dfrac{x^2}{x^2+3x+3}\geq 0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq\dfrac{7}{3}$ بالتالي : f مكبورة بالعدد $\dfrac{7}{3}$ على $\mathbb{R}$.

3) يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 1\leq f(x)$

اذن نحسب الفرق :

$$f(x)-1=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-1=\frac{2x^2+7x+7-(x^2+3x+3)}{x^2+3x+3}$$

$$f(x)-1=\frac{2x^2+7x+7-x^2-3x-3}{x^2+3x+3}=\frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+3}=\frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}$$

بالنسبة للحدودية x^2+3x+3 سبق أن وضحنا أن : $x^2+3x+3>0$

وبما أنه لدينا : $(x+2)^2\geq 0$ فان : $\dfrac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}\geq 0$

ومنه: $\forall x\in\mathbb{R}\ 1\leq f(x)$ بالتالي: الدالة f مصغورة بالعدد 1 على $\mathbb{R}$.

4) وجدنا أن : $1\leq f(x)$ و $f(x)\leq\dfrac{7}{3}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ 1\leq f(x)\leq\dfrac{7}{3}$ اي أن f محدودة على $\mathbb{R}$

III. الدالة الدورية

نشاط : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\cos x$

قارن : $f(x)$ و $f(x+2\pi)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

الجواب $f(x+2\pi)=\cos(x+2\pi)=\cos x=f(x)$

1. تعريف

لتكن f دالة عددية و D مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث :

- إذا كانت $x\in D$ فان $x+T\in D$
- $\forall x\in D\quad f(x+T)=f(x)$

مثال : الدوال : cos و sin دورية و دورهم $T=2\pi$

الدالة tan دالة دورية ودورها هو : $T=\pi$

تمرين8: نعتبر الدوال f و g المعرفة على $\mathbb{R}$

كالتالي : $f(x)=\cos 6x$ و $g(x)=\sin 7x$

1. بين أن الدالة f دورية و $\dfrac{\pi}{3}$ دور لها.
2. بين أن الدالة g دورية و $\dfrac{2\pi}{7}$ دور لها.

الأجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$

- إذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان $x+\dfrac{\pi}{3}\in\mathbb{R}$
- $f\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos 6\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos(6x+2\pi)=\cos 6x=f(x)$

ومنه f دورية و $\dfrac{\pi}{3}$ دور لها.

2) $D_g=\mathbb{R}$

- إذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان $x+\dfrac{2\pi}{7}\in\mathbb{R}$
- $g\left(x+\dfrac{2\pi}{7}\right)=\sin 7\left(x+\dfrac{2\pi}{7}\right)=\sin(7x+2\pi)=\sin 7x=g(x)$

g دورية و $\dfrac{2\pi}{7}$ دور لها.

IV. مطاريف دالة عددية

نشاط1: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^2+2$

1. أحسب : $f(0)$
2. بين أن : $f(0)\leq f(x)$ على $\mathbb{R}$ وماذا تستنتج؟

الأجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ و $f(0)=2$

2) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 0\leq x^2$

اذن: $0+2\leq x^2+2$ يعني $2\leq x^2+2$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ f(0)\leq f(x)$

نقول $f(0)$ هي قيمة دنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

نشاط2: لتكن f دالة معرفة ب:. $f(x)=-2x^2+4x+1$

1) أحسب $f(1)$ و تأكد أن : $f(x)=-2\left((x-1)^2-\dfrac{3}{2}\right)$

2) تأكد أن : $f(x)\leq f(1)$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

الأجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ و $f(1)=3$

2) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 0\leq(x-1)^2$

اذن: $0-\dfrac{3}{2}\leq(x-1)^2-\dfrac{3}{2}$ يعني $-\dfrac{3}{2}\leq(x-1)^2-\dfrac{3}{2}$

يعني $(-2)\left(-\dfrac{3}{2}\right)\geq(-2)\left((x-1)^2-\dfrac{3}{2}\right)$ يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq 3$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq f(1)$

نقول $f(1)$ هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و a عنصرا من المجال I

- نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال I, إذا كان :

$\forall x\in I\quad f(x)\leq f(a)$

- نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال I, إذا كان :

$\forall x\in I\quad f(x)\geq f(a)$

تمرين9: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=2x^2+2x+3$.

بين أن : $f(-1)$ هي قيمة دنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(-1)\leq f(x)$

$f(-1)=2-2+3=3$

اذن نحسب الفرق :

$f(x)-f(-1)=2x^2+2x+1-3=2x^2+2x-2$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times2\times2=4-16=-12<0$

إذن: اشارة الحدودية هي اشارة $a=2$ إذن : $2x^2+2x-2>0$

ومنه : $f(-1)\le f(x)$

وبالتالي: $f(-1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين10: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. بين أن $f(1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$.
3. بين أن $f(-1)$ هي القيمة القصوى للدالة f على $\mathbb{R}$.

الأجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x+1\neq0\}$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$

ومنه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ وبالتالي : $D_f=\mathbb{R}$

2) يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(1)\le f(x)$

$f(1)=\frac{1^2+1}{1^2+1+1}=\frac{2}{3}$

$f(x)-f(1)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}-\frac{2}{3}=\frac{3x^2+3-2(x^2+x+1)}{3(x^2+x+1)}=\frac{x^2-2x+1}{3(x^2+x+1)}$

إذن : $f(x)-f(1)=\frac{(x-1)^2}{3(x^2+x+1)}$

بالنسبة للحدودية : x^2+x+1 وجدنا $\Delta<0$

إذن: اشارة الحدودية هي اشارة $a=1$ أي : $x^2+x+1>0$

ونعلم أن : $(x-1)^2\ge0$ إذن : $f(x)-f(1)\ge0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(1)\le f(x)$

و بالتالي : $f(1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$.

3) يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le f(-1)$

$f(-1)=\frac{(-1)^2+1}{(-1)^2-1+1}=2$

$f(-1)-f(x)=2-\frac{x^2+1}{x^2+x+1}=\frac{2(x^2+x+1)-(x^2+1)}{x^2+x+1}=\frac{x^2+2x+1}{x^2+x+1}$

إذن : $f(-1)-f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+x+1}$

بالنسبة للحدودية : x^2+x+1 سبق أن بينا أن : $x^2+x+1>0$

ونعلم أن : $(x+1)^2\ge0$ إذن : $f(-1)-f(x)\ge0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le f(-1)$

و بالتالي : $f(-1)$ هي القيمة القصوى للدالة f على $\mathbb{R}$.

تمرين11: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي :

$f(x)=x\sqrt{x^2+1}-x^2$ بين أن الدالة f مكبورة بالعدد $\frac{1}{2}$.

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}-f(x)=\frac{1}{2}-x\sqrt{x^2+1}+x^2=\frac{1-2x\sqrt{x^2+1}+2x^2}{2}=\frac{1-2x\sqrt{x^2+1}+2x^2}{2}$

$\frac{1}{2}-f(x)=\frac{x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}+x^2}{2}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-2\sqrt{x^2+1}\times x+x^2}{2}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}{2}\ge0$

ومنه f مكبورة بالعدد $\frac{1}{2}$.

V. مقارنة دالتين

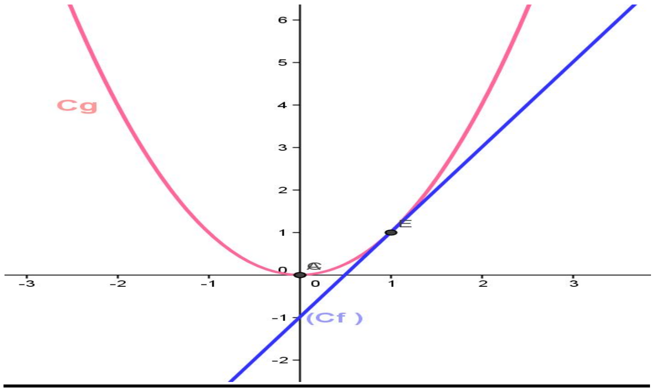
نشاط1: لتكن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=2x-1$ و $g(x)=x^2$

1. مثل الدالتين f و g في نفس المعلم
2. أدرس اشارة الفرق: $g(x)-f(x)$ وماذا تستنتج مبيانيا؟

الأجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية

x	0	1
$f(x)$	-1	1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	9	4	1	0	1	4	9



2) $g(x)-f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\ge0$ ومنه $g(x)\ge f(x)$

نقول أننا قمنا بمقارنة للدالتين f و g وجدنا أن : $g\ge f$

مبيانيا نلاحظ أن منحنى الدالة g يوجد فوق منحنى الدالة f

نشاط2: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=x$ و $g(x)=x^2$

1. حدد D_f و D_g
2. أرسم في معلم متعامد ممنظم منحنى الدالتين f و g
3. قارن f و g

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي مجموعة تعريفهما.

نقول إن f تساوي g ونكتب $f=g$ إذا وفقط إذا كان :

$D_f=D_g$ و $f(x)=g(x)\quad(\forall x\in D_f)$

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I. نقول إن f أصغر من أو يساوي g على مجال I ونكتب $f\le g$ إذا وفقط إذا كان: $(\forall x\in I)\quad f(x)\le g(x)$

التأويل الهندسي : $f\le g$ على مجال I يعني هندسيا أن منحنى الدالة f يوجد تحت منحنى الدالة g على المجال I .

ملحوظة :

- $f<g$ على المجال I إذا وفقط إذا كان : $(\forall x\in I)\ f(x)<g(x)$
- $f\ge0$ على المجال I إذا وفقط إذا كان : $(\forall x\in I)\ f(x)\ge0$

تمرين12: تطبيقي: قارن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين كالتالي :

$f(x)=4x^2$ و $g(x)=4x-1$

واعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية

$f(x)-g(x)=4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geq 0$

ومنه : $f\geq g$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى الدالة g على $\mathbb{R}$.

تمرين13: أدرس الوضع النسبي لمنحنى الدالة f و منحنى الدالة g حيث

$f(x)=x+\frac{1}{x+1}$ و $g(x)=x$

الجواب : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ و $D_g=\mathbb{R}$

$f(x)-g(x)=x+\frac{1}{x+1}-x=\frac{1}{x+1}$

ندرس اشارة $x+1$:

الحالة 1: اذاكانت $x>-1$ فان $f\geq g$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى الدالة g على $]-1;+\infty[$.

الحالة2: اذاكانت $x<-1$ فان $g\geq f$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد تحت منحنى الدالة g على $]-\infty;-1[$.

تمرين14: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كالتالي :

$f(x)=x^2-3x+5$ و $g(x)=-x^2+2x+2$

أدرس الوضع النسبي لمنحنى الدالة f و منحنى الدالة g

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$

$f(x)-g(x)=x^2-3x+5-(-x^2+2x+2)=2x^2-5x+3$

ندرس اشارة $2x^2-5x+3$:

$a=2$ و $b=-5$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times3=25-24=1>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان لهذه الحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{5+1}{2\times2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ و $x_2=\frac{5-1}{2\times2}=\frac{4}{4}=1$

x	$-\infty$		1		$3/2$		$+\infty$
$2x2-5x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الحالة 1: اذاكانت $x\geq 3/2$ أو $x\leq 1$ فان $f\geq g$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى الدالة g على $]-\infty,1]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$.

الحالة2: اذاكانت $1\leq x\leq\frac{3}{2}$ فان $g\geq f$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد تحت منحنى الدالة g على $\left[1,\frac{3}{2}\right]$.

VI. مركب دالتين

نشاط1: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=x+1$ و $g(x)=x^2$

حدد : $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ و $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ ماذا تلاحظ ؟

الجواب : $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)=(x+1)^2=x^2+2x+1$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=x^2+1$

نلاحظ: $g\circ f\neq f\circ g$

تمرين15: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=-x+1$ و $g(x)=x^3-x$ حدد $(g\circ f)(x)$

الجواب : $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-x+1)=(-x+1)^3-(-x+1)$

$(g\circ f)(x)=(1-x)^3-(-x+1)=1^3-3\times1\times x+3\times1\times x^2-x^3+x-1$

$(g\circ f)(x)=1^3-3x+3x^2-x^3+x-1=-x^3+3x^2-2x$

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين

و D_f و D_g على التوالي مجموعة تعريفهما.

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\}$

الدالة العددية h المعرفة على $D_{g\circ f}$ بما يلي : $h(x)=g(f(x))$

تسمى مركب الدالتين f و g في هذا الترتيب ويرمز لها بالرمز $g\circ f$

ومنه : $\forall x\in D_{g\circ f}\quad (g\circ f)(x)=g(f(x))$

تمرين16: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=x-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$

حدد : D_f و D_g و $D_{g\circ f}$ ثم أحسب $(g\circ f)(x)\quad \forall x\in D_{g\circ f}$

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=[0,+\infty[$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R} \text{ و } f(x)\in[0,+\infty[\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R} \text{ و } x+1\in[0,+\infty[\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -1\}\Leftrightarrow D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x+1\geq 0\}$

$D_{g\circ f}=[-1;+\infty[$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-1)=\sqrt{x-1}$

تمرين17: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=x-3$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$

حدد : D_f و D_g و $D_{g\circ f}$ ثم أحسب $(g\circ f)(x)\quad \forall x\in D_{g\circ f}$

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$

و $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+1\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -1\}=[-1,+\infty[$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R} \text{ و } f(x)\in[1,+\infty[\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x-3\in[-1,+\infty[\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 2\}\Leftrightarrow D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x-3\geq -1\}$

$D_{g\circ f}=[2;+\infty[$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-3)=\sqrt{x-3+1}=\sqrt{x-2}$

VII. رتابة دالة عددية

نشاط1: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=4x-3$ و $g(x)=-3x+2$

أدرس رتابة f و g

أجوبة :

1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

ليكن: $x_1\in\mathbb{R}$ و $x_2\in\mathbb{R}$ بحيث $x_1<x_2$

اذن : $4x_1<4x_2$ اذن : $4x_1-3<4x_2-3$

اذن : $f(x_1)<f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

2) $D_g=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

ليكن: $x_1\in\mathbb{R}$ و $x_2\in\mathbb{R}$ بحيث $x_1<x_2$

اذن : $-3x_1>-3x_2$ اذن : $-3x_1+2>-3x_2+2$ اذن :

$g(x_1)>g(x_2)$

ومنه الدالة g تناقصية على $\mathbb{R}$

نشاط2: لتكن f الدالة العددية المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2$

1) حدد D_f

2) أدرس رتابة f على كل من المجالين : $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0]$

3) حدد جدول تغيرات

أجوبة : 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) أ) دراسة رتابة الدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

ليكن: $x_1\in[0;+\infty[$ و $x_2\in[0;+\infty[$ بحيث $x_1<x_2$

اذن: $x_1^2<x_2^2$ ومنه $2x_1^2<2x_2^2$ أي $f(x_1)<f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $[0;+\infty[$

ب) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]-\infty;0]$:

ليكن: $x_1\in]-\infty;0]$ و $x_2\in]-\infty;0]$ بحيث $x_1<x_2$

اذن: $x_1^2>x_2^2$ ومنه $2x_1^2>2x_2^2$ أي $f(x_1)>f(x_2)$

ومنه الدالة f تناقصية على $]-\infty;0]$

3) حدد جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

منحى تغيرات دالة عددية

تعريف: لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها.

• f تزايدية قطعا على المجال I إذا وفقط إذا كان :

$(\forall(x_1,x_2)\in I^2)\left(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\right)$

• f تناقصية قطعا على المجال I إذا وفقط إذا كان :

$(\forall(x_1,x_2)\in I^2)\left(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\right)$

• f ثابتة على المجال I إذا وفقط إذا كان :

$(\forall(x_1,x_2)\in I^2)\ f(x_1)=g(x_2)$

ملحوظة: يمكن دراسة رتابة دالة f على مجال I بدراسة إشارة معدل التغير : $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

مع x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من I

•نقول إن f دالة رتيبة على I إذا كانت f تزايدية قطعا أو تناقصية قطعا على مجال I.

خاصية: لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f متماثلة بالنسبة للصفر.

ليكن I مجالا من $\mathbb{R}^+$ ضمن D_f و I' مماثل I بالنسبة للصفر

1)إذا كانت f دالة زوجية فان :

▪ f تزايدية قطعا على المجال I إذا وفقط إذا كانت f تناقصية قطعا على المجال I'

▪ f تناقصية قطعا على المجال I إذا وفقط إذا كانت f تزايدية قطعا على المجال I'

2)إذا كانت f دالة فردية فان:

f لها نفس الرتابة على كل من المجالين I و I'

VIII. رتابة مركب دالتين :

خاصية: لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على التوالي على المجالين I و J بحيث : $f(x)\in J$ $(\forall x\in I)$ لدينا :

▪إذا كانت f تزايدية قطعا على I و g تزايدية قطعا على J فان : $g\circ f$ تزايدية قطعا على I

▪إذا كانت f تناقصية قطعا على I و g تناقصية قطعا على J فان : $g\circ f$ تزايدية قطعا على I

▪إذا كانت f تزايدية قطعا على I و g تناقصية قطعا على J فان : $g\circ f$ تناقصية قطعا على I

▪إذا كانت f تناقصية قطعا على I و g تزايدية قطعا على J فان : $g\circ f$ تناقصية قطعا على I

IX. التمثيل المبياني للدالتين $x\to\sqrt{x+a}$ و $x\to ax^3$:

مثال1: لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي: $f(x)=\sqrt{x+2}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. أدرس رتابة الدالة f على D_f وحدد جدول تغيرات f
3. أنشئ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

الجواب: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\ge0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\ge-2\}=[-2,+\infty[$

2) ليكن: $x_1\in[-2;+\infty[$ و $x_2\in[-2;+\infty[$ بحيث $x_1<x_2$

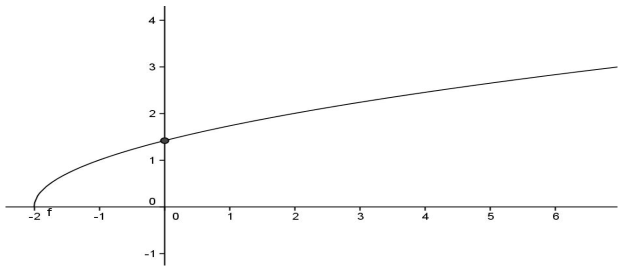
اذن: $x_1+2<x_2+2$ ومنه $\sqrt{x_1+2}<\sqrt{x_2+2}$ أي $f(x_1)<f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $[-2;+\infty[$

(3

x	-2	$+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

x	-2	-1	0	2	7
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3



مثال2: لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{1}{4}x^3$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f و بين أن الدالة f تزايدية قطعا على D_f
2. حدد جدول تغيرات f

3. أنشئ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

الجواب: 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

ليكن : $x_1\in\mathbb{R}$ و $x_2\in\mathbb{R}$ بحيث $x_1<x_2$

اذن: $x_1^3<x_2^3$ ومنه $\frac{1}{4}\times x_1^3<\frac{1}{4}\times x_2^3$ أي $f(x_1)<f(x_2)$

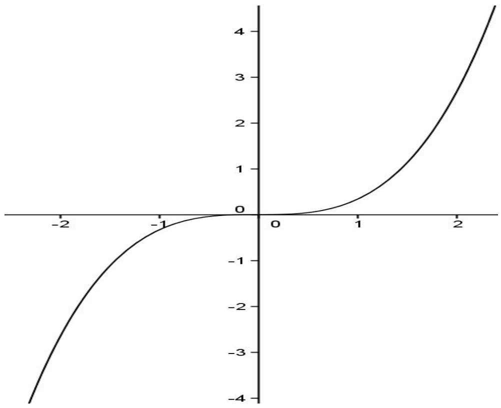
ومنه الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

2)

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

3)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.5	-2	-1/4	0	1/4	2	6.5



تمارين للبحث:

تمرين1: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كالتالي :

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{2x+1}{x-2}$$

1. حدد $D_{g\circ f}$ حيز تعريف الدالة $g\circ f$
2. حدد صيغة الدالة $g\circ f$

تمرين2: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كالتالي : $f(x)=x^2+2$ و $g(x)=\sqrt{x}$

1. حدد صيغة الدالة $g\circ f$
2. تأكد أن الدالة $g\circ f$ زوجية
3. أدرس رتابة كل من الدالتين f و g

تمرين3:لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=-\frac{1}{2}x^3$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. بين أن الدالة f تناقصية قطعا على D_f و حدد جدول تغيرات f
3. أنشئ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

مذكرة رقم3 في درس المرجح

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- مرجح n نقطة $(2 \le n \le 4)$؛ مركز الثقل؛ - الخاصية المميزة للمرجح؛ الصمود؛ التجميعية؛ - إحداثيا المرجح في معلم معلوم.	- استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي؛ - إنشاء مرجح n نقطة $(2 \le n \le 4)$؛ - استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى؛ - استعمال المرجح في إثبات تقاطع المستقيمات؛ - استعمال المرجح في حل مسائل هندسية وفيزيائية.	- قبل تعريف المرجح يستحسن التحسيس بالارتباط الموجود بين مفهوم المرجح في الرياضيات ومفاهيم أخرى من بعض مواد التخصص؛ - ينبغي إبراز الدور الذي يلعبه المرجح في حل بعض المسائل الهندسية.

I. مرجح نقطتين متزنتين

نشاط1 : لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى

1) بين أنه توجد نقطة G بحيث : $4\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ (E)

2) أنشئ النقطة G

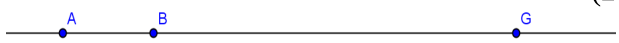
الأجوبة: 1)نلاحظ أن : $4+(-5)\neq 0$

$4\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ يعني $4\overrightarrow{GA}-5(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$ (استعمال علاقة شال)

يعني $4\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ يعني $-\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ يعني $\overrightarrow{AG}=5\overrightarrow{AB}$

اذن توجد نقطة وحيدة G على المستقيم (AB) تحقق (E)

(2



نشاط2 : لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى

هل توجد نقطة G بحيث : $2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

الجواب : نلاحظ أن : $2-2=0$

$2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ يعني $2\overrightarrow{GA}-2(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$ (استعمال علاقة شال)

يعني $2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ يعني $2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ و هذا غير ممكن

اذن لا توجد نقطة G تحقق (E)

1. نقطة متزنة

لتكن A نقطة من المستوى و a عددا حقيقيا

الزوج $(A;a)$ يسمى نقطة متزنة و العدد a يسمى وزن النقطة A

(نقول كذلك أن النقطة A معينة بالمعامل a).

3.1.خاصية و تعريف

لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ نقطتين متزنتين من المستوى بحيث $a+b\neq 0$

توجد نقطة وحيدة G من المستوى بحيث : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$

ملاحظة1: اذا كانت $a+b=0$ فان النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$ ليس لهم مرجح

ملاحظة2: اذا كانت النقطة G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$

فان : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ ① (استعمال علاقة شال) و هذه الكتابة تستعمل لرسم النقطة G

تمرين1:

1.أنشئ G مرجح النقطتين $(A;-2)$ و $(B;3)$ ثم أنشئ G' مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(B;1)$

2.أحسب $\overrightarrow{GG'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

الأجوبة: 1)لدينا G مرجح النقطتين $(A;-2)$ و $(B;3)$ باستعمال العلاقة ① نجد :

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{(-2)+3}\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$ ②

ولدينا G' مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(B;1)$ وباستعمال العلاقة ① نجد

$\overrightarrow{AG'}=\dfrac{1}{1+2}\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AG'}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ③

2)اذن : $\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AG'}=-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG'}=-3\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\left(-3+\dfrac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}=-\dfrac{8}{3}\overrightarrow{AB}$

2. خاصيات مرجح نقطتين متزنتين

نشاط أو تمرين2: أنشئ G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;-0,003)$ و $(B;-0,001)$ حيث $A\neq B$

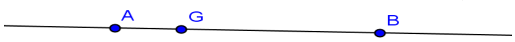
الجواب: G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;-0,003)$ و $(B;-0,001)$

يعني $-0,003\overrightarrow{GA}-0,001\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ نضرب طرفي المتساوية في نفس العدد : $k=1000$

يعني $-\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ يعني G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;-3)$ و $(B;-1)$

وباستعمال العلاقة ① نجد: $\overrightarrow{AG}=\dfrac{-1}{(-1)+(-3)}\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ ومنه

الرسم:



a. الصمود

مرجح نقطتين متزنتين لا يتغير بضرب معامليهما في عدد حقيقي غير منعدم:

إذا كان G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$ فان لكل k من $\mathbb{R}^*$,

G هو كذلك مرجح النقطتين المتزنتين $(A;ka)$ و $(B;kb)$

تمرين3: ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\sqrt{8})$ و $(B;-\sqrt{2})$

بين أن G مرجح النقطتين : $(A;-2)$ و $(B;1)$

الجواب: حسب خاصية الصمود نضرب وزني النقطتين في نفس العدد الحقيقي و المرجح لا يتغير نأخذ : $k=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ اذن : G مرجح النقطتين :

$\left(A;-\sqrt{8}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ و $\left(B;-\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ أي : $(A;-2)$ و $(B;1)$ نلاحظ أن : $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

b. الخاصية المميزة

لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ نقطتين متزنتين من المستوى بحيث $a+b\neq 0$
ولتكن G نقطة من المستوى

G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$ إذا وفقط إذا لكل نقطة M من المستوى : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$

البرهان : لتكن M نقطة من المستوى

$a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=a\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+b\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)$ (استعمال علاقة شال)

$a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}+a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}$

G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$ يعني $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

يعني $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ يعني $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$

استنتاج: بوضع : $M=A$ (على التوالي $M=B$) في الخاصية المميزة نحصل على : $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

(على التوالي $\overrightarrow{BG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{BA}$) وهذه الكتابات تمكننا من رسم النقطة G

وتبين لنا أن : A و B و G نقط مستقيمية.

تمرين4: ليكن E و F نقطتين من المستوى بحيث: $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EF}$ و $E\notin(AB)$.

1) بين أن : G مرجح النقطتين المتزنتين $(E;-1)$ و $(F;2)$

2) استنتج أن المستقيمين (EF) و (AB) يتقاطعان محددا نقطة تقاطعهما.

الأجوبة:

1) $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EF}$ يعني $\overrightarrow{EG}=2\left(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF}\right)$ (استعمال علاقة شال)

يعني $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EG}+2\overrightarrow{GF}$ يعني $\overrightarrow{EG}-2\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{GF}$

يعني $-1\overrightarrow{EG}-2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$

يعني $\overrightarrow{EG}+2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$ يعني $-\overrightarrow{GE}+2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$ يعني G مرجح النقطتين المتزنتين $(E;-1)$ و $(F;2)$

2) لدينا G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;2)$ و $(B;-3)$ اذن : $G\in(AB)$

و لدينا G مرجح النقطتين المتزنتين $(E;-1)$ و $(F;2)$ اذن : $G\in(EF)$

اذن المستقيمين (AB) و (EF) لديهم نقطة مشتركة وغير منطبقين (لأن : $E\notin(AB)$)

وبالتالي : المستقيمين (EF) و (AB) يتقاطعان و G هي نقطة تقاطعهما.

تمرين5: لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى.
ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$ و G مرجح النقطتين $(A;3)$ و $(B;-5)$

حدد مجموعة النقط G من المستوى P بحيث :

$\left\|3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$

الجواب: $\left\|3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$

G مرجح النقطتين $(A;3)$ و $(B;-5)$ اذن حسب الخاصية المميزة للمرجح فان :

$3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}=(3+(-5))\overrightarrow{MG}=-2\overrightarrow{MG}$

و لدينا $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$ وبما أن : I منتصف القطعة $[AB]$

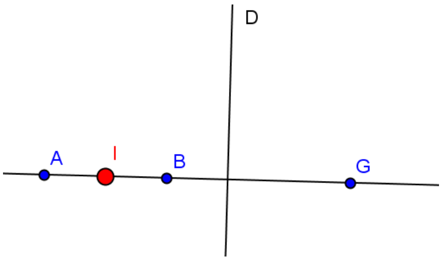
فان : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ منه : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

$|-2|\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=|2|\left\|\overrightarrow{MI}\right\|$ يعني $\left\|-2\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|$ يعني

$\left\|3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$

يعني $2MG=2MI$ يعني $MG=MI$

ومنه مجموعة النقط هي واسط القطعة $[GI]$



II. إحداثيتي المرجح:

المستوى منسوب إلى معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ و لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ نقطتين متزنتين من المستوى

إذا كان G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$ فان إحداثيتي G هما :

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b} \\ y_G=\dfrac{ay_A+by_B}{a+b} \end{cases}$$

ملاحظة : I منتصف القطعة $[AB]$ يعني I مرجح النقطتين المتزنتين $(A;1)$ و $(B;1)$

مثال: نعتبر النقطتين : $A(1;2)$ و $B(-4;6)$ و ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;2)$ و $(B;-1)$

أحسب إحداثيتي G

الجواب:

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{2\times1+(-1)\times(-4)}{2+(-1)}=\dfrac{6}{1}=6 \\ y_G=\dfrac{2\times2+(-1)\times6}{2+(-1)}=\dfrac{-2}{1}=-2 \end{cases}$$

اذن : $G(6;-2)$

تمرين6: في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقطتين : $A(-2;5)$ و $B(2;1)$ و ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;1)$ و $(B;3)$

1) أحسب إحداثيتي G

2) حدد إحداثيتي النقطة H بحيث G مرجح النقطتين المتزنتين $(H;1)$ و $(O;3)$

3) بين أن : المستقيمين (AH) و (OB) متوازيان.

الأجوبة: 1)

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{1\times(-2)+3\times2}{3+1}=\dfrac{4}{4}=1 \\ y_G=\dfrac{1\times5+3\times1}{3+1}=\dfrac{8}{4}=2 \end{cases}$$

اذن : $G(1;2)$

2) طريقة1: G مرجح النقطتين المتزنتين $(H;1)$ و $(O;3)$ يعني :

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{1\times x_H+3\times x_O}{3+1}=1 \\ y_G=\dfrac{1\times y_H+3\times y_O}{3+1}=2 \end{cases}$$

لدينا $O(0;0)$ يعني : $\begin{cases} \dfrac{x_H}{4}=1 \\ \dfrac{y_H}{4}=2 \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} x_H=4 \\ y_H=8 \end{cases}$ اذن : $H(4;8)$

طريقة2: G مرجح النقطتين المتزنتين $(H;1)$ و $(O;3)$ يعني : $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OH}$

و $\overrightarrow{OG}(1;2)$ و $\frac{1}{4}\overrightarrow{OH}\left(\frac{1}{4}x_H;\frac{1}{4}y_H\right)$

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OH}$ يعني $\begin{cases}\frac{x_H}{4}=1\\ \frac{y_H}{4}=2\end{cases}$ يعني : $\begin{cases}x_H=4\\ y_H=8\end{cases}$ اذن : $H(4;8)$

3) $\overrightarrow{AH}(6;2)$ و $\overrightarrow{OB}(6;2)$ اذن : نلاحظ أن : $\overrightarrow{AH}=3\overrightarrow{OB}$

ومنه المستقيمين (AH) و (OB) متوازيان لأن المتجهتين : $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{OB}$ مستقيميتان

تمرين7: في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i}.\vec{j})$ نعتبر النقطتين: $A(0;5)$ و $B(3;2)$ و ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;1)$ و $(B;2)$

1) أحسب إحداثيتي G

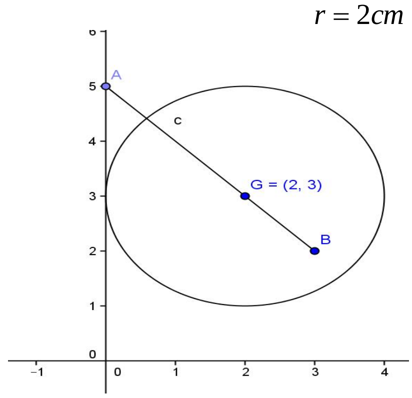
2) حدد و أرسم مجموعة النقط M من المستوى P بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=6$

الأجوبة: 1) $\begin{cases}x_G=\frac{0+6}{3}=2\\ y_G=\frac{5+4}{3}=3\end{cases}$ اذن : $G(2;3)$

2) $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=6cm$ يعني $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=6cm$ حسب الخاصية المميزة للمرجح

يعني $|3|\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=6cm$ يعني $3MG=6cm$ يعني $MG=2cm$

ومنه مجموعة النقط هي الدائرة (C) التي مركزها G وشعاعها $r=2cm$



III. مرجح ثلاث نقط متزنة:

1. خاصية و تعريف

لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ ثلاث نقط متزنة من المستوى بحيث $a+b+c\neq0$

توجد نقطة وحيدة G من المستوى بحيث : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

النقطة G تسمى مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$.

حالة خاصة: إذا كان : $a=b=c$ فان مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ يسمى كذلك مركز ثقل المثلث ABC

2. خاصيات مرجح ثلاث نقط متزنة

أ)الصمود: إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ فان لكل k من $\mathbb{R}^*$ G هي كذلك مرجح النقط المتزنة $(A;ka)$ و $(B;kb)$ و $(C;kc)$

ب)الخاصية المميزة: لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ ثلاث نقط من المستوى بحيث $a+b+c\neq0$ ولتكن G نقطة من المستوى

G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ إذاوفقط إذا لكل نقطة M من المستوى

: $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$

استنتاج : بوضع : $M=A$ في الخاصية المميزة نحصل على : $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$ ® و هذه العلاقة تمكننا من رسم النقطة G

مثال أو تمرين8: ليكن ABC مثلثا و G نقطة بحيث : $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}$

بين أن : G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$

و أنشئ النقطة G

الجواب: $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}$ يعني $2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

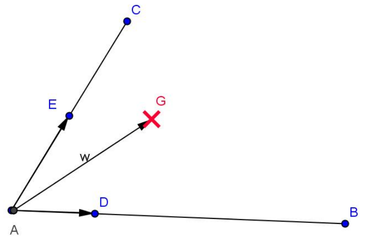
يعني $2\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right)-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ يعني $-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

يعني $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

ومنه : G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$

وحسب العلاقة ® فان : $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

أي : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{4}\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ومنه رسم G



تمرين9: لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى. و G مرجح النقط المتزنة $(A;2)$ و $(B;-1)$ و $(C;1)$

حدد المجموعة: $E=\left\{M\in P/\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6cm\right\}$

حيث P هو المستوى.

الجواب : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6cm$ يعني $\left\|2\overrightarrow{MG}\right\|=6cm$ حسب الخاصية المميزة للمرجح

يعني $|2|\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=6cm$ يعني $2MG=6cm$ يعني $MG=3cm$

ومنه مجموعة النقط هي الدائرة (C) التي مركزها G وشعاعها $r=3cm$

ج)تجميعية المرجح:

تكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ ثلاث نقط من المستوى بحيث $a+b+c\neq0$ و $a+b\neq0$

إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ وكانت H مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$

فان G مرجح $(H;a+b)$ و $(C;c)$

تمرين10: ليكن G مركز ثقل المثلث ABC و I منتصف القطعة $[BC]$

بين أن G مرجح النقطتين $(A;1)$ و $(I;2)$

الجواب : G مركز ثقل المثلث ABC يعني G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$

I منتصف القطعة $[BC]$ يعني : I مرجح النقطتين $(B;1)$ و $(C;1)$

وحسب خاصية تجميعية المرجح فان : G هو مرجح النقطتين : $(A;1)$ و $(I;1+1)$

تمرين11: لتكن A و B و C و D ثلاث نقط من المستوى. حدد مجموعة النقط من المستوى بحيث :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}-5\overrightarrow{MD}\right\|=5cm$$

3. إحداثيتا مرجح ثلاث نقط

إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ فان إحداثيتي G هما :

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c} \\ y_G=\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c} \end{cases}$$

تمرين12: في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

نعتبر النقط : $A(-1;1)$ و $B(0;2)$ و $C(1;-1)$ و $D(1;0)$

1) حدد إحداثيتي K مرجح النقطتين المتزنتين $(A;2)$ و $(B;3)$

2) حدد إحداثيتي L مركز ثقل المثلث ABC

3) حدد إحداثيتي G مرجح النقط: $(A;2)$ و $(B;3)$ و $(C;1)$ و $(D;-1)$

الأجوبة : 1) $\begin{cases} x_K=\dfrac{-2+0}{5}==\dfrac{-2}{5} \\ y_K=\dfrac{2+6}{5}=\dfrac{8}{5} \end{cases}$ اذن : $K\left(-\dfrac{2}{5};\dfrac{8}{5}\right)$

2) L مركز ثقل المثلث ABC يعني L مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$

ومنه : $\begin{cases} x_L=\dfrac{1x_A+1x_B+1x_C}{1+1+1} \\ y_L=\dfrac{1y_A+1y_B+1y_C}{1+1+1} \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x_L=\dfrac{1\times(-1)+1\times0+1\times1}{1+1+1}=0 \\ y_L=\dfrac{1\times1+1\times2+1\times(-1)}{1+1+1}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$ اذن : $L\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$

3) $\begin{cases} x_G=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C+dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G=\dfrac{ay_A+by_B+cy_C+dy_D}{a+b+c+d} \end{cases}$

يعني $\begin{cases} x_G=\dfrac{2\times x_A+3\times x_B+1\times x_C+(-1)\times x_D}{5}=\dfrac{-2}{5} \\ y_G=\dfrac{2\times y_A+3\times y_B+1\times y_C+(-1)\times y_D}{5}=\dfrac{7}{5} \end{cases}$ اذن : $G\left(-\dfrac{2}{5};\dfrac{7}{5}\right)$

تمرين13: لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى. و M من المستوى P بحيث : $\vec{V}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$

1) بين أن $\vec{V}$ متجهة غير مرتبطة بالنقطة M

2) لتكن : K مرجح النقطتين المتزنتين $(B;1)$ و $(C;-3)$ بين أن : $\vec{V}=2\overrightarrow{KA}$

3) لنكن: G مرجح النقط المتزنة $(A;2)$ و $(B;-1)$ و $(C;-3)$

أ)بين أن : $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{GM}$ لكل نقطة M من المستوى

ب)استنتج مجموعة النقط M من المستوى بحيث :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$$

الأجوبة : 1) $\vec{V}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$\vec{V}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ ومنه $\vec{V}$ متجهة غير مرتبطة بالنقطة M

2) وجدنا : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ مهما تكن M من المستوى

يمكننا مثلا وضع : $M=K$ ونجد : $2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

ونعلم أن : K مرجح النقطتين المتزنتين $(B;1)$ و $(C;-3)$ اذن :

$\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

ومنه نجد : $2\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ أي : $2\overrightarrow{KA}=\vec{V}$

3)أ) حسب الخاصية المميزة للمرجح :

$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\left(2+(-1)+(-3)\right)\overrightarrow{MG}=-2\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{GM}$

3ب) $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$ تعني $\left\|2\overrightarrow{GM}\right\|=\left\|2\overrightarrow{KA}\right\|$

تعني $2GM=2KA$ تعني $GM=KA$

ومنه مجموعة النقط هي الدائرة (C) التي مركزها G وشعاعها $r=KA$

تمرين14: ليكن ABC مثلثا و B' مرجح النقطتين $(A;-2)$ و $(C;1)$ ثم A' مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(B;-3)$ و C' مرجح النقطتين $(C;-1)$ و $(B;3)$

1) بين أن : $\overrightarrow{AB'}=-\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AA'}=3\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC'}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

2) بين أن : $\overrightarrow{B'A'}+2\overrightarrow{A'C'}=\vec{0}$

3) استنتج أنه مهما تكن M نقطة من المستوى فان : $-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=\vec{0}$

4) استنتج أن النقط A' و B' و C' مستقيمية.

الأجوبة: 1) B' مرجح النقطتين $(A;-2)$ و $(C;1)$

اذن : $\overrightarrow{AB'}=\dfrac{1}{1+(-2)}\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AC}$

A' مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(B;-3)$ اذن : $\overrightarrow{AA'}=\dfrac{-3}{-3+2}\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}$

C' مرجح النقطتين $(C;-1)$ و $(B;3)$ يعني $\overrightarrow{BC'}=\dfrac{-1}{3+(-1)}\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

(2

$\overrightarrow{B'A'}+2\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{AA'}+2\left(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BC'}\right)=\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AB'}+2\overrightarrow{BC'}-2\overrightarrow{BA'}$

$\overrightarrow{B'A'}+2\overrightarrow{A'C'}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-2\times\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}-2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}\right)$

$\overrightarrow{B'A'}+2\overrightarrow{A'C'}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{B'A'}+2\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$

(3 $-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=-\overrightarrow{MA'}-\left(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'B'}\right)+2\left(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'C'}\right)$

$-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=-\overrightarrow{A'B'}+2\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{B'A'}+2\overrightarrow{A'C'}=\vec{0}$

4)وجدنا أن : مهما تكن M نقطة من المستوى

فان : $-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=\vec{0}$

بوضع مثلا : $M=A'$

نجد : $-\overrightarrow{A'A'}-\overrightarrow{A'B'}+2\overrightarrow{A'C'}=\vec{0}$ يعني $2\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'B'}$

وهذا يعني أن : النقط A' و B' و C' مستقيمية.

تمرين15:

1) ليكن I مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(C;1)$ و J مرجح النقطتين $(A;1)$ و $(B;2)$ و K مرجح النقطتين $(C;1)$ و $(B;-4)$

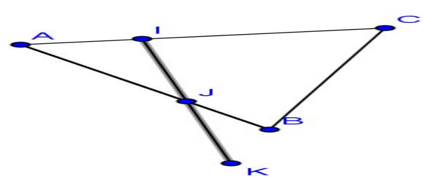
أنشئ النقط I و J و K

2) أثبت أن B مرجح النقطتين $(K;3)$ و $(C;1)$

3) بين أن J منتصف $[KI]$

الأجوبة : 1) I مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(C;1)$ اذن: $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

J مرجح النقطتين $(A;1)$ و $(B;2)$ اذن : $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



K مرجح النقطتين $(C;1)$ و $(B;-4)$ اذن : $\overrightarrow{BK}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

2)يكفي أن نبين أن : $3\overrightarrow{BK}+1\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ ؟؟؟؟؟

بما أن لدينا : $\overrightarrow{BK}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ يعني $3\overrightarrow{BK}=-\overrightarrow{BC}$

يعني $3\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

3)يكفي أن نبين أن : $\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{IJ}$ ؟؟؟؟؟

لدينا: $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

اذن : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$ ❶

لدينا : $\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right)$

$\overrightarrow{JK}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$ ❷

من : ❶ و ❷ نجد أن : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JK}$ ومنه : J منتصف $[KI]$

ملاحظات عامة حول درس المرجح:

مذكرة رقم4 في درس تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
3.1. الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم: - الصيغة التحليلية لمنظم متجهة ولمسافة نقطتين؛ - صيغة $\cos\theta$ وصيغة $\sin\theta$؛ **3.2. المستقيم في المستوى (دراسة تحليلية):** - المتجهة المنظمية لمستقيم؛ - معادلة ديكارتية لمستقيم محدد بنقطة ومتجهة منظمية له؛ - مسافة نقطة عن مستقيم. **3.3. الدائرة (دراسة تحليلية)** - معادلة ديكارتية لدائرة؛ - تمثيل بارامتري لدائرة؛ - دراسة مجموعة النقط: $\{M(x;y)/x^2+y^2+ax+by+c=0\}$. - دراسة الأوضاع النسبية لدائرة ومستقيم؛ - معادلة ديكارتية لمستقيم مماس لدائرة في نقطة معلومة من الدائرة.	- التعبير عن توازي وتعامد مستقيمين؛ - حساب قياسات زوايا ومساحات باستعمال الجداء السلمي. - التعرف على مجموعة النقط من المستوى التي تحقق العلاقة: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ - تحديد مركز وشعاع دائرة معرفة بمعادلتها الديكارتية؛ – المرور من معادلة ديكارتية إلى تمثيل بارامتري والعكس؛ – استعمال تحليلية الجداء السلمي في حل مسائل هندسية وجبرية.	- تعتبر الدراسة التحليلية لدائرة مجالا خصبا لتوظيف تحليلية الجداء السلمي خاصة منها تلك المتعلقة بالمسافة والتعامد، لذا ينبغي الحرص على إبراز دور الطريقة التحليلية في حل بعض المسائل الهندسية. - ينبغي استعمال الجداء السلمي في تحديد معادلة ديكارتية لدائرة؛ - يتم التطرق من خلال أنشطة إلى دائرة محددة بثلاث نقط غير مستقيمية؛ - يتم بهذه المناسبة، استغلال التجويه التحليلي للمستوى لتقديم نماذج للحل المبياني لبعض المتراجحات غير الخطية بمجهولين.

I. الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم

1. الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم

تعاريف: ليكن $(\vec i;\vec j)$ أساسا في المستوى و O نقطة من المستوى

- نقول إن $(\vec i;\vec j)$ أساس متعامد ممنظم إذا كان :

$\|\vec i\|=1$ و $\|\vec j\|=1$ و $\vec i.\vec j=0$

- نقول إن المعلم $(0;\vec i;\vec j)$ متعامد ممنظم إذا كان $(\vec i;\vec j)$ أساسا متعامدا ممنظما
- إذا كان $(\vec i;\vec j)$ أساس متعامد ممنظم و $(\overline{\vec i;\vec j})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ نقول إن $(0;\vec i;\vec j)$ معلم متعامد ممنظم ومباشر

دائما في جميع فقرات الدرس ننسب المستوى إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(0;\vec i;\vec j)$

نشاط : لتكن $\vec u=x\vec i+y\vec j$ و $\vec v=x'\vec i+y'\vec j$ متجهتين من معلم $(0;\vec i;\vec j)$ متعامد ممنظم ومباشر أحسب : $\vec u.\vec v$

الجواب:

$\vec u\cdot\vec v=(x\vec i+y\vec j)(x'\vec i+y'\vec j)=xx'\vec i\cdot\vec i+xy'\vec i\cdot\vec j+yx'\vec j\cdot\vec i+yy'\vec j\cdot\vec j$

$\vec i\cdot\vec i=\|\vec i\|\times\|\vec i\|\times\cos0=1\times1\times1=1$ و $\vec j\cdot\vec j=\|\vec j\|\times\|\vec j\|\times\cos0=1\times1\times1=1$

$\vec i\cdot\vec j=\|\vec i\|\times\|\vec j\|\times\cos\frac{\pi}{2}=1\times1\times0=0$ ومنه : $\vec u\cdot\vec v=xx'+yy'$

خاصية 1: لتكن $\vec u=x\vec i+y\vec j$ و $\vec v=x'\vec i+y'\vec j$. متجهتين من المستوى , لدينا : $\vec u.\vec v=xx'+yy'$

خاصية 2: تكون المتجهتان $\vec u=x\vec i+y\vec j$ و $\vec v=x'\vec i+y'\vec j$ متعامدتين إذا وفقط إذا كان : $\vec u.\vec v=xx'+yy'$

مثال نعتبر المتجهات $\vec u=\vec i+2\vec j$ و $\vec v=2\vec i-\vec j$ و $\vec w=5\vec i+3\vec j$.

أحسب الجداءات السلمية التالية : $\vec u.\vec v$ و $\vec v.\vec w$ و $\vec u.\vec w$

الجواب : $\vec u.\vec v=1\times2+2\times(-1)=0$ اذن : $\vec u\perp\vec v$

$\vec v.\vec w=2\times5+3\times(-1)=7$ و $\vec u.\vec w=1\times5+3\times2=11$

تمرين1: حدد قيمة العدد الحقيقي m لكي تكون المتجهتان $\vec u(3;-1+m)$ و $\vec v(2-m;5)$ متعامدتين

الجواب : $\vec u\perp\vec v$ يعني $\vec u.\vec v=0$ يعني $3(2-m)+5\times(-1+m)=0$

يعني $6-3m-5+5m=0$ يعني $2m+1=0$ يعني $m=-\frac{1}{2}$

تمرين2: حدد قيمة العدد الحقيقي m لكي تكون المتجهتان $\vec u(-1+m;2)$ و $\vec v\left(2-m;\frac{1}{2}\right)$ متعامدتين

الجواب: $\vec u\perp\vec v$ يعني $\vec u.\vec v=0$ يعني $(-1+m)(2-m)+2\times\frac{1}{2}=0$

يعني $-2+m+2m-m^2+1=0$ يعني $-m^2+3m-1=0$

يعني $m^2-3m+1=0$ نحسب مميز المعادلة ونجد :

$\Delta=5$ ومنه للمعادلة حلين هما : $m_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ و $m_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

2. الصيغة التحليلية لمنظم متجهة والمسافة بين نقطتين

a) منظم متجهة:

لتكن $\vec u=x\vec i+y\vec j$ متجهة من المستوى , منظم المتجهة $\vec u$ نرمز له بالرمز $\|\vec u\|$ و $\|\vec u\|=\sqrt{x^2+y^2}$

b) المسافة بين نقطتين:

لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ نقطتين من المستوى , المسافة هي :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

ملاحظة : $\|\overrightarrow{AB}\|=AB$

مثال أو تمرين3:نعتبر في المستوى النقط التالية :

$A(-1;3)$ $B(3;\sqrt{5})$ و $C(2;-3)$ والمتجهة $\vec{u}(\sqrt{5};-2)$

1)أحسب AC و $\|\vec{u}\|$ 2)أحسب : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$

3) ماذا تستنتج بالنسبة للمثلث ABC

الأجوبة :

1) $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(2+1)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(-2)^2}=\sqrt{5+4}=\sqrt{9}=3$

2) $\overrightarrow{AB}\left(3-(-1);\sqrt{5}-3\right)$ يعني $\overrightarrow{AB}(4;\sqrt{5}-3)$

$\overrightarrow{CB}(3-2;\sqrt{5}+3)$ يعني $\overrightarrow{CB}(1;\sqrt{5}+3)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=1\times4+(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3)=4+\left((\sqrt{5})^2-3^2\right)=0$

3)نستنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية في B

تمرين4:نعتبر في المستوى النقط التالية : $A(3;2)$ $B\left(-\frac{1}{2};0\right)$

و $C(-1;-4)$ و $D\left(\frac{5}{2};-2\right)$ $E(1;-1)$

1. بين أن المثلث ABE قائم الزاوية في النقطة E
2. بين أن الرباعي $ABCD$ معين

(يكفي أن نبين أن $ABCD$ متوازي الأضلاع وضلعين متتابعين متقايسين أو نبين أن القطرين متعامدين)

الأجوبة : 1) يكفي أن نبين أن $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{EB}$ أي نبين أن : $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EB}=0$

$\overrightarrow{AE}(-2;-3)$ و $\overrightarrow{EB}\left(-\frac{3}{2};1\right)$

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EB}=3-3=0$ ومنه $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{EB}$ أي ABE قائم الزاوية في النقطة E

2) طريقة1: نبين أن $ABCD$ متوازي الأضلاع وضلعين متتابعين متقايسين

لدينا : $\overrightarrow{DC}\left(-\frac{7}{2};-2\right)$ و $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{7}{2};-2\right)$ اذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

ومنه : $ABCD$ متوازي الأضلاع

ولدينا كذلك : $AC=\sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2+(1-1)^2}=\sqrt{\frac{49}{4}+4}=\sqrt{\frac{65}{4}}$ و $BC=\sqrt{\frac{1}{4}+16}=\sqrt{\frac{65}{4}}$

اذن : $AB=BC$ ومنه : $ABCD$ معين

طريقة2: نبين أن القطرين متعامدين

لدينا : $\overrightarrow{AC}(-4;-6)$ و $\overrightarrow{BD}(3;-2)$

اذن : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-12+12=0$

ومنه : $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ وبالتالي: $ABCD$ معين

c) صيغة cos و sin :

لتكن $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$. متجهتين غير منعدمتين من المستوى و θ قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

لدينا:

$$\sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\frac{xy'-yx'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

و

$$\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

تمرين5:نعتبر في المستوى المتجهي المتجهتين التاليتين :

$\vec{u}(-1;-1)$ و $\vec{v}(-2;0)$

1. أحسب : $\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ و $\sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$
2. استنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

الأجوبة:

1) $\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}\Leftrightarrow\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\frac{2}{\sqrt{2}\times2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\frac{\begin{vmatrix}-1&-2\\-1&0\end{vmatrix}}{\sqrt{2}\times2}\Leftrightarrow\sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\frac{-2}{\sqrt{2}\times2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2)لدينا $\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$ و $\sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sin\frac{\pi}{4}=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

ومنه $-\frac{\pi}{4}$ هو قياس للزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

تمرين6:نعتبر في المستوى النقط التالية :

$A(3;3)$ و $B(1;1)$ و $C(1;3)$

1. أحسب : $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ و $\sin(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$
2. استنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$

الأجوبة : 1) $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

$\overrightarrow{AB}(-2,-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2,0)$ ومنه : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$

$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{4}{\sqrt{8}\times\sqrt{4}}=\frac{4}{2\sqrt{2}\times2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})=\frac{\begin{vmatrix}-2&-2\\-2&0\end{vmatrix}}{2\sqrt{2}\times2}\Leftrightarrow\sin(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})=\frac{-4}{2\sqrt{2}\times2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2)لدينا $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$

و $\sin(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sin\frac{\pi}{4}=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

ومنه $-\frac{\pi}{4}$ هو قياس للزاوية الموجهة $\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}$

تمرين7:نعتبر في المستوى النقط التالية :

$A(4;1)$ $B(0;5)$ و $C(-2;-1)$

1.أحسب المسافات: AB و AC و BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

2.أحسب : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$

3.استنتج أن : $\cos(\widehat{BAC})=\frac{1}{\sqrt{5}}$

4.أحسب $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ و استنتج أن : $\sin(\widehat{BAC})=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

الأجوبة : 1) $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-4)^2+(4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(-6)^2+(-2)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

ومنه : $AC=BC$ ومنه ABC متساوي الساقين

2) $\overrightarrow{AB}(-4,4)$ و $\overrightarrow{AC}(-6,-2)$ ومنه : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=24-8=16$

3) $\cos(\widehat{BAC})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{16}{\sqrt{32}\times\sqrt{40}}=\frac{16}{4\sqrt{2}\times2\sqrt{10}}=\frac{2}{\sqrt{20}}=\frac{2\sqrt{20}}{20}=\frac{\sqrt{20}}{10}$

4) $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}-4&-6\\4&-2\end{vmatrix}=32$

$$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{32}{8\sqrt{20}}=\frac{32\sqrt{20}}{160}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\Leftrightarrow\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\begin{vmatrix}-4 & -6\\ 4 & -2\end{vmatrix}}{8\sqrt{20}}$$

II. المستقيم في المستوى (دراسة تحليلية)

1. متجهة منظميه على مستقيم في المستوى

تعريف : ليكن (D) مستقيم في المستوى

نسمي متجهة منظميه على المستقيم (D) , كل متجهة غير منعدمة ومتعامدة مع متجهة موجهة للمستقيم (D)

(D) $ax+by+c=0$ متجهة منظمية على المستقيم (D) هي: $\vec{n}(a;b)$

أمثلة: أعط متجهة منظمية على المستقيم (D) في كل حالة من الحالات التالية :

1) $(D):x-2y+5=0$ (2 $(D):x-1=0$

3) $(D):2y-3=0$

الأجوبة :

متجهة منظمية على المستقيم $ax+by+c=0$ (D) هي : $\vec{n}(a;b)$

1) $(D):x-2y+5=0$ $\vec{n}(2;1)$ متجهة منظمية على (D)

2) $(D):0x+2y-3=0$ $\vec{n}(-2;0)$ متجهة منظمية على (D)

3) $(D):1x+0y-1=0$ $\vec{n}(0;1)$ متجهة منظمية على (D)

2. معادلة مستقيم معرف بنقطة ومتجهة منظمية:

خاصية: معادلة المستقيم (D) المار من النقطة $A(x_A;y_A)$ و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمية عليه هي : $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

مثال : حدد معادلة المستقيم (D) المار من النقطة $A(1;2)$ و $\vec{n}(2;-3)$ متجهة منظمية عليه

الجواب: (هناك طريقتين يمكن استعمالهما)

طريقة1: $M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

لدينا $\overrightarrow{AM}(x-1,y-2)$ و $\vec{n}(2;-3)$

$\Leftrightarrow 2(x-1)-3(y-2)=0\Leftrightarrow(D)/2x-3y+4=0$

طريقة2: نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمية عليه

نعلم أن : $\vec{n}(2;-3)$ متجهة منظمية على (D)

اذن: $a=2;b=-3$ ومنه المعادلة تصبح : $(D)/2x-3y+c=0$

ونعلم أن : $A(1;2)\in(D)$ اذن احداثياته تحقق المعادلة يعني :

$2\times1-3\times2+c=0$ يعني $c=4$ ومنه : $(D)/2x-3y+4=0$

تمرين8: نعتبر في المستوى النقط التالية :

$A(1;2)$ و $B(-2;3)$ و $C(0;4)$

1. حدد معادلة المستقيم (D) واسط القطعة $[AB]$
2. حدد معادلة (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة A

الجواب: 1) واسط القطعة $[AB]$ هو مستقيم عمودي على (AB) ويمر من I منتصف القطعة $[AB]$

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{AB}(a,b)$ متجهة منظمية على (D)

ولدينا : $\overrightarrow{AB}(-3,1)$ متجهة منظمية على (D) اذن: $a=-3;b=1$

ومنه المعادلة تصبح : $(D)/-3x+y+c=0$

ونعلم أن : $I\in(D)$ علينا أولا حساب احداثيات I

$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ يعني $I\left(\frac{-1}{2},\frac{5}{2}\right)$

$I\in(D)$ اذن احداثيات I تحقق المعادلة يعني :

$-3\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}+c=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+c=0\Leftrightarrow c=-4$ ومنه : $(D)/-3x+y-4=0$

2) (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة A

يعني (Δ) عمودي على (BC) ويمر من A

ومنه : $\overrightarrow{BC}(2,1)$ متجهة منظميه على (Δ)

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{BC}(a,b)$ متجهة منظمية على (Δ)

اذن : $a=2;b=1$ ومنه المعادلة تصبح : $(\Delta)/2x+y+c=0$

ونعلم أن : $A\in(\Delta)$ اذن احداثيات A تحقق المعادلة يعني :

$2\times1+2+c=0\Leftrightarrow c=-4$ ومنه : $(\Delta)/2x+y-4=0$

تمرين9: نعتبر في المستوى النقط التالية :

$A(1;1)$ و $B(-2;0)$ و $C(3;5)$

1. حدد معادلة المستقيم (D) واسط القطعة $[AC]$
2. حدد معادلة (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة C

الجواب: 1) واسط القطعة $[AC]$ هو مستقيم عمودي على (AC) ويمر من I منتصف القطعة $[AC]$

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{AC}(a,b)$ متجهة منظمية على (D)

ولدينا : $\overrightarrow{AC}(2,4)$ متجهة منظمية على (D) اذن: $a=2;b=4$

ومنه المعادلة تصبح : $(D)/2x+4y+c=0$

ونعلم أن : $I\in(D)$ علينا أولا حساب احداثيات I

$I\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)$ يعني $I(2,3)$

$I\in(D)$ اذن احداثيات I تحقق المعادلة يعني :

$2\times2+4\times3+c=0\Leftrightarrow c=-16$

ومنه : $(D)/2x+4y-16=0$

2) (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة C

يعني (Δ) عمودي على (AB) ويمر من C

ومنه : $\overrightarrow{AB}(-3,-1)$ متجهة منظميه على (Δ)

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{AB}(a,b)$ متجهة منظمية على (Δ)

اذن : $a=-3;b=-1$ ومنه المعادلة تصبح : $(\Delta)/-3x-y+c=0$

ونعلم أن : $C\in(\Delta)$ اذن احداثيات C تحقق المعادلة يعني :

$-9-5+c=0\Leftrightarrow c=14$ ومنه : $(\Delta)/-3x-y+14=0$

3. تعامد مستقيمين:

خاصية: ليكن (D) و (D') مستقيمين معادلاتهما على التوالي : $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$

يكون المستقيمان (D) و (D') متعامدين إذا وفقط إذا كانت متجهاهما المنظميتان عليهما متعامدتان أي : $aa'+bb'=0$

تمرين10: نعتبر في المستوى المستقيمين :

$(D):2x+3y-1=0$ و $(D'):\frac{3}{2}x-y+4=0$

هل (D) و (D') متعامدين ؟

الجواب: $\vec{n}(2;3)$ متجهة منظمية على (D)

$\vec{n'}\left(\frac{3}{2};-1\right)$ متجهة منظمية على (D')

$\vec{n}\cdot\vec{n'}=2\times\frac{3}{2}+3\times(-1)=3-3=0$. ومنه $\vec{n}\perp\vec{n'}$

وبالتالي: $(D)\perp(D')$

4. مسافة نقطة عن مستقيم

تعريف: ليكن (D) مستقيما معادلته: $ax+by+c=0$ و $A(x_A;y_A)$ نقطة من المستوى.

مسافة النقطة A عن المستقيم (D) هي: $d(A;(D))=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مثال : $(D)\ x-y+2=0$ و $A(1;4)$ حدد مسافة النقطة A عن المستقيم (D)

الجواب: $d(A;(D))=\frac{|1-4+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

تمرين11: نعتبر في المستوى النقطة: $A(-1;-3)$ و المستقيم (D) الذي معادلته: $x+2y-3=0$

1. أحسب مسافة النقطة A عن المستقيم (D)
2. حدد زوج إحداثيتي النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D)

الجواب: 1) $d(A;(D))=\frac{|-1-6-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$

2) نحدد أولا معادلة ديكارتية للمستقيم (AH):

$\vec{u}(-2,1)$ متجهة موجهة لـ (D) $x+2y-3=0$

اذن $\vec{u}(-2,1)$ منظمية على (AH) اذن: $(AH)/-2x+1y+c=0$

ولدينا $A\in(AH)$ اذن: $(-2)\times(-1)-3+c=0$ يعني $c=1$

ومنه: $(AH)/-2x+1y+1=0$

H هي نقطة تقاطع (AH) و (D) اذن احداثيات H هي حلول النظمة:

$\begin{cases}x+2y-3=0\\-2x+y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3\\-2x+y=-1\end{cases}$ نضرب المعادلة الأولى في $\times(-2)$

ونجد: $\begin{cases}2x+4y=6\\-2x+y=-1\end{cases}\Leftrightarrow$ ونجمع المعادلتين ونجد: $x+2y=3$

$\Leftrightarrow 2x+4y-2x+y=6-1\Leftrightarrow 5y=5\Leftrightarrow y=1$

ومنه: $x+2y=3\Leftrightarrow x+2=3\Leftrightarrow x=1$ ومنه $H(1;1)$

تمرين12: نعتبر في المستوى النقطتين: $A(-1;-3)$ و $B(3;2)$

1. حدد معادلة للمستقيم (AB)
2. أحسب مسافة النقطة O عن المستقيم (AB)
3. استنتج مساحة المثلث OAB
4. حدد زوج إحداثيتي النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (AB)

أجوبة :

1) نحدد أولا معادلة ديكارتية للمستقيم (AB):

$\overrightarrow{AB}(4,5)$ متجهة موجهة لـ (AB) $\overrightarrow{AB}(-b,a)$ اذن:

$a=5;b=-4$

ومنه: $(AB)/5x-4y+c=0$

ولدينا $A\in(AB)$ اذن: $5\times(-1)-4\times(-3)+c=0$ يعني $c=-7$

ومنه: $(AB)/5x-4y-7=0$

2) لدينا $O(0,0)$ اذن:

$d(O;(AB))=\frac{|5\times0-4\times0-7|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}}=\frac{|-7|}{\sqrt{41}}=\frac{7}{\sqrt{41}}=\frac{7\sqrt{41}}{41}$

3) لدينا $d(O;(AB))=OH$ اذن:

$S_{ABC}=\frac{AB\times OH}{2}=\frac{\sqrt{4^2+(-5)^2}}{2}\times\frac{7}{\sqrt{41}}=\frac{\sqrt{41}}{2}\times\frac{7}{\sqrt{41}}=\frac{7}{2}$

4) نحدد أولا معادلة ديكارتية للمستقيم (OH):

لدينا $\overrightarrow{AB}(4,5)$ متجهة منظمية على (OH)

اذن: $(OH)/4x+5y+c=0$ و

ولدينا $O\in(OH)$ اذن: $4\times0+5\times0+c=0$ يعني $c=0$

ومنه: $(OH)/4x+5y=0$

H هي نقطة تقاطع (OH) و (AB) اذن احداثيات H هي حلول النظمة:

$\begin{cases}4x+5y=0\\5x-4y=7\end{cases}$ نستعمل طريقة المحددات لحل هذه النظمة:

محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}4&5\\5&-4\end{vmatrix}=-41\neq0$

و منه النظمة تقبل حلا وحيدا: هو $x=\frac{\begin{vmatrix}0&5\\7&-4\end{vmatrix}}{-41}=\frac{-35}{-41}=\frac{35}{41}$

و منه: $y=\frac{\begin{vmatrix}4&0\\5&7\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{28}{-41}=-\frac{28}{41}$ $H\left(\frac{35}{41};-\frac{28}{41}\right)$

III. معادلة ديكارتية لدائرة

1. معادلة دائرة معرفة بمركزها و شعاعها

خاصية: معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R $(R\succ0)$ هي: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

وتكتب أيضا: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ حيث: $c=a^2+b^2-R^2$

مثال1: حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $A(-1;-3)$ وشعاعها $R=\sqrt{2}$

الجواب : $(C)\ (x-(-1))^2+(y+3)^2=(\sqrt{2})^2$

يمكننا الاكتفاء بهذه الكتابة

أو النشر فنجد: $(C)\ x^2+y^2+2x+6y+8=0$

مثال2: حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-2;1)$ وتمر من النقطة $A(1;4)$

الجواب : شعاع هذه الدائرة هو: $R=\Omega A$

$R=\Omega A=\sqrt{(x_A-x_\Omega)^2+(y_A-y_\Omega)^2}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

ومنه معادلة الدائرة هي: $(C)\ (x-(-2))^2+(y-1)^2=(3\sqrt{2})^2$

يمكننا الاكتفاء بهذه الكتابة

أو النشر فنجد: $(C)\ x^2+y^2+4x-2y-13=0$

وتكتب على الشكل: $x^2+y^2+ax+by+c=0$

تمرين13: حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$ حيث $A(1;3)$ و $B(-1;1)$

الجواب : شعاع هذه الدائرة هو : $R=\frac{AB}{2}$

$$R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}{2}=\frac{\sqrt{4+4}}{2}=\frac{\sqrt8}{2}=\frac{2\sqrt2}{2}=\sqrt2$$

مركز الدائرة (C) هو: منتصف القطعة $[AB]$

أي : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ يعني $I(0,2)$

ومنه معادلة الدائرة هي : $(C)\ (x-0)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt2\right)^2$

يعني : $(C)\ x^2+y^2-4y+2=0$

2. تمثيل بارامتري لدائرة :

خاصية و تعريف: الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R $(R\succ0)$ هي مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق النظمة : $(S)\begin{cases}x=a+R\cos\theta\\y=b+R\sin\theta\end{cases}$

و النظمة (S) تسمى تمثيلا بارامتريا للدائرة (C)

مثال1: حدد تمثيلا بارا متريا للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;-2)$ وشعاعها $R=\sqrt2$

الجواب : تمثيل بارا متري للدائرة (C) هو : $\begin{cases}x=1+\sqrt2\cos\theta\\y=-2+\sqrt2\sin\theta\end{cases}$

$(\theta\in\mathbb{R})$ بارا متري حقيقي

مثال2: حدد مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق النظمة $\begin{cases}x=3+\sqrt3\cos\theta\\y=1+\sqrt3\sin\theta\end{cases}$ حيث $(\theta\in\mathbb{R})$

الجواب : $\begin{cases}x=3+\sqrt3\cos\theta\\y=1+\sqrt3\sin\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=\sqrt3\cos\theta\\y-1=\sqrt3\sin\theta\end{cases}$

$(x-3)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt3\cos\theta\right)^2+\left(\sqrt3\sin\theta\right)^2\Leftrightarrow$

$(x-3)^2+(y-1)^2=3\left((\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\right)\Leftrightarrow$

$(x-3)^2+(y-1)^2=\sqrt3^2\Leftrightarrow$

ومنه : مجموعة النقط $M(x;y)$ هي الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(3;1)$ وشعاعها $R=\sqrt3$

IV. دراسة مجموعة النقط $M(x;y)$ بحيث $x^2+y^2+ax+by+c=0$

1)خاصية: لتكن a و b و c أعداد حقيقية و (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ بحيث $x^2+y^2+ax+by+c=0$

- تكون (E) دائرة إذا وفقط إذا كان : $a^2+b^2-4c>0$ ومركز هذه الدائرة هو $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$
و شعاعها هو $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$
- إذا كان $a^2+b^2-4c<0$ فان : (E) هي المجموعة الفارغة
- إذا كان $a^2+b^2-4c=0$ فان (E) هي : $(E)=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)\right\}$

أمثلة : حدد طبيعة (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق:

1. $(E):\ x^2+y^2-x+3y-4=0$
2. $(E):\ x^2+y^2-6x+2y+10=0$
3. $(E):\ x^2+y^2-4x+5=0$

الأجوبة: 1) $a=-1;b=3;c=-4$

نحسب : $a^2+b^2-4c=(-1)^2+3^2-4\times(-4)=1+9+16=26>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(\frac{1}{2};\frac{-3}{2})$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$

2) $a=-6;b=2;c=10$

نحسب : $a^2+b^2-4c=(-6)^2+2^2-4\times(10)=36+4-40=0$

ومنه: (E) هي عبارة عن النقطة : $\Omega(3;-1)$

3) $a=-4;b=0;c=5$

نحسب : $a^2+b^2-4c=16-20=-4<0$

ومنه: (E) هي المجموعة الفارغة

تمرين14: حدد طبيعة (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق: $(E):\ x^2+y^2+5x-3y+\frac{11}{2}=0$

الجواب : ($a=5;b=-3;c=\frac{11}{2}$

نحسب : $a^2+b^2-4c=5^2+(-3)^2-4\times\left(\frac{11}{2}\right)=25+9-22=12>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(-\frac{5}{2};\frac{3}{2})$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{12}}{2}=\frac{2\sqrt3}{2}=\sqrt3$

تمرين15: حدد طبيعة (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق:

1. $(E)\ x^2+y^2-1=0$
2. $(E)\ x^2+y^2-2x-6y+6=0$
3. $(E)\ x^2+y^2-4x-2y+7=0$
4. $(E)\ x^2+y^2+8y+12=0$

الأجوبة : 1) $x^2+y^2=1\Leftrightarrow x^2+y^2-1=0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $O(0;0)$ وشعاعها : $R=1$

2) $x^2-2x+1+y^2-2\times y+3^2-3^2-1+6=0\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-6y+6=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=4=(2)^2$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(1;3)$ وشعاعها : $R=2$

3) $x^2-4x+4+y^2-2\times y+1-1-4+7=0\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y+7=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=-2$

ومنه : (E) هي المجموعة الفارغة

4) $(x-0)^2+y^2+2\times4\times y+4^2-4^2+12=0\Leftrightarrow x^2+y^2+8y+12=0$

$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y+4)^2=4=(2)^2$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(0;-4)$ وشعاعها : $R=2$

2) داخل وخارج الدائرة

تعاريف: لتكن (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R $(R \succ 0)$ و M نقطة من المستوى

- تكون النقطة M نقطة من الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : $\Omega M = R$
- تكون النقطة M خارج الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : $\Omega M \succ R$
- تكون النقطة M داخل الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : $\Omega M \prec R$

تمرين16: حل مبيانيا المتراجحتين التاليتين :

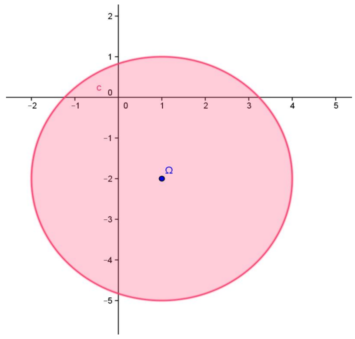
1) $x^2+y^2-2x+4y-4<0$ (2 $x^2+y^2-1>0$

الأجوبة : 1)

$x^2-2x+1-1+y^2+4\times y+4-4-4<0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x+4y-4<0$

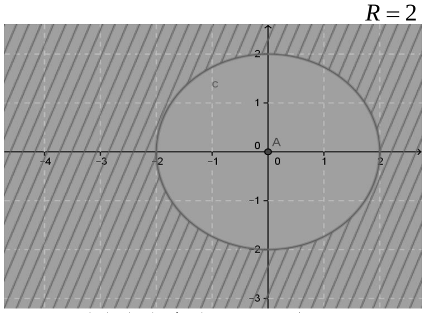
$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2<9=(3)^2$

ومنه : (E) هو داخل الدائرة التي مركزها $\Omega(1;-2)$ وشعاعها : $R=3$



2) $(x-0)^2+(y-0)^2>2^2 \Leftrightarrow x^2+y^2>4 \Leftrightarrow x^2+y^2-4>0$

ومنه : (E) هو خارج الدائرة التي مركزها $O(0;0)$ وشعاعها : $R=2$



تمرين17: حل مبيانيا النظمة التالية:

$$\begin{cases} x^2+y^2-1>0 \\ x^2+y^2-4x-12<0 \end{cases}$$

الجواب :

أ) $x^2-4x+4-4+y^2-12<0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-12<0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-0)^2<16=(4)^2$

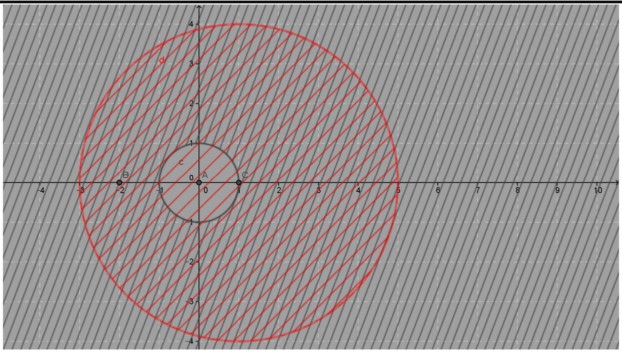
و هذا يعني داخل الدائرة التي مركزها $\Omega(2;0)$ وشعاعها : $R=4$

ب) $(x-0)^2+(y-0)^2>1^2 \Leftrightarrow x^2+y^2>1 \Leftrightarrow x^2+y^2-1>0$

يعني خارج الدائرة التي مركزها $O(0;0)$ وشعاعها : $R=1$

مجموعة حلول النظمة (E) هي أزواج احداثيات نقط المستوى التي تنتمي الى تقاطع داخل الدائرة التي مركزها $\Omega(2;0)$ وشعاعها : $R=4$ و خارج الدائرة التي مركزها $O(0;0)$ وشعاعها : $R=1$

أي الجزء من المستوى المخشن باللونين معا



V. الأوضاع ا لنسبية لمستقيم و دائرة في المستوى

لدراسة الوضع النسبي لمستقيم (D) و دائرة (C) مركزها Ω وشعاعها R يمكننا حساب $d(\Omega;(D))$ مسافة النقطة Ω عن المستقيم (D) ومقارنتها بالشعاع R وبالطبع هناك ثلاث حالات :

- إذا كانت $d(\Omega;(D)) \succ R$ فان: المستقيم (D) لا يقطع الدائرة (C)
- إذا كانت $d(\Omega;(D)) \prec R$ فان : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين
- إذا كانت $d(\Omega;(D)) = R$ فان : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطة وحيدة و نقول أيضا أن (D) مماس للدائرة (C)

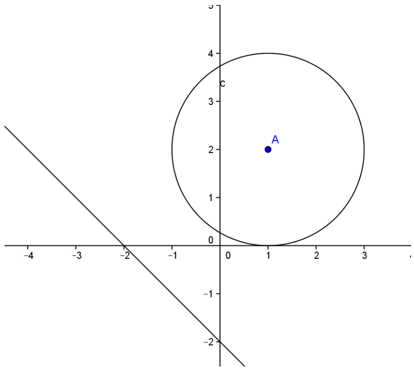
مثال1: أدرس الوضع النسبي للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;2)$ وشعاعها $R=2$ مع المستقيم (D) الذي معادلته :

$(D):\ x+y+2=0$

الجواب: نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$d(\Omega,(P))=\dfrac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|5|}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}>R=2$ ومنه :

المستقيم (D) لا يقطع الدائرة (C)



مثال2: أدرس الوضع النسبي للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;2)$ وشعاعها $R=2$ مع المستقيم (D) الذي معادلته :

$(D):\ x-y+2=0$

الجواب: نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$d(\Omega,(P))=\dfrac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}<R=2$

ومنه : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

سؤال : حدد احداثيات نقط تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D)

معادلة الدائرة هي : $(x-1)^2+(y-2)^2=(2)^2$

نحل اذن النظمة التالية :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)(x-1)^2+(y-2)^2=(2)^2 \\ (2) x-y+2=0 \end{cases}$$

$x+2=y \Leftrightarrow (2)$

نعوض في المعادلة (1) $x+2=y$ فنجد :

$(1)(x-1)^2+(x+2-2)^2=(2)^2$ يعني : $(x-1)^2+(x)^2=4$

يعني : $x^2-2x+1+x^2=4$ يعني : $2x^2-2x-3=0$

نحسب مميز المعادلة فنجد: $\Delta=28$ ومنه للمعادلة حلين هما :

$x_1=\frac{2+2\sqrt{7}}{4}$ و $x_2=\frac{2-2\sqrt{7}}{4}$

يعني : $x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ و $x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

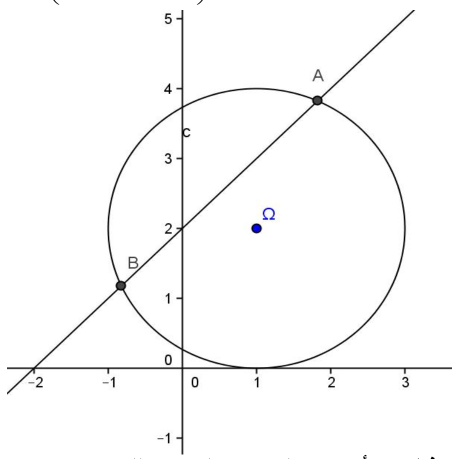
اذا كانت $x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ نعوض في $x+2=y$

فنجد : $y=\frac{1+\sqrt{7}}{2}+2=\frac{5+\sqrt{7}}{2}$

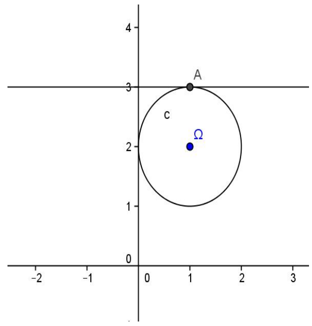
اذا كانت $x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$ نعوض في $x+2=y$

فنجد : $y=\frac{1-\sqrt{7}}{2}+2=\frac{5-\sqrt{7}}{2}$

ومنه نقطتا التقاطع هما : $A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2};\frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)$ و $B\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2};\frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$



مثال3: أدرس الوضع النسبي للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;2)$ وشعاعها $R=1$ مع المستقيم (D) الذي معادلته :



$(D):\ y=3$ **يعني**

$(D):\ 0x+1y-3=0$

الجواب: نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$d(\Omega,(P))=\frac{|0+2-3|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{1}}=1=R$ ومنه : المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

سؤال : حدد احداثيات نقطة التماس T

معادلة الدائرة هي : $(x-1)^2+(y-2)^2=1^2$

نحل اذن النظمة التالية :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)(x-1)^2+(y-2)^2=1 \\ (2) y=3 \end{cases}$$

نعوض في المعادلة (1) $3=y$ فنجد :

$(1)(x-1)^2+1=1$ يعني : $(x-1)^2=0$ يعني : $x=1$

ومنه نقطة التماس هي : $T(1;3)$

تمرين18: أدرس تحليليا تقاطع الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(2;1)$ وشعاعها $R=5$ مع المستقيم (D) الذي معادلته :

$(D):\ 3x+y-2=0$

الجواب: نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega,(P))=\frac{|6+1-2|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{2}<R=5$$

ومنه : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

معادلة الدائرة هي : $(x-2)^2+(y-1)^2=(5)^2$ تكافئ:

$x^2+y^2-4x-2y-20=0$

نحدد احداثيات نقط تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D)

نحل اذن النظمة التالية :

$$\begin{cases} (1) x^2+y^2-4x-2y-20=0 \\ (2) 3x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) x^2-x-2=0 \\ (2) y=-3x+2 \end{cases}$$

نحسب مميز المعادلة (1) فنجد: $\Delta=9$ ومنه للمعادلة

حلين هما : $x_1=\frac{1+3}{2}=2$ و $x_2=-1$

اذا كانت $x_1=2$ فان : $y=-4$

اذا كانت $x_1=-1$ فان : $y=5$

ومنه نقطتا التقاطع هما : $A(-1;5)$ و $A(2;-4)$

تمرين19: أدرس تحليليا تقاطع الدائرة (C) التي معادلتها : $x^2+y^2-2x-8y+1=0$ (1) مع المستقيم (D) المعرف بتمثيله البارامتري :

$(D):\ \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$

الجواب: نعوض في المعادلة (1) فنجد :

$(1+2t)^2+t^2-2(1+2t)-8t+1=0$ يعني: $5t^2-8t=0$ يعني: $t(5t-8)=0$

يعني : $t_1=0$ أو $t_2=\frac{8}{5}$

اذا كانت $t_1=0$ نعوض في $\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \end{cases}$ فنجد $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$:

اذا كانت $t_2=\frac{8}{5}$ نعوض فنجد $\begin{cases} x=\frac{21}{5} \\ y=\frac{8}{5} \end{cases}$

ومنه : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

و نقطتا التقاطع هما : $A(1;0)$ و $B\left(\frac{21}{5};\frac{8}{5}\right)$

VI. معادلة ديكارتية لمستقيم مماس لدائرة في نقطة معلومة

تذكير: يكون المستقيم (D) مماسا للدائرة (C) ذات المركز Ω عند النقطة A إذا وفقط إذا كان : (D) عموديا على المستقيم (ΩA)

خاصية: لتكن الدائرة (C) التي معادلتها $x^2+y^2+ax+by+c=0$ و $A(x_A;y_A)$ نقطة من الدائرة (C)

معادلة ديكارتية للمماس للدائرة (C) في النقطة A هي :

$$(x-x_A)\left(\frac{a}{2}+x_A\right)+(y-y_A)\left(\frac{b}{2}+y_A\right)=0$$

ملحوظة: حصلنا على معادلة المماس للدائرة (C) في النقطة A باستعمال التكافؤ : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0 \Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

مثال : لتكن (C) الدائرة التي معادلتها الديكارتية هي :

$(1)\ x^2+y^2-4x-2y+1=0$

1) تأكد أن $A(0;1)\in(C)$ ثم حدد مركز وشعاع الدائرة (C)

2) معادلة لمماس للدائرة (C) في النقطة A

الجواب : 1) نتحقق أن احداثيات $A(0;1)$ تحقق المعادلة (1)

$0^2+1^2-4\times0-2\times1+1=0$ (1) ومنه $A(0;1)\in(C)$

$a=4;b=-2;c=1$

نحسب : $a^2+b^2-4c=(4)^2+(-2)^2-4\times1=16+4-4=16>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(-2;1)$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{16}}{2}=2$

2) معادلة لمماس للدائرة (C) في النقطة A ؟؟؟؟

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$ ولدينا : $\overrightarrow{AM}(x-0;y-1)$ و

$\overrightarrow{A\Omega}(-2;0)$

$-2(x-0)=0\Leftrightarrow-2(x-0)+0(y-1)=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

$x=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

ومنه معادلة مماس الدائرة (C) في النقطة $A(0;1)$ هو المستقيم الذي معادلته :

$(D): x=0$

تمرين20: لتكن (C) الدائرة التي معادلتها الديكارتية هي :

$x^2+y^2+4x+4y-2=0$

و المستقيم (D) الذي معادلته : $x+3y-2=0$

1. حدد مركز وشعاع الدائرة (C)
2. بين أن المستقيم (D) مماس للدائرة (C)
3. حدد إحداثيتي نقطه تماس الدائرة (C) و المستقيم (D)

الجواب: 1)نحدد مركز وشعاع الدائرة (C)

$a=4;b=4;c=-2$

نحسب : $a^2+b^2-4c=(4)^2+(4)^2-4\times-2=16+16+8=40>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(-2;-2)$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{40}}{2}=\sqrt{10}$

2)نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$d(\Omega,(P))=\frac{|-2-6-2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}=R$

ومنه : المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

3)نحدد احداثيات نقطة التماس T

معادلة الدائرة هي : $(x+2)^2+(y+2)^2=10$

نحل اذن النظمة التالية :

$\begin{cases}(1)(x+2)^2+(y+2)^2=10\\(2)x+3y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1)(x+2)^2+(y+2)^2=10\\(2)x=2-3y\end{cases}$

نعوض في المعادلة (1) $x=2-3y$ فنجد : $y^2-2y+1=0$

يعني : $(y-1)^2=0$ يعني : $y=1$ ومنه : $x=-1$

ومنه نقطة التماس هي : $T(-1;1)$

أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة	مـادة الـريـاضيـات	المستوى : الأولى باك علوم تجريبية الأستاذ : عثماني نجيب مذكرة رقم 5/

مذكرة رقم 5 في درس المتتاليات:

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
ـ المتتاليات العددية؛ ـ المتتالية الترجعية؛ ـ المتتاليات المكبورة، المتتاليات المصغورة، المتتاليات المحدودة، ـ رتابة متتالية، ـ المتتاليات الحسابية، ـ المتتاليات الهندسية.	ـ توظيف الاستدلال بالترجع؛ ـ التمكن من دراسة متتالية (إكبار، إصغار، رتابة)؛ ـ التعرف على متتالية حسابية أو هندسية وتحديد أساسها وحدها الأول؛ ـ حساب مجموع n حدا متتابعة من متتالية حسابية أو متتالية هندسية. ـ التعرف على وضعيات لمتتاليات حسابية أو هندسية؛ ـ استعمال المتتاليات الحسابية و المتتاليات الهندسية في حل مسائل.	ـ يمكن تقديم مفهوم المتتاليات الترجعية من خلال وضعيات مستقاة من مختلف المواد؛ ـ يشكل درس المتتاليات فرصة لتعويد التلاميذ على استعمال الأدوات المعلوماتية؛ ـ ينبغي استغلال هذه المناسبة لتوظيف الاستدلال بالترجع؛ ـ ينبغي تناول المتتاليات الترجعية دون مغالاة.

I. عموميات حول المتتاليات العددية:

نشاط: لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

1) $0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10$, ...

2) $6 , 3 , 0 , -3 , -6 , -9 , -12$, ...

3) $1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243$, ...

4) $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \frac{1}{32}$, ...

5) $1, 4 , 9 , 16 , 25 , 36$, ...

ليكن I هو $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$

مثال1 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n = 2n+3$

1. أحسب حدها الأول u_0

2. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

الجواب : $u_0 = 2\times 0+3 = 3$ و $u_1 = 2\times 1+3 = 5$

$u_2 = 2\times 2+3 = 4+3 = 7$ و $u_3 = 2\times 3+3 = 9$

نلاحظ أن فرق حدين متتالين هو العدد 2

مثال 2: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بالعلاقة الترجعية التالية : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n+3 \end{cases}$

أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)

الجواب : نعوض n ب 0

فنجد : $u_{0+1} = 2\times u_0+3 = 2\times 1+3 = 2+3 = 5$

اذن : $u_1 = 5$

نعوض n ب 1

فنجد : $u_{1+1} = 2\times u_1+3 = 2\times 5+3 = 10+3 = 13$ اذن : $u_2 = 13$

نعوض n ب 2

فنجد : $u_{2+1} = 2\times u_2+3 = 2\times 13+3 = 26+3 = 29$

اذن : $u_3 = 29$

ملاحظة : هذه المتتالية تسمى متتالية ترجعية

II. المتتاليات المكبورة و المصغورة و المحدودة

نشاط1: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n = \frac{n+1}{2n+1}$

1. بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad \frac{1}{2} < u_n \leq 1$

2. ماذا يمكن أن نقول عن المتتالية (u_n) ؟

الأجوبة : أ) نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n \leq 1$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $1-u_n = 1-\frac{n+1}{2n+1} = \frac{(2n+1)-(n+1)}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} \geq 0$

ومنه : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n \leq 1$ ❶

أ) نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad \frac{1}{2} < u_n$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق :

$$u_n-\frac{1}{2} = \frac{n+1}{2n+1}-\frac{1}{2} = \frac{2(n+1)-(2n+1)}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} > 0$$

ومنه: $\forall n\in\mathbb{N}\ \frac{1}{2} < u_n$ ❷

وبالتالي من ❶ و ❷ نجد: $\forall n\in\mathbb{N}\quad \frac{1}{2} < u_n \leq 1$

2) نقول المتتالية العددية (u_n) مكبورة بالعدد الحقيقي 1

و نقول المتتالية العددية (u_n) مصغورة بالعدد الحقيقي $\frac{1}{2}$

و نقول ان المتتالية العددية (u_n) محدودة

تعريف: لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية

- نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة إذا وجد عدد حقيقي M بحيث $u_n \leq M$ $\forall n\in I$
- نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ مصغورة إذا وجد عدد حقيقي m بحيث $u_n \geq m$ $\forall n\in I$
- نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ محدودة إذا كانت مكبورة مصغورة .

تمرين1: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases} u_{n+1} = u_n^2+2u_n+2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

1)أحسب u_1 2)بين أن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 1

الجواب :

1) $u_{0+1}=u_0^2+2u_0+2=(-1)^2+2\times(-1)+2=1+-2+2=1$

1) يكفي أن نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad 1\le u_n$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق :

$$u_n-1=u_n^2+2u_n+2-1=u_n^2+2u_n+1=(u_n+1)^2\ge 0$$

ومنه : $1\le u_n\quad \forall n\in\mathbb{N}$ وبالتالي : (u_n) مصغورة بالعدد 1

III.رتابة متتالية :

نشاط :نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفتين كالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n=2n+3$ و $v_n=\frac{2}{n}\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ ماذا تلاحظ؟

خاصية:لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية

- تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية إذا وفقط إذا كان: $u_{n+1}\ge u_n\quad \forall n\in I$
- تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$تناقصية إذا وفقط إذا كان: $u_{n+1}\le u_n\quad \forall n\in I$
- تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان : $u_{n+1}=u_n\quad \forall n\in I$

مثال1 : أدرس رتابة المتتالية العددية $(u_n)_{n\in I}$ المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=2n+3$$

الجواب : $u_{n+1}-u_n=2(n+1)+3-(2n+3)=2>0$ اذن: (u_n) تزايدية قطعا

مثال2: أدرس رتابة المتتالية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{2}{n}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

الجواب :

$$v_{n+1}-v_n=\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n}=\frac{2n-2(n+1)}{n(n+1)}=\frac{-2}{n(n+1)}<0$$

اذن: (v_n) تناقصية قطعا

تمرين2: أدرس رتابة المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\frac{-n}{n+2}$$

الجواب : $u_{n+1}-u_n=\left(\frac{-(n+1)}{n+1+2}\right)-\left(\frac{-n}{n+2}\right)=\frac{-n-1}{n+3}+\frac{n}{n+2}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-n-1}{n+3}+\frac{n}{n+2}=\frac{(-n-1)(n+2)+n(n+3)}{(n+3)(n+2)}=\frac{-2}{(n+3)(n+2)}<0$$

اذن $u_{n+1}\le u_n$ وبالتالي (u_n) تناقصية قطعا

تمرين3: أدرس رتابة المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$u_n=\frac{5n-3}{2n+7}\quad \forall n\in\mathbb{N}$ واستنتج أن : $u_n\ge-\frac{3}{7}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

الجواب :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5(n+1)-3}{2(n+1)+7}-\frac{5n-3}{2n+7}=\frac{(5n+2)}{2n+9}-\frac{5n-3}{2n+7}=\frac{(5n+2)(2n+7)-(2n+9)(5n-3)}{(2n+9)(2n+7)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{10n^2+35n+4n+14-10n^2+6n-45n+27}{(2n+9)(2n+7)}=\frac{41}{(2n+9)(2n+7)}\ge0$$

اذن $u_{n+1}-u_n\ge0$ وبالتالي (u_n)

بما أن (u_n) تزايدية فان : $u_n\ge u_0$ يعني $u_n\ge-\frac{3}{7}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

تمرين4: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة

كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}\\ u_0=3\end{cases}$

1. بين أن المتتالية (u_n)مصغورة بالعدد 2
2. بين أن المتتالية (u_n)مكبورة بالعدد 4
3. ماذا تستنتج ؟
4. أدرس رتابة المتتالية (u_n)

الأجوبة: 1) ◎ يكفي ان نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad 2\le u_n$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎تحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=3\ge2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge2$

◎نبين أن: $u_{n+1}\ge2$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-2=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-2=\frac{8(u_n-1)-2(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{6u_n-12}{u_n+2}$

$u_{n+1}-2=\frac{6(u_n-2)}{u_n+2}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge2$

اذن : $u_n-2\ge0$ و $u_n+2>0$ و منه $u_{n+1}-2\ge0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge2$

2)يكفي ان نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\le4$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎تحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=3\le4$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

◎نفترض أن: $u_n\le4$

◎نبين أن: $u_{n+1}\le4$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $4-u_{n+1}=4-\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{4(u_n+2)-8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{-4u_n+16}{u_n+2}$

$4-u_{n+1}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\le4$

اذن : $4-u_n\ge0$ و $u_n+2>0$ و منه $4-u_{n+1}\ge0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\le4$

2) المتتالية العددية (u_n) محدودة لأنها مكبورة ومصغورة

3) $u_{n+1}-u_n=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-u_n=\frac{8(u_n-1)-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n^2+6u_n-8}{u_n+2}$

نعمل $-u_n^2+6u_n-8$ نحسب المميز Δ

$\Delta=36-32=4>0$ هناك جذرين : $x_1=\frac{-6+2}{-2}=2$ و $x_2=\frac{-6-2}{-2}=4$

ومنه التعميل : $-u_n^2+6u_n-8=-(u_n-2)(u_n-4)$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}$

لدينا : $u_n\ge2$ اذن : $u_n\ge0$ و $u_n-2\ge0$

و لدينا : $u_n\le4$ اذن : $u_n-4\le0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}\ge0$ وبالتالي (u_n) تزايدية

تمرين5:نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة

كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{4u_n-2}{u_n+1}\\ u_0=1\end{cases}$

1. بين أن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 1
2. بين أن المتتالية (u_n) مكبورة بالعدد 2
3. ماذا تستنتج ؟
4. أدرس رتابة المتتالية (u_n)

الأجوبة: (1 ◎ يكفي ان نبين أن: $1\le u_n\ \ \forall n\in\mathbb{N}$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎ نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=1\ge1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب) نفترض أن: $u_n\ge1$

◎ نبين أن: $u_{n+1}\ge1$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\frac{4u_n-2}{u_n+1}-1=\frac{4u_n-2-(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{3u_n-3}{u_n+1}$

$u_{n+1}-1=\frac{3(u_n-1)}{u_n+1}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge1$

اذن : $u_n-1\ge0$ و $u_n+1>0$ و منه $u_{n+1}-1\ge0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge1$

2) يكفي ان نبين أن: $u_n\le2\ \ \forall n\in\mathbb{N}$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎ نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=1\le2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

◎ نفترض أن: $u_n\le2$

◎ نبين أن: $u_{n+1}\le2$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $2-u_{n+1}=2-\frac{4u_n-2}{u_n+1}=\frac{2(u_n+1)-(4u_n-2)}{u_n+1}=\frac{-2u_n+4}{u_n+1}$

$2-u_{n+1}=\frac{2(2-u_n)}{u_n+1}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\le2$

اذن : $2-u_n\ge0$ و $u_n+1>0$ و منه $2-u_{n+1}\ge0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\le2$

3) المتتالية العددية (u_n) محدودة لأنها مكبورة ومصغورة

4) $u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n-2}{u_n+1}-u_n=\frac{4u_n-2-u_n(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{u_n+2}$

نعمل $-u_n^2+3u_n-2$ نحسب المميز Δ

$\Delta=9-8=1>0$ هناك جذرين : $x_1=\frac{-3+1}{-2}=1$ و $x_2=\frac{-3-1}{-2}=2$

ومنه التعمل : $-u_n^2+3u_n-2=-(u_n-1)(u_n-2)$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-1)(u_n-2)}{u_n+1}$

لدينا : $u_n\ge1$ اذن : $u_n\ge0$ و $u_n-1\ge0$

و لدينا : $u_n\le2$ اذن : $u_n-2\le0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-1)(u_n-2)}{u_n+1}\ge0$ وبالتالي (u_n) تزايدية

IV. المتتاليات الحسابية:

نشاط: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية :

$\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n=2n-1$

1. أحسب حدها الأول u_0
2. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\ge1}$
3. أحسب $u_{n+1}-u_n\ \ \forall n\in\mathbb{N}$

الجواب: $u_0=2\times0-1=0-1=-1$

$u_1=2\times1-1=2-1=1$

$u_2=2\times2-1=4-1=3$

$u_3=2\times3-1=6-1=5$

نلاحظ أن فرق حدين متتاليين هو العدد 2

$u_{n+1}-u_n=(2(n+1)-1)-(2n-1)=(2n+2-1)-(2n-1)$

اذن: $=(2n+2-1)-(2n-1)=(2n+1)-(2n-1)=2n+1-2n+1$

$u_{n+1}-u_n=2=r$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ هي حسابية أساسها : $r=2$

1. تعريف :

نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r بحيث :

$\forall n\ge n_0\ \ u_{n+1}=u_n+r$

العدد الحقيقي r يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$

تمرين6: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n=\frac{n+3}{4}$

بين أن المتتالية (u_n) حسابية وحدد أساسها وحدها الأول

الجواب : $u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)+3}{4}-\frac{n+3}{4}=\frac14=r$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ هي حسابية أساسها $r=\frac14$

وحدها الأول : $u_0=\frac34$

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

فان : $u_n=u_0+nr$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية حسابية أساسها r

فان : $u_n=u_p+(n-p)r$ لكل $n\ge n_0$ و $p\ge n_0$

تمرين7: لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac12$ و $u_6=31$

1) أحسب u_0 2) أكتب u_n بدلالة n 3) أحسب : u_{2015} ثم u_{2016}

أجوبة: 1) لدينا (u_n) حسابية اذن : $u_n=u_0+nr$

ومنه : $u_6=u_0+6\times\frac12$ **يعني** $31=u_0+3$ **يعني** $28=u_0$

2) $u_n=u_0+nr$ يعني $u_n=28+\frac{n}{2}$

3) $u_{2015}=28+\frac{2015}{2}=\frac{2071}{2}$

و $u_{2016}=28+\frac{2016}{2}=28+1008=1036$

تمرين8: لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r و بحيث $u_0=5$

و $u_{100}=-45$

1) حدد r 2) أحسب : u_{2015} و u_{2016}

أجوبة: 1) لدينا (u_n) حسابية اذن : $u_n=u_0+nr$

ومنه : $u_{100}=u_0+100r$ يعني $-45=5+100r$ يعني $-50=100r$ يعني
$r=-\frac{1}{2}$

2) (u_n) حسابية اذن : $u_n=u_0+nr$ يعني $u_{2015}=5+2015\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

يعني $u_{2015}=5-\frac{2015}{2}$ يعني $u_{2015}=\frac{10-2015}{2}=\frac{-2005}{2}$

ومنه $u_{2016}=\frac{-2005}{2}+\frac{-1}{2}=\frac{-2006}{2}=-1003$

تمرين9:نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{-1}{2+u_n}\\u_0=2\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$

$\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
3. بين بالترجع أن : $u_n=\frac{-3n+2}{3n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$
4. أكتب v_n بدلالة n
5. استنتج طريقة أخرى لكتابة u_n بدلالة n

أجوبة : $u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n}$

1) نعوض nب0

$u_{0+1}=\frac{-1}{2+u_0}=\frac{-1}{2+2}=\frac{-1}{4}$ اذن : $u_1=-\frac{1}{4}$

نعوض n ب 1 فنجد :

$u_{1+1}=\frac{-1}{2+u_1}=\frac{-1}{2-\frac{1}{4}}=\frac{-1}{\frac{7}{4}}=\frac{-4}{7}$ اذن : $u_2=-\frac{4}{7}$

نعوض n ب 0 في $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ فنجد :

$v_0=\frac{1}{u_0+1}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=\frac{1}{u_1+1}=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{3}{4}$

2) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}$

نعوض u_{n+1} ب $\frac{-1}{2+u_n}$

فنجد:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{-1}{2+u_n}+1}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{\frac{u_n+1}{2+u_n}}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{u_n+2}{u_n+1}-\frac{1}{u_n+1}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+2-1}{u_n+1}=\frac{u_n+1}{u_n+1}=1$$

ومنه (v_n)متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_0=\frac{1}{3}$

3)أ) لدينا : $u_0=2$ و $\frac{-3\times0+2}{2\times0+1}=\frac{2}{1}=2$

اذن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن : $u_n=\frac{-3n+2}{3n+1}$

ج) نبين أن : $u_{n+1}=\frac{-3(n+1)+2}{3(n+1)+1}$ أي نبين أن : $u_{n+1}=-\frac{3n+1}{3n+4}$ ؟؟؟

لدينا : $u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n}$ وحسب افتراض الترجع لدينا : $u_n=\frac{-3n+2}{3n+1}$

اذن : $u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n}=\frac{-1}{2+\frac{-3n+2}{3n+1}}=\frac{-1}{\frac{3n+4}{3n+1}}=-\frac{3n+1}{3n+4}$

ومنه : $u_n=\frac{-3n+2}{3n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

4)بما أن : (v_n)متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_0=\frac{1}{3}$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=\frac{1}{3}+n$

5)نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ يعني $u_n+1=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}-1$

ونعلم أن : $v_n=\frac{1}{3}+n$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{\frac{1}{3}+n}-1=\frac{1}{\frac{3n+1}{3}}-1=\frac{3}{3n+1}-1=\frac{3-3n-1}{3n+1}=\frac{-3n-2}{3n+1}$$

تمرين10:نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{3+u_n}\\u_0=0\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية(v_n)المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{1+u_n}$

$\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
2. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة : (1 $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{u_n-1}{3+u_n}$

فنجد:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{u_n-1}{3+u_n}+1}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{\frac{2u_n+2}{3+u_n}}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{u_n+3}{2u_n+2}-\frac{2}{2u_n+2}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3-2}{2u_n+2}=\frac{u_n+1}{2u_n+2}=\frac{u_n+1}{2(u_n+1)}=\frac{1}{2}=r$$

ومنه (v_n)متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول : $v_0=1$

2) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول :

$v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\frac{n}{2}$

نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ يعني $u_n+1=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}-1$

ونعلم أن : $v_n=1+\frac{n}{2}$ اذن :

$u_n=\frac{1}{1+\frac{n}{2}}-1=\frac{1}{\frac{n+2}{2}}-1=\frac{2}{n+2}-1=\frac{2-n-2}{n+2}=\frac{-n}{n+2}$

3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية

نضع $S_n=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots+u_n$ حيث $n\succ p\ge n_0$

لدينا $S_n=(n-p+1)\left(\frac{u_n+u_p}{2}\right)$

المجموع $S_n=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots+u_n$

يحتوي على $(n-p+1)$ حد

ملاحظة :

▪ إذا كانت (u_n) متتالية حسابية :

فإن $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$

▪ إذا كانت (u_n) متتالية حسابية

فان : $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n=n\left(\frac{u_1+u_n}{2}\right)$

مثال أو تمرين11: لتكن المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\ge1}$ الذي أساسها $r=3$ وحدها الأول $u_0=5$

1) أكتب u_n بدلالة n و أوجد الحد التاسع

2) أحسب المجموع التالي : $S=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{13}$

أجوبة : (1 وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها الأول $u_0=5$

فان : $u_n=u_0+(n-0)r$ أي: $u_n=5+3(n-0)$ أي:

$u_n=3n+5$

ومنه : $u_8=3\times8+5=29$

(2 $S=u_0+u_1+\cdots+u_{13}=(13-0+1)\frac{u_0+u_{13}}{2}$

ومنه $S=14\frac{u_0+u_{13}}{2}=\frac{14}{2}(5+u_{13})$ نحسب:

$u_{13}=3\times13+5=44$

وبالتالي: $S=7(5+44)=7\times49=343$

تمرين12:

1. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0=1$

أحسب المجموع التالي : $S_1=u_3+u_4+u_5+\cdots+u_{30}$

2. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ و حدها الأول $u_0=4$

أحسب المجموع التالي : $S_2=u_7+u_8+u_9+\cdots+u_{25}$

الجواب: (1 $S_1=u_3+u_4+u_5+\cdots+u_{30}=(30-3+1)\frac{u_3+u_{30}}{2}$

$S_1=(28)\frac{u_3+u_{30}}{2}$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0=1$ فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=1+(n-0)\frac{1}{2}$ أي: $u_n=1+\frac{n}{2}$

ومنه نحسب: $u_3=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ و : $u_{30}=1+\frac{30}{2}=\frac{32}{2}=16$

وبالتالي: $S_1=(28)\frac{u_3+u_{30}}{2}=14\left(\frac{5}{2}+16\right)=14\left(\frac{37}{2}\right)=7\times37=259$

(2 $S_2=u_7+u_8+u_9+\cdots+u_{25}=(25-7+1)\frac{u_7+u_{25}}{2}=(19)\frac{u_7+u_{25}}{2}$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ وحدها الأول $u_0=4$ فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=4+(n-0)(-2)$ أي: $u_n=4-2n$

نحسب: $u_7=4-2\times7=4-14=-10$

و $u_{25}=4-2\times25=4-50=-46$

وبالتالي: $S_2=(19)\frac{u_7+u_{25}}{2}=(19)\frac{-10+-46}{2}=(19)\frac{-56}{2}=19\times-28=-532$

V. المتتاليات الهندسية:

نشاط1: لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

1. $1\ ,\ 3\ ,\ 9\ ,\ 27\ ,\ 81\ ,\ 243\ ,$ ....

2. $1\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ -\frac{1}{8}\ ,\ \frac{1}{16}\ ,\ -\frac{1}{32}\ ,$ ....

نشاط2: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n=2\times3^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$

2. أحسب $\frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

الجواب: (1: $u_0=2\times3^0=2\times1=2$ و $u_1=2\times3^1=6$ و $u_2=2\times3^2=18$ و $u_3=2\times3^3=54$

(2 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2\times3^{n+1}}{2\times3^n}=\frac{3^{n+1}}{3^n}=\frac{3^n\times3^1}{3^n}=3^1=3=q$

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $u_0=2$

1. تعريف:

نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q

بحيث : $u_{n+1}=qu_n \quad \forall n\ge n_0$

العدد الحقيقي q يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$

تمرين13: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge0}$ بحيث: $u_n=5\times3^{2n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

بين أن $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية و حدد أساسها q و حدها الأول

الجواب : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{5\times3^{2n+3}}{5\times3^{2n+1}}=\frac{3^{2n+3}}{3^{2n+1}}=3^{(2n+3)-(2n+1)}=3^2=9=q$

اذن: المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ هندسية أساسها $q=9$ وحدها الأول $u_0=15$

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم وحدها الأول u_{n_0} فان :

$u_n=u_{n_0}q^{n-n_0}$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم فان : $u_n = u_m q^{n-m}$ لكل $n \ge n_0$ و $m \ge n_0$

تمرين14: لتكن (u_n) متتالية هندسية بحيث : $u_5 = \frac{243}{2}$ و $u_2 = \frac{9}{2}$

حدد q أساس المتتالية (u_n) و أكتب u_n بدلالة n

الجواب : لدينا (u_n) متتالية هندسية اذن : $u_n = u_m q^{n-m}$

ومنه : اذن: $u_5 = u_2 q^{5-2}$ يعني : $\frac{243}{2} = \frac{9}{2} q^3$

يعني $q^3 = \frac{243}{9}$ يعني : $q^3 = 27$ يعني : $q = 3$

لدينا أيضا : $u_n = u_2 q^{n-2}$ يعني :

$$u_n = \frac{9}{2} 3^{n-2} = \frac{3^2 \times 3^{n-2}}{2} = \frac{3^{n-2+2}}{2} = \frac{3^n}{2}$$

تمرين15: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول $u_0 = 81$ وأساسها : $q = \frac{1}{3}$

1) أكتب u_n بدلالة n 2) أحسب u_1 و u_2 و u_3

3) حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n = 1$

الأجوبة: 1) نعلم أن $(u_n)_{n\ge 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $u_0 = 81$

اذن: $u_n = u_0 q^{n-0}$ ومنه : $u_n = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

2) $u_1 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$ و $u_2 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9$

و $u_3 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{81}{27} = 3$

3) $u_n = 1$ يعني $81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1$ يعني $81 \times \frac{1}{3^n} = 1$ يعني $\frac{81}{3^n} = 1$

يعني $81 = 3^n$ يعني $n = 4$

تمرين16: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول $u_0 = 5$

و $u_3 = 40$

1. تحقق أن أساس المتتالية (u_n) هو $q = 2$
2. أكتب u_n بدلالة n و أحسب u_4
3. حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n = 160$

الأجوبة : 1) نعلم أن $(u_n)_{n\ge 0}$ متتالية هندسية اذن :

اذن: $u_3 = u_0 q^{3-0}$ يعني : $40 = 5q^3$ يعني : $q^3 = \frac{40}{5}$ يعني :

$q^3 = 8$ يعني : $q = 2$

2) $u_n = 5 \times (2)^n$

$u_1 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$ و $u_2 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9$ و

$u_4 = 5 \times (2)^4 = 5 \times 16 = 80$

3) $u_1 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27$ و $u_2 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9$

و $u_5 = 2 \times u_4 = 2 \times 80 = 160$ ومنه : $n = 5$

3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم نضع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

إذا كان $q \ne 1$ فان : $S_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$

مثال أو تمرين17: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge 0}$ المعرفة بالصيغة التالية : $u_{n+1} = 3 \times U_n$ و $u_0 = 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\ge 0}$ هندسية
2. عبر عن U_n بدلالة n
3. أحسب المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_5$

الجواب: 1) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times u_n}{u_n} = 3 = q$

اذن: المتتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $u_0 = 3$

2) $(u_n)_{n\ge 0}$ هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $u_0 = 3$

اذن: $u_n = u_0 q^{n-0}$ أي: $u_n = 3 \times (3)^n = 3^1 \times (3)^n = (3)^{n+1}$

3) $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_5 = u_1 \times \frac{1 - q^{5-1+1}}{1 - q} = u_1 \times \frac{1 - q^5}{1 - q}$

$u_1 = 3^{1+1} = 3^2 = 9$

$$S_n = 9 \times \frac{1 - 3^5}{1 - 3} = 9 \times \frac{1 - 3^5}{-2} = 9 \times \frac{1 - 243}{-2} = 9 \times \frac{-242}{-2} = 1029$$

تمرين18: لتكن (u_n) متتالية هندسية بحيث : $u_5 = 486$ و $u_7 = 4374$ و أساسها $q \succ 0$

1) حدد أساس المتتالية (u_n) 2) أحسب u_0 و u_{10}

3) أكتب u_n بدلالة n 4) أحسب **المجموع التالي** :

$S = u_0 + u_5 + \cdots + u_{2009}$

أجوبة : 1) (u_n) متتالية هندسية اذن:

$u_7 = u_5 q^{7-5}$ يعني : $q^2 = \frac{4374}{486} = 9$

يعني : $q = 3$ أو $q = -3$ وحسب المعطيات : $q \succ 0$

اذن: $q = 3$

2) (u_n) متتالية هندسية اذن: $u_5 = u_0 q^{5-0}$ يعني $486 = u_0 3^5$

يعني $u_0 = \frac{486}{3^5} = \frac{486}{243} = 2$

$u_{10} = u_7 q^{10-7}$ يعني $u_{10} = u_7 q^3$ يعني

$u_{10} = 4374 \times 3^3 = 4374 \times 27 = 118098$

3) $u_n = u_0 q^{n-0}$ يعني $u_n = 2 \times 3^n$

4) $S_n = u_0 + u_1 + u_1 + \cdots + u_{2009} = u_0 \times \frac{1 - q^{20095-0+1}}{1 - q} = u_0 \times \frac{1 - q^{2010}}{1 - q}$

$$S_n = 2 \times \frac{1 - 3^{2010}}{1 - 3} = -\left(1 - 3^{2010}\right) = 3^{2010} - 1$$

تمرين19: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + 1 \\ u_0 = 10 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n - 3$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1

2. بين أن : $u_n \ge 3$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3. أدرس رتابة المتتالية (u_n)

4. أحسب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)

5. أكتب v_n بدلالة n

6. استنتج u_n بدلالة n

7. أحسب بدلالة n المجموع : $S=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$

الجواب:1) نعوض n ب0

فنجد: $u_{0+1}=\frac{2}{3}\times u_0+1=\frac{2}{3}\times 10+1=\frac{20}{3}+1=\frac{20}{3}+\frac{3}{3}=\frac{23}{3}$ اذن : $u_1=\frac{23}{3}$

نعوض n ب 1

فنجد : $u_{1+1}=\frac{2}{3}\times u_1 1=\frac{2}{3}\times\frac{23}{3}+1=\frac{46}{9}+1=\frac{46}{9}+\frac{9}{9}=\frac{55}{9}$ اذن : $u_2=\frac{55}{9}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0-3=10-3=7$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1-3=\frac{23}{3}-3=\frac{23}{3}-\frac{9}{3}=\frac{14}{3}$

2)نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=10\ge 3$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge 3$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\ge 3$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-3=\frac{2}{3}u_n+1-3=\frac{2}{3}u_n-2=\frac{2}{3}(u_n-3)$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge 3$

اذن : $u_n-3\ge 0$ منه $u_{n+1}-3\ge 0$ وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 3$

3)دراسة رتابة المتتالية (u_n)

نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+1-u_n=-\frac{1}{3}u_n+1=-\frac{1}{3}(u_n-3)$$

نعلم أن: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 3$ حسب السؤال 2)اذن : $u_{n+1}-u_n\le 0$

ومنه المتتالية (u_n) تناقصية

(4

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-3}{u_n-3}=\frac{\frac{2}{3}u_n+1-3}{u_n-3}=\frac{\frac{2}{3}u_n-2}{u_n-2}=\frac{\frac{2}{3}u_n-\frac{6}{2}}{u_n-2}=\frac{\frac{2}{3}(u_n-3)}{u_n-2}=\frac{2}{3}=q$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{2}$ وحدها الأول $v_0=7$

5)كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدها الأول

$v_0=7$

فان: $v_n=7\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

6) استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=u_n-3$ اذن: $v_n+3=u_n$ أي: $u_n=7\left(\frac{2}{3}\right)^n+3$

7) $S_n=v_0\times\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$S_n=7\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=21\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

تمرين20: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\begin{cases}u_{n+1}=\frac{6}{1+u_n}\\ u_0=3\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية

العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{u_n-2}{u_n+3}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و v_0 و v_1

2. بين أن (v_n) متتالية هندسية و حدد أساسها q و حدها الأول

3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

4. أحسب بدلالة n المجموع: $S=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$

الجواب:1) نعوض n ب0 فنجد: $u_1=\frac{6}{1+u_0}=\frac{6}{1+3}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ اذن :

$u_1=\frac{3}{2}$

$v_0=\frac{u_0-2}{u_0+3}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$ و $v_1=\frac{u_1-2}{u_1+3}=\frac{\frac{1}{6}-2}{\frac{1}{6}+3}=\frac{\frac{-11}{6}}{\frac{19}{6}}=-\frac{11}{19}$

(2

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+3}=\frac{\frac{6}{1+u_n}-2}{\frac{6}{1+u_n}+3}=\frac{\frac{6-2(1+u_n)}{1+u_n}}{\frac{6+3(1+u_n)}{1+u_n}}=\frac{\frac{6-2-2u_n}{1+u_n}}{\frac{6+3+3u_n}{1+u_n}}=\frac{\frac{4-2u_n}{1+u_n}}{\frac{9+3u_n}{1+u_n}}=\frac{\frac{-2(u_n-2)}{1+u_n}}{\frac{3(3+u_n)}{1+u_n}}$$

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+3}=\frac{-2(u_n-2)}{3(3+u_n)}=\frac{-2}{3}\times\frac{u_n-2}{u_n+3}=\left(-\frac{2}{3}\right)\times v_n$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=-\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0=\frac{1}{6}$

3) بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=-\frac{2}{3}$ وحدها الأول

$v_0=\frac{1}{6}$

فان: $v_n=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ استنتاج u_n بدلالة n:

لدينا: $v_n=\frac{u_n-2}{u_n+3}\Leftrightarrow v_n(u_n+3)=u_n-2\Leftrightarrow v_nu_n+3v_n-u_n=-2$

$\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-2-3v_n\Leftrightarrow u_n=\frac{-2-3v_n}{v_n-1}\Leftrightarrow u_n=\frac{2+3v_n}{1-v_n}$

ونعلم أن : $v_n=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ اذن : $u_n=\frac{2+3\times\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$

$$u_n=\frac{2+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$$

(4 $S_n=v_0\times\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$S_n=\frac{1}{6}\times\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)=\frac{1}{10}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

تمرين21: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \\ u_1 = 1 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ونعتبر المتتالية

العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1. أحسب u_2 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية حسابية و حدد أساسها و حدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

أجوبة : 1) $u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ و $v_1 = \dfrac{1}{u_1} = \dfrac{1}{1} = 1$

2) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1+u_n}{u_n} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1+u_n-1}{u_n} = 1 = r$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_1 = 1$

3) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_1 = 1$

فان : $v_n = v_1 + (n-1)r$ أي : $v_n = 1 + (n-1)$ يعني $v_n = n$

ونعلم أن : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ يعني $u_n = \dfrac{1}{v_n}$ ونعلم أن : $v_n = n$ اذن : $u_n = \dfrac{1}{n}$

تمرين22: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية

العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1. أحسب u_1 و v_0
2. بين أن (v_n) متتالية حسابية و حدد أساسها و حدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

أجوبة : 1) $u_1 = \dfrac{u_0}{1+2u_0} = \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3}$ و $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = \dfrac{1}{1} = 1$

2) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1+2u_n}{u_n} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1+2u_n-1}{u_n} = 2 = r$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=2$ وحدها الأول : $v_0 = 1$

3) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=2$ وحدها الأول : $v_0 = 1$

فان : $v_n = v_0 + nr$ أي : $v_n = 1+2n$

ونعلم أن: $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ يعني $u_n = \dfrac{1}{v_n}$ ونعلم أن : $v_n = 1+2n$ اذن :

$u_n = \dfrac{1}{1+2n}$

تمرين23: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1} \\ u_0 = 3 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و v_0
2. بين أن : $u_n \geq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$
3. أحسب $v_{n+1} - v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n
5. أدرس رتابة المتتالية (u_n)
6. أحسب المجموع التالي : $S_2 = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_{11}$

أجوبة : 1) $u_1 = \dfrac{5u_0 - 4}{u_0 + 1} = \dfrac{15-4}{3+1} = \dfrac{11}{4}$ و $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 2} = \dfrac{1}{3-2} = 1$

2) نستعمل برهانا بالترجع

أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0 = 3 \geq 2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب) نفترض أن: $u_n \geq 2$

ج) نبين أن: $u_{n+1} \geq 2$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1} - 2 = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1} - 2 = \dfrac{5u_n - 4 - 2(u_n+1)}{u_n+1} = \dfrac{3u_n - 6}{u_n + 1}$

$u_{n+1} - 2 = \dfrac{3(u_n - 2)}{u_n + 1}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n \geq 2$

اذن : $u_n - 2 \geq 0$ و $u_n + 1 > 0$ و منه $u_{n+1} - 2 \geq 0$

وبالتالي: $u_n \geq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - 2} - \dfrac{1}{u_n - 2}$ نعوض u_{n+1} ب $\dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1}$

فنجد:

$$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{\dfrac{5u_n - 4}{u_n+1} - 2} - \dfrac{1}{u_n - 2} = \dfrac{1}{\dfrac{5u_n - 4 - 2(u_n+1)}{u_n+1}} - \dfrac{1}{u_n - 2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n+1}{3u_n - 6} - \dfrac{1}{u_n - 2} = \dfrac{u_n+1}{3(u_n-2)} - \dfrac{1}{u_n-2} = \dfrac{u_n+1}{3(u_n-2)} - \dfrac{3}{3(u_n-2)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 1 - 3}{3(u_n-2)} = \dfrac{u_n - 2}{3(u_n-2)} = \dfrac{1}{3} = r$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = \dfrac{1}{3}$ وحدها الأول : $v_0 = 1$

4) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r = \dfrac{1}{3}$ وحدها الأول :

$v_0 = 1$

فان : $v_n = v_0 + nr$ أي : $v_n = 1 + \dfrac{n}{3}$

نعلم أن : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ يعني $u_n - 2 = \dfrac{1}{v_n}$ يعني $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 2$

ونعلم أن : $v_n = 1 + \dfrac{n}{3}$ اذن :

$$u_n = \dfrac{1}{1+\dfrac{n}{3}} + 2 = \dfrac{1}{\dfrac{n+3}{3}} + 2 = \dfrac{3}{n+3} + 2 = \dfrac{3+2n+6}{n+3} = \dfrac{9+2n}{n+3}$$

5) دراسة رتابة المتتالية (u_n)

نحسب : $u_{n+1} - u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1} - u_n = \dfrac{5u_n - 4}{u_n+1} - u_n = \dfrac{5u_n - 4 - u_n(u_n+1)}{u_n+1} = \dfrac{-u_n^2 + 4u_n - 4}{u_n+1}$$

$u_{n+1} - u_n = -\dfrac{u_n^2 - 4u_n + 4}{u_n+1} = -\dfrac{(u_n-2)^2}{u_n+1} \leq 0$ لأن : $-(u_n-2)^2 \leq 0$

و $u_n + 1 > 0$ حسب السؤال 2) ومنه المتتالية (u_n) تناقصية

6) $S = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_{11} = 11 \times \dfrac{(v_1 + v_{11})}{2}$

لدينا : $v_n = 1 + \dfrac{n}{3}$ اذن : $v_1 = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$ و $v_2 = 1 + \dfrac{11}{3} = \dfrac{14}{3}$

$$S=11\times\frac{\left(\frac{4}{3}+\frac{14}{3}\right)}{2}=11\times\frac{18}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{198}{3\times 2}=33$$

تمرين24: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{5u_n-1}{u_n+3}\\ u_0=2\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و v_0
2. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\geq 1$
3. أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة :1) $u_1=\dfrac{5u_0-1}{u_0+3}=\dfrac{10-1}{2+3}=\dfrac{9}{5}$ و $v_0=\dfrac{1}{u_0-1}=\dfrac{1}{2-1}=1$

2)نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=2\geq 1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\geq 1$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\geq 1$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\dfrac{5u_n-1}{u_n+3}-1=\dfrac{5u_n-1-(u_n+3)}{u_n+3}=\dfrac{4u_n-4}{u_n+3}=\dfrac{4(u_n-1)}{u_n+3}$

و حسب افتراض الترجع لدينا $u_n\geq 1$

اذن : $u_n-1\geq 0$ و $u_n+3>0$ و منه $u_{n+1}-1\geq 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\geq 1$

3) $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{u_{n+1}-1}-\dfrac{1}{u_n-1}$ نعوض u_{n+1} ب $\dfrac{u_n-1}{3+u_n}$

فنجد:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{5u_n-1}{u_n+3}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{4u_n}{3+u_n}}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{4}{4u_n-4}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3-4}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4(u_n-1)}=\frac{1}{4}=r$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\dfrac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=1$

4) بما أن :(v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\dfrac{1}{4}$ وحدها الأول :

$v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\dfrac{n}{4}$

5)نعلم أن : $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$ يعني $u_n-1=\dfrac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\dfrac{1}{v_n}+1$

ونعلم أن : $v_n=1+\dfrac{n}{4}$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{1+\frac{n}{4}}+1=\frac{1}{\frac{n+4}{4}}+1=\frac{4}{n+4}+1=\frac{4+n+4}{n+4}=\frac{n+8}{n+4}$$

تمرين25: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=-1-\dfrac{1}{4u_n}\\ u_0=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\dfrac{2}{2u_n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. بين أن : (v_n) متتالية حسابية
3. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة :1) $u_1=-\dfrac{3}{2}$ و $u_2=-\dfrac{5}{6}$ و $u_{13}=-\dfrac{7}{10}$

2) $v_{n+1}-v_n=-2$ نعوض u_{n+1} ب $\dfrac{u_n-1}{3+u_n}$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=-2$ وحدها الأول : $v_0=1$

3) بما أن :(v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\dfrac{1}{4}$ وحدها الأول :

$v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=-2n+1$

نعلم أن : $v_n=\dfrac{2}{2u_n+1}$ يعني $u_n=\dfrac{1}{v_n}-\dfrac{1}{2}$ يعني $u_n=\dfrac{1}{-2n+1}-\dfrac{1}{2}$

تمرين26: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{5u_n}{2u_n+3}\\ u_0=2\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n}$

$\forall n\in\mathbb{N}$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n>1$
2. أبين أن (v_n) متتالية حسابية وحدد أساسها وحدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة :1)نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=2>1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\geq 1$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\geq 1$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\dfrac{5u_n}{2u_n+3}-1=\dfrac{5u_n-(2u_n+3)}{2u_n+3}=\dfrac{3u_n-3}{2u_n+3}=\dfrac{3(u_n-1)}{2u_n+3}$

و حسب افتراض الترجع لدينا $u_n>1$

اذن : $u_n-1>0$ و $2u_n+3>0$ و منه $u_{n+1}-1\geq 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\geq 1$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{5u_n-1}{u_n+3}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{4u_n}{3+u_n}}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{4}{4u_n-4}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3-4}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4(u_n-1)}=\frac{1}{4}=r$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\dfrac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=1$

3) بما أن :(v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\dfrac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\dfrac{n}{4}$

نعلم أن : $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$ يعني $u_n-1=\dfrac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\dfrac{1}{v_n}+1$

ونعلم أن : $v_n=1+\dfrac{n}{4}$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{1+\frac{n}{4}}+1=\frac{1}{\frac{n+4}{4}}+1=\frac{4}{n+4}+1=\frac{4+n+4}{n+4}=\frac{n+8}{n+4}$$

تمرين27: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{7u_n+3}{3u_n+7}\\ u_0=\frac{7}{3}\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 1$
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n)
3. أبين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول
4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة :1) نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=\frac{7}{3}\ge 1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge 1$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\ge 1$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\frac{7u_n+3}{3u_n+7}-1=\frac{7u_n+3-(3u_n+7)}{3u_n+7}=\frac{4u_n-4}{3u_n+7}=\frac{4(u_n-1)}{3u_n+7}$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n>1$

اذن : $u_n-1>0$ و $3u_n+7>0$ و منه $u_{n+1}-1\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 1$

2) دراسة رتابة المتتالية (u_n) نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{7u_n+3}{3u_n+7}-u_n=\frac{7u_n+3-u_n(3u_n+7)}{3u_n+7}=\frac{-3u_n^2+3}{3u_n+7}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-3(u_n+1)(u_n-1)}{3u_n+7}$$

ولدينا : $u_n\ge 1$ اذن : $u_n+1\ge 0$ و $u_n-1\ge 0$ و $3u_n+7>0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n\le 0$ وبالتالي : المتتالية (u_n) تناقصية

3) $$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{7u_n+3}{3u_n+7}-1}{\frac{7u_n+3}{3u_n+7}+1}=\frac{\frac{7u_n+3-(3u_n+7)}{3u_n+7}}{\frac{7u_n+3+(3u_n+7)}{3u_n+7}}=\frac{\frac{4u_n-4}{3u_n+7}}{\frac{10u_n+10}{3u_n+7}}=\frac{4u_n-4}{10u_n+10}$$

$$v_{n+1}=\frac{4(u_n-1)}{10(u_n+1)}=\frac{2}{5}\frac{u_n-1}{u_n+1}=\frac{2}{5}v_n$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$

وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+1}=\frac{\frac{7}{3}-1}{\frac{7}{3}+1}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{10}{3}}=\frac{2}{5}$

4) بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ وحدها الأول $v_0=\frac{2}{5}$

فان: $v_n=\frac{2}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n=\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا: $v_nu_n+v_n-u_n=-1\Leftrightarrow v_n(u_n+1)=u_n-1\Leftrightarrow v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

$$u_n=\frac{1+v_n}{1-v_n}\Leftrightarrow u_n=\frac{-1-v_n}{v_n-1}\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-1-v_n\Leftrightarrow$$

ونعلم أن : $v_n=\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$ اذن : $u_n=\frac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}$

تمرين28: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{5u_n+3}{u_n+3}\\ u_0=1\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ 0\le u_n\le 3$
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n)
3. أبين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول
4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة :1) نستعمل برهانا بالترجع

نبين أولا أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ 0\le u_n$

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=1\ge 0$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge 0$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\ge 0$ ؟؟؟؟؟

حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge 0$ اذن : $u_{n+1}\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 0$

نبين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\le 3$

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=1\le 3$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\le 3$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\le 3$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق

$$3-u_{n+1}=3-\frac{5u_n+3}{u_n+3}=\frac{3(u_n+3)-(5u_n+3)}{u_n+3}=\frac{-2u_n+6}{u_n+3}=\frac{-2(u_n-3)}{u_n+3}$$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\le 3$

اذن : $u_n-3\le 0$ و $u_n+3>0$ لأن $u_n\ge 0$ و منه $3-u_{n+1}\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\le 3$

2) دراسة رتابة المتتالية (u_n) نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n+3}{u_n+3}-u_n=\frac{5u_n+3-u_n(u_n+3)}{u_n+3}=\frac{-u_n^2+2u_n+3}{u_n+3}$$

نعمل $-u_n^2+2u_n+3$ نحسب المميز Δ

$\Delta=4+12=16>0$ هناك جذرين : $x_1=\frac{-2+4}{-2}=-1$ و $x_2=\frac{-2-4}{-2}=3$

ومنه التعميل : $-u_n^2+2u_n+3=-(u_n-3)(u_n+1)$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-3)(u_n+1)}{u_n+3}$

لدينا : $u_n\ge 0$ اذن : $u_n+3\ge 0$ و $u_n+1\ge 0$

و لدينا : $u_n\le 3$ اذن : $u_n-3\le 0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-3)(u_n+1)}{u_n+3}\ge 0$ وبالتالي (u_n) تزايدية

3) $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{5u_n+3}{u_n+3}-3}{\frac{5u_n+3}{u_n+3}+1}=\frac{\frac{5u_n+3-3(u_n+3)}{u_n+3}}{\frac{5u_n+3+(u_n+3)}{u_n+3}}=\frac{\frac{2u_n-6}{u_n+3}}{\frac{6u_n+6}{u_n+3}}=\frac{2u_n-6}{6u_n+6}$

$v_{n+1}=\frac{2(u_n-3)}{6(u_n+1)}=\frac{1}{3}\frac{u_n-3}{u_n+1}=\frac{1}{3}v_n$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$

وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-3}{u_0+1}=\frac{1-3}{1+1}=-1$

4) بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=-1$

فان: $v_n=(-1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا: $v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}\Leftrightarrow v_n(u_n+1)=u_n-3\Leftrightarrow v_nu_n+v_n-u_n=-3$

$\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-3-v_n\Leftrightarrow u_n=\frac{-3-v_n}{v_n-1}\Leftrightarrow u_n=\frac{3+v_n}{1-v_n}$

ونعلم أن : $v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ اذن $u_n=\frac{3-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

مذكرة رقم 6 في درس الحساب المثلثي(ملخص)

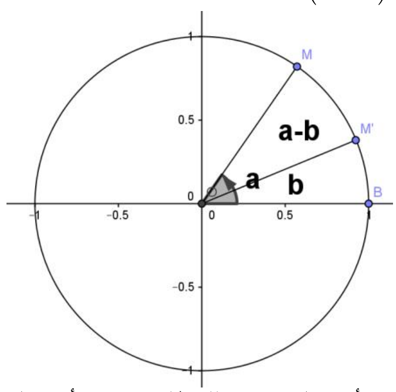
الأهداف و القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- صيغ التحويل؛ - تحويل الصيغة $a\cos x+b\sin x$	- التمكن من مختلف صيغ التحويل؛ - التمكن من حل معادلات ومتراجحات مثلثية تؤول في حلها إلى المعادلات والمتراجحات الأساسية؛ - التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية.	- ينبغي توخي البساطة في تقديم هذا الفصل وذلك باستعمال أي تقنية في متناول التلاميذ؛ - يتم توظيف الدائرة المثلثية لحل متراجحات مثلثية بسيطة على مجال من IR.

I. صيغ التحويل

(C) دائرة مثلثية مركزها O

$(0;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ممنظم



a أفصول منحنى للنقطة M و b أفصول منحنى للنقطة M'

$\overrightarrow{OM}(\cos a;\sin a)$ و $\overrightarrow{OM'}(\cos b;\sin b)$

❶ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

❷ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}=\|\overrightarrow{OM}\|\|\overrightarrow{OM'}\|\cos(a-b)=\cos(a-b)$

من : ❶ و ❷ نستنتج : ① $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

يمكن أن نبين أيضا أن :

② $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

③ $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

④ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$

مثال: أحسب $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

أجوبة: $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{4\pi-3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

يمكننا استعمال نتائج الجدول التالي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

④ $\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

تابع صيغ أخرى:

$$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}$$

نقسم البسط والمقام على : $\cos a\cos b$ فنجد:

$$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}=\frac{\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\frac{\sin b\cos a}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}$$

⑤ $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\times\tan b}$

ويمكننا أيضا أن نبين أن : ⑥ $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\times\tan b}$

مثال: أحسب $\tan\frac{\pi}{12}$

الجواب: $\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\times\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$

$$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

تمرين 1 :

3. أحسب $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$ و $\tan\frac{5\pi}{12}$

4. أحسب $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$ و $\tan\frac{7\pi}{12}$

5. بين أن : $\cos x=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

أجوبة: 1) $\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{2\pi+3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

④ $\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}$

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{5\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}}{\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{\sqrt6-\sqrt2}=\frac{\left(\sqrt6+\sqrt2\right)^2}{6-2}=\frac{\left(\sqrt6+\sqrt2\right)^2}{4}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\frac{\left(\sqrt6+\sqrt2\right)^2}{4}=\frac{8+2\sqrt{12}}{4}=\frac{8+4\sqrt3}{4}=2+\sqrt3$$

(2 $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{4\pi+3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt2}{4}-\frac{\sqrt6}{4}=\frac{\sqrt2-\sqrt6}{4}$$

④ $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt6}{4}+\frac{\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$$

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\cos\frac{7\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}}{\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{\sqrt2-\sqrt6}=\frac{\left(\sqrt6+\sqrt2\right)^2}{2-6}=\frac{\left(\sqrt6+\sqrt2\right)^2}{-4}$$

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\frac{8+2\sqrt{12}}{-4}=\frac{8+4\sqrt3}{-4}=-2-\sqrt3$$

(3 $\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos x$ ؟؟

$$\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x+\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x$$

$$=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt3}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt3}{2}\sin x=2\times\frac{1}{2}\cos x=\cos x$$

تمرين 2 : بين أن : $\sin(x+\frac{2\pi}{3})+\sin(x-\frac{2\pi}{3})+\sin x=0$

الجواب: لدينا

$$\sin(x+\frac{2\pi}{3})=\sin x\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\cos x=\sin x\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos x$$

$$\sin(x+\frac{2\pi}{3})=-\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos x$$

$$\sin(x-\frac{2\pi}{3})=\sin x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\cos x=\sin x\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos x$$

$$\sin(x-\frac{2\pi}{3})=-\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos x$$

اذن : $\sin(x+\frac{2\pi}{3})+\sin(x-\frac{2\pi}{3})+\sin x=-2\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x=-\sin x+\sin x=0$

تمرين3: علما أن: $0\prec a\prec\frac{\pi}{2}$ و $0\prec b\prec\frac{\pi}{2}$ و $\cos a=\sin b=\frac{1}{2}$

1. أحسب $\sin a$ و $\cos b$
2. أحسب $\sin\left(a+b\right)$

أجوبة:1) حساب $\cos b$

نعلم أن : $\cos^2 b+\sin^2 b=1$ يعني $\cos^2 b=1-\sin^2 b$ يعني $\cos^2 b=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

يعني $\cos^2 b=\frac{3}{4}$ يعني $\cos b=\frac{\sqrt3}{2}$ أو $\cos b=-\frac{\sqrt3}{2}$ ونعلم أن : $0\prec b\prec\frac{\pi}{2}$

اذن : $\cos b=\frac{\sqrt3}{2}$

حساب $\sin a$

نعلم أن : $\cos^2 a+\sin^2 a=1$ يعني $\sin^2 a=1-\cos^2 a$ يعني $\sin^2 a=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

يعني $\sin^2 a=\frac{3}{4}$ يعني $\sin a=\frac{\sqrt3}{2}$ أو $\sin a=-\frac{\sqrt3}{2}$ ونعلم أن : $0\prec a\prec\frac{\pi}{2}$

اذن : $\sin a=\frac{\sqrt3}{2}$

2)نعلم أن: $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

اذن : $\sin(a+b)=\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

II.نتائج صيغ التحويل و صيغ أخرى

$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a$ و $\cos(2a)=1-2\sin^2 a$

$\cos(2a)=2\cos^2 a-1$ اذن : $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$

$\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$ و $\cos^2 a+\sin^2 a=1$

$\sin(2a)=2\sin a\times\cos a$ و $1+\tan^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}$

تمرين 4 : علما أن : $\sin x=\frac{1}{3}$ و $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

أحسب $\cos(2x)$ و $\sin(2x)$

أجوبة: نعلم أن : $\cos(2x)=1-2\sin^2 x$

اذن : $\cos(2x)=1-2\left(\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

و نعلم أن : $\sin(2x)=2\sin x\times\cos x$ ومنه يجب حساب : $\cos x$

لدينا : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ يعني $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ يعني $\cos^2 b=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2$

يعني $\cos^2 x=\frac{8}{9}$ يعني $\cos x=\frac{\sqrt8}{3}$ أو $\cos x=-\frac{\sqrt8}{3}$ ونعلم أن : $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

اذن : $\cos x=\frac{\sqrt8}{3}$ ومنه : $\sin(2x)=2\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt8}{3}=\frac{2\sqrt8}{9}$

تمرين5: أحسب $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$ (لاحظ أن $\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\pi}{8}$)

أجوبة: حساب : $\cos\frac{\pi}{8}$

نستعمل العلاقة : $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ ونضع مثلا : $a=\frac{\pi}{8}$

ونجد : $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos 2\frac{\pi}{8}}{2}$ يعني $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}$ يعني $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{2+\sqrt2}{4}$

يعني $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt2}{4}}$ أو $\cos\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2+\sqrt2}{4}}$

ولكننا نعلم أن : $0\le\frac{\pi}{8}\le\frac{\pi}{2}$ اذن : $\cos\frac{\pi}{8}\ge 0$ ومنه : $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt2}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$

حساب: $\sin\frac{\pi}{8}$: يمكننا استعمال احدى القواعد التالية : $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$ أو $\sin(2a)=2\sin a\times\cos a$ أو $\cos^2 a+\sin^2 a=1$

لدينا : $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$ ونضع مثلا : $a=\frac{\pi}{8}$

ونجد : $\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos 2\frac{\pi}{8}}{2}$ يعني $\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}$ يعني $\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{2-\sqrt2}{4}$

يعني $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt2}{4}}$ أو $\sin\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2-\sqrt2}{4}}$

ولكننا نعلم أن : $0\le\frac{\pi}{8}\le\frac{\pi}{2}$ اذن : $\sin\frac{\pi}{8}\ge 0$ ومنه : $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

تمرين6: بين أن : $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=2 \quad \forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

الجواب : $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=\frac{\sin 3x\cos x-\sin x\cos 3x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}$

$$=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}=\frac{\sin 2x}{\sin x\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x}=2$$

تمرين7: بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}$

1) $\sin^2 2x-\cos 2x-1=-2\cos^2 x\times\cos 2x$

2) $2\sin^2 x+12\cos^2 x=5\cos 2x+7$

الجواب :

1) $\sin^2 2x-\cos 2x-1=(2\cos x\sin x)^2-2\cos^2 x+1-1$

$4\cos^2 x\sin^2 x-2\cos^2 x=-2\cos^2 x\cos 2x$

2) $2\sin^2 x+12\cos^2 x=2\sin^2 x+12(1-\sin^2 x)=-10\sin^2 x+12$

$$=\frac{-10}{2}(1-\cos 2x)+12=-5(1-\cos 2x)+12=5\cos 2x+7$$

تمرين8: بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}$

1) $\sin 3x=\sin x\times(3-4\sin^2 x)$

2) $\cos 3x=\cos x(4\cos^2 x-3)$

3) $\cos(4x)=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$

4) $\sin(4x)=4\sin x(2\cos^3 x-\cos x)$

5) $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$

أجوبة: 1) $\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x$

$=2\sin x\cos^2 x+(1-2\sin^2 x)\sin x=2\sin x(1-\sin^2 x)+(1-2\sin^2 x)\sin x$

$=2\sin x-2\sin^3 x+\sin x-2\sin^3 x=3\sin x-4\sin^3 x=\sin x(3-4\sin^2 x)$

2) $\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos x\cos 2x-\sin 2x\sin x$

$=\cos x(2\cos^2 x-1)+\sin x\times 2\cos x\sin x=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x\sin^2 x$

$=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x(1-\cos^2 x)=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x+2\cos^2 x$

$=4\cos^3 x-3\cos x=\cos x(4\cos^2 x-3)$

3) $\cos(4x)=\cos(2\times 2x)=2\cos^2 2x-1=2(2\cos^2 x-1)^2-1$

$=2(4\cos^4 x-4\cos^2 x+1)-1=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$

4) $\sin(4x)=\sin(2\times 2x)=2\sin 2x\cos 2x=2\times 2\sin x\cos x(2\cos^2 x-1)$

$\sin(4x)=4\sin x\cos x(2\cos^2 x-1)=4\sin x(2\cos^3 x-\cos x)$

5) $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$ ؟؟

طريقة1:

$\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos(x+2x))=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x)$

$=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos x(2\cos^2 x-1)-2\sin x\sin x\cos x)$

$=\frac{1}{4}(2\cos^3 x-\cos x-2\cos x+2\cos^3 x+3\cos x)=\frac{1}{4}(4\cos^3 x)=\cos^3 x$

طريقة2: نستعمل صيغة تحويل جذاء الى مجموع

$\cos^3 x=\cos^2 x\times\cos x=\frac{1+\cos 2x}{2}\times\cos x=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 2x\times\cos x)$

$\cos^3 x=\frac{1}{2}\left(\cos x+\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)\right)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$

ومنه : $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$

تابع صيغ أخرى:

$\tan(2a)=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ وفق شروط محددة

$\tan(x)=\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ و $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$ و $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\times\cos\frac{x}{2}$

$\cos x=\frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ و $\sin x=\frac{2\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

بوضع : $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ و لكل x **من** $\mathbb{R}$ بحيث $x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$

و $x\ne\pi+2k\pi$ **و لكل** $k\in\mathbb{Z}$

لدينا : $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ **و** $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ **و** $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$

مثال:علما أن **:** $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=3$ أحسب **:** $\tan x$ و $\sin x$ و $\cos x$

تمرين9: علما أن : $P(x)=\sin 2x-\sin x$ و $Q(x)=1+\cos x+\cos 2x$

بين أن : $Q(x)=\cos x(2\cos x+1)$ و أن $P(x)=\sin x(2\cos x-1)$

الجواب :

$Q(x)=1+\cos x+\cos 2x=1+\cos x+2\cos^2 x-1=\cos x+2\cos^2 x=\cos x(1+2\cos x)$

$P(x)=\sin 2x-\sin x=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(2\cos x-1)$

III.تحويل جداء إلى مجموع:

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

$$\cos a\sin b=-\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]$$

أمثلة: أكتب على شكل مجموع :

1) $\cos 2x\times\sin 4x$ 2) $\sin x\times\sin 3x$ 3) $\cos 4x\times\cos 6x$

أجوبة :

1) $\cos 2x\times\sin 4x=\frac{1}{2}(\sin(2x+4x)-\sin(2x-4x))=\frac{1}{2}(\sin 6x-\sin(-2x))$

$=\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 2x)=\frac{1}{2}\sin 6x+\frac{1}{2}\sin 2x$

2) $\sin x\times\sin 3x=\frac{1}{2}(\cos(x+3x)-\cos(x-3x))=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos(-2x))$

$\sin x\times\sin 3x=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos(2x))=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos(2x)$

3) $\cos 4x\times\cos 6x=\frac{1}{2}(\cos(4x+6x)+\cos(4x-6x))=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos(-2x))$

$\cos 4x\times\cos 6x=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos(2x)$

IV.تحويل مجموع إلى جداء:

$$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p-\sin q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

مثال :أكتب على شكل جداء: $\sin 2x+\sin 4x$

الجواب: $\sin 2x+\sin 4x=2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)$

$$\sin 2x+\sin 4x=2\sin 3x\cos(-2x)=2\sin 3x\cos 2x$$

<u>تمرين10:</u>

1. بين $\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)$

2. بين $\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=-2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$

3. استنتج أن : $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}}{\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}}=-\dfrac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

أجوبة: 1) $\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\dfrac{\frac{3\pi}{11}+\frac{7\pi}{11}}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\frac{3\pi}{11}-\frac{7\pi}{11}}{2}\right)$

$$\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(-\frac{2\pi}{11}\right)=2\sin\frac{5\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}$$

2) $\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=2\cos\left(\dfrac{\frac{3\pi}{11}+\frac{7\pi}{11}}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\frac{3\pi}{11}-\frac{7\pi}{11}}{2}\right)$

$$\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(-\frac{2\pi}{11}\right)=-2\cos\frac{5\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11}$$

3) $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}}{\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}}=\dfrac{2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)}{-2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

$$=-\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)}\times\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}=-\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)\times\frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}=-\frac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$$

<u>تمرين11:</u>بين أن : $\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\tan 3x\times\tan x$

الجواب: $\cos 2x-\cos 4x=-2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-4x}{2}\right)=2\sin(3x)\sin x$

$$\cos 2x+\cos 4x=-2\cos\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)=2\cos 3x\cos x$$

<u>ملاحظة:</u> $\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$

$$\frac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\frac{2\sin 3x\sin x}{2\cos 3x\cos x}=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\times\frac{\sin x}{\cos x}=\tan 3x\times\tan x$$

<u>تمرين12:</u>بين أن : $\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=-\sin 4x\times\sin x$

الجواب: $\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=\left(\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)\left(\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)$

$$\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}=2\cos\left(\dfrac{\frac{5x}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}}{2}\right)=2\cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=-2\sin\left(\dfrac{\frac{5x}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}}{2}\right)=-2\sin(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

ومنه : $\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=2\cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\times-2\sin(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$$=-2\cos(2x)\times\sin(2x)2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)=-\sin(4x)\sin x$$

<u>تمرين13:</u>بين أن : $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=2\sin x\cos x(1+2\cos x)$

الجواب: $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\sin 2x+\sin x+\sin 3x=\sin 2x+2\sin 2x\cos x$

$$=\sin 2x+2\sin 2x\cos x=\sin 2x(1+2\cos x)=2\sin x\cos x(1+2\cos x)$$

V.تحويل الصيغة : $a\cos x+b\sin x$

<u>مثال1:</u> $\cos x-\sin x$

$a=1$ و $a=-1$.

نحسب : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

<u>مثال2:</u> حل في $[0;2\pi]$ المعادلة : $\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$

الجواب: نحول أولا : $\sqrt{3}\cos x+\sin x$

$a=\sqrt{3}$ و $a=1$.

نحسب : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$$

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$$

يعني: $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

يعني: $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=2k\pi$

ومنه : $S=\left\{0;\frac{\pi}{3};2\pi\right\}$

مذكرة رقم 7 في درس النهايات

الأهداف و القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
ـ نهايات الدوال $x \to x^2$ و $x \to \sqrt{x}$ و $x \to x^3$ و $x \to x^n$ ونهايات مقلوبات هذه الدوال في الصفر و $+\infty$ و $-\infty$؛ ـ النهاية المنتهية والنهاية اللامنتهية في نقطة ـ النهاية المنتهية والنهاية اللامنتهية في $+\infty$ و $-\infty$؛ ـ العمليات على النهايات؛ ـ النهاية على اليمين؛ النهاية على اليسار ؛		ـ يتم تقديم مفهوم النهاية بطريقة حدسية من خلال سلوك الدوال المرجعية المحددة في البرنامج ومقلوباتها بجوار الصفر و $+\infty$ و $-\infty$ وقبول هذه النهايات؛ ـ يتم الاعتماد على خاصيات الترتيب في IR لحساب نهايات دوال بسيطة تحقق: * $\lvert f(x)-l \rvert \le u(x)$ حيث u دالة نهايتها 0؛ * $f(x) \ge u(x)$ حيث u دالة نهايتها $+\infty$؛
ـ نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية؛ نهاية دوال من الشكل: $\sqrt{f}$ حيث f دالة اعتيادية؛ ـ النهايات $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ و $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$ و $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$؛ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{x}$؛ ـ النهايات و الترتيب؛	ـ حساب نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية والدوال اللاجذرية؛ ـ حساب نهايات الدوال المثلثية البسيطة باستعمال النهايات الاعتيادية.	* $f(x) \le u(x)$ حيث u دالة نهايتها $-\infty$؛ ـ تعتبر العمليات على النهايات المنتهية واللامنتهية مقبولة وينبغي تعويد التلاميذ على الاستعمال الصحيح لها. ـ ينبغي تعويد التلاميذ على إزالة الأشكال غير المحددة البسيطة. ـ إن أي دراسة نظرية لمفهوم النهاية تعتبر خارج المقرر.

I. نهاية منتهية لدالة نقطة

مثال1: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي: $f(x)=2x$

الكتابة : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ تقرأ النهاية عندما يؤول x إلى 0 ل $f(x)$

و لدينا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x=0$

نهايات اعتيادية: • $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ • $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$

• $\lim\limits_{x\to 0} x^3=0$ • $\lim\limits_{x\to 0} x^n=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

تمرين1: أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to -1}\left(3+x-3x^2\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x-1}{3x^2-x}$

أجوبة:1) $\lim\limits_{x\to -1} 3+x-3x^2=3+(-1)-3(-1)^2=3+(-1)-3=-1=l$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x-1}{3x^2-x}=\frac{5\times 1-1}{3(-1)^2-(-1)}=\frac{4}{3+1}=1=l$

II. نهاية غير منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي: $f(x)=x^2$

املأ الجدول التالي :

x	10000	100	10	1	0	-1	-10	-1000	-10000
$f(x)$									

نلاحظ أنه عندما تكبر x فان $f(x)$ تكبر أيضا نكتب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

نلاحظ أنه عندما تصغر x فان $f(x)$ تكبر ونكتب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

نهايات اعتيادية: • $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ إذا كان n زوجي • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ إذا كان n فردي

تمرين2: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^6$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2014}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2015}$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} -7x^9$

أجوبة:1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^6=+\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2014}=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2015}=-\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to-} -7x^9=+\infty$

III. نهاية منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي: $f(x)=\frac{1}{x}$

املأ الجدول التالي :

x	10000	100	10	1	0	-1	-10	-1000	-10000
$f(x)$									

نلاحظ أنه عندما تكبر x فان $f(x)$ تقترب من الصفر

و نكتب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^+$

نلاحظ أنه عندما تصغر x فان $f(x)$ تقترب من الصفر

نكتب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^-$

نهايات اعتيادية: • $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$ • $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ • $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

خاصية : لتكن f دالة عددية و l عددا حقيقيا

إذا كانت f تقبل نهاية l في $+\infty$ (أو في $-\infty$) فان هذه النهاية وحيدة.

تمرين3: أحسب النهايات التالية : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^5}$

(3 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^7}$ (4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^5}$ (5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12}{x^{2009}}$

الأجوبة : ($\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0^+$ (2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^5}=0^-$

(3 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^7}=0^-$ (4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^5}=0^-$ (5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12}{x^{2009}}=0^+$

IV. النهاية اللانهائية لدالة في نقطة

نهايات اعتيادية: • $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ وتقرأ النهاية عندما يؤول x إلى **0** على اليمين

• $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ وتقرأ النهاية عندما يؤول x إلى 0 على اليسار

__تمرين4:__ أحسب النهايات التالية **(1:** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}$ **(2** $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-5}{x^3}$ **(3** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{9}{x^5}$

(4 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-12}{x^4}$ **(5** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}}$ **(6** $\lim\limits_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$

الأجوبة : (1 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty$ **(2** $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-5}{x^3}=-\infty$ **(3** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{9}{x^5}+\infty$

(4 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-12}{x^4}=-\infty$ **(5** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}}=-\infty$ **(6** $\lim\limits_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}=0+7+\infty=+\infty$

V. النهاية على اليمين والنهاية على اليسار لدالة في نقطة

▪ إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليمين

فإننا نكتب : " $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=l$ " **أو** " $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)=l$ "

▪ إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليسار

فإننا نكتب : " $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=l$ " **أو** " $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)=l$ "

نهايات اعتيادية: • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^n}=+\infty$ • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{x}=0$ • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

•إذا كان n زوجي غير منعدم , فان $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^n}=+\infty$

• إذا كان n فردي غير منعدم , فان $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^n}=-\infty$

__مثال:__ أحسب النهايات التالية:(1 $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{3x+1}{2x-6}$ **(2** $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{3x+1}{2x-6}$

__أجوبة :__ $\lim\limits_{x\to3^+}3x+1=9+1=10$ و $\lim\limits_{x\to3^+}2x-6=0$

x	$-\infty$ 3 $+\infty$
$2x-6$	$-$ 0 $+$

ومنه : $\lim\limits_{x\to3^+}2x-6=0^+$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{3x+1}{2x-6}=+\infty$

(2 $\lim\limits_{x\to3^-}2x-6=0^-$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{3x+1}{2x-6}=-\infty$

__تمرين5:__ أحسب النهايات التالية:(1 $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x-8}{2x-4}$ و $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3x-8}{2x-4}$

(2 $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x-4}{-2x+6}$ و $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{x-4}{-2x+6}$ **(3** $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1}$ و $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1}$ **(4** $\lim\limits_{x\to-2^\pm}\frac{-5x^2+1}{x+2}$ **(5** $\lim\limits_{x\to2^\pm}\frac{5x-20}{-2x+4}$

__أجوبة : 1)__ $\lim\limits_{x\to2^+}3x-8=-2$ و $\lim\limits_{x\to2^+}2x-4=0$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$2x-4$	$-$ 0 $+$

ومنه : $\lim\limits_{x\to2^+}2x-4=0^+$ و **بالتالي :** $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x-8}{2x-4}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to2^-}2x-4=0^-$ و **بالتالي :** $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x-8}{2x-4}=+\infty$

__(2__ $\lim\limits_{x\to3^+}x-4=-1$ و $\lim\limits_{x\to3^+}-2x+6=0$

x	$-\infty$ 3 $+\infty$
$-2x+6$	$+$ 0 $-$

ومنه : $\lim\limits_{x\to3^+}-2x+6=0^-$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x-4}{-2x+6}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to3^-}-2x+6=0^+$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{x-4}{-2x+6}=-\infty$

(3 $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+}x-9=-8$ و $\lim\limits_{x\to1^+}-2x^2+3x-1=0$

ندرس اشارة $-2x^2+3x-1$

نلاحظ أن : 1 جذرللحدودية $-2x^2+3x-1$

اذن : هي تقبل القسمة على: $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية

نجد أن : $-2x^2+3x-1=(x-1)(-2x+1)$

ومنه: $-2x^2+3x-1=0$ يعني $(x-1)(-2x+1)=0$ يعني $x=\frac{1}{2}$ أو $x=1$

x	$-\infty$	1/2	1	$+\infty$
$-2x^2+3x-1$	$-$	0 $+$	0	$-$

ومنه : $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1}=-\infty$

(4 $\lim\limits_{x\to-2^\pm}\frac{-5x^2+1}{x+2}$

لدينا $\lim\limits_{x\to-2^+}-5x^2+1=-19$ و $\lim\limits_{x\to-2^+}x+2=0$

x	$-\infty$ -2 $+\infty$
$x+2$	$-$ 0 $+$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{-5x^2+1}{x+2}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{-5x^2+1}{x+2}=+\infty$

(5 لدينا $\lim\limits_{x\to2^+}5x-20=-10$ و $\lim\limits_{x\to2^+}-2x+4=0$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$-2x+4$	$+$ 0 $-$

ومنه : $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{5x-20}{-2x+4}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{5x-20}{-2x+4}=-\infty$

VI. العمليات على النهايات

في كل ما يلي a عدد حقيقي أو يساوي $+\infty$ أو $-\infty$ و l و l' عددان حقيقيانو هذه العمليات تبقى صالحة على اليمين و اليسار

1. النهاية و الجمع:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$l'+l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	

مثال: أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to 0^+} 3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$

الجواب : $\lim\limits_{x\to 0^+} 3x=0$ **و** $\lim\limits_{x\to 0^+} 7=7$ **و** $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ **ومنه:**

$\lim\limits_{x\to 0^+} 3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

2. النهاية و الضرب:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l\succ 0$	$l\prec 0$	$l\succ 0$	$l\prec 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ أو $+\infty$	0	
$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$	$l'\cdot l$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد		

أمثلة: أحسب النهايات التالية : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^4$ و **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)^{2008}\times\left(x^3+1\right)^{2009}$ **4)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)\times\frac{1}{x}$ **5)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$

أجوبة :1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^4=5\times(+\infty)=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x=+\infty-\infty$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نرفع ال ش غ م مثلا بالتعميل :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x(x-1)$ **لدينا :** $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)^{2008}=+\infty$ **و** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+1\right)^{2009}=-\infty$ **ومنه :**

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)^{2008}\times\left(x^3+1\right)^{2009}=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$ **و** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل :

$\infty\times 0$

نرفع ال ش غ م مثلا بالنشر : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)\times\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x+\frac{1}{x}=-\infty+0=-\infty$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty}-\sqrt{x}=-\infty$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل :

$+\infty-\infty$

نرفع ال ش غ م مثلا بالتعميل : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)=+\infty$

3. النهاية و المقلوب:

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x)$	$\frac{1}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

أمثلة: أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{3x+7}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x^2}$

و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|}$

أجوبة :1) لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{3x+7}=\frac{1}{7}$ **و** $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

ومنه : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{3x+7}+\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x+7}=0$ **و** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ **ومنه :** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x^2}=0$

3) $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0^+$ **ومنه :** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty$

4. النهاية و الخارج:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	$-\infty$	∞	∞	$-\infty$ $l\prec 0$	$+\infty$ $\succ 0$	$+\infty$ $l\succ 0$	$-\infty$ $\prec 0$	$-\infty$		$-\infty$ $+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\neq 0$	∞	0	0	0	0^+	0^+	0^-	0^-	0		$-\infty$ $+\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$		$+\infty$	∞	∞	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد	

أمثلة: أحسب النهايات التالية :1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x-5}{|x-4|}$ **2)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

أجوبة :1) لدينا : $\lim\limits_{x\to 1} 4x-5=-1$ **و** $\lim\limits_{x\to 1}|x-4|=3$

ومنه : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x-5}{|x-4|}=-\frac{1}{3}$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ **لدينا :** $\lim\limits_{x\to 2} x^2-4=0$ **و** $\lim\limits_{x\to 2} x-2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2} x+2=4$

تمرين6: أحسب النهايات التالية :1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-9}$ **2)** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}$ 5) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+x^2-3}{2x^2+x-3}$ 7) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-9}{\sqrt{x}}$

أجوبة: 1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to 3} x^2-9=0$ و $\lim\limits_{x\to 3} x-3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-3^2}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3} x+3=6$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} 4x^2-1=0$ و $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} 2x-1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x)^2-1^2}{2x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(2x+1)}{2x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} 2x+1=2$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to 3} x-3=0$ و $\lim\limits_{x\to 3} x^2-2x-3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 3 جذرللحدودية x^2-2x-3

اذن : هي تقبل القسمة على : $x-3$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن : $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{4}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to 1} 2x^2-5x+3=0$ و $\lim\limits_{x\to 1} x^2+2x-3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 1 جذرللحدودية $2x^2-5x+3$ و للحدودية x^2+2x-3

اذن : الحدوديتان تقبلان القسمة على : $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن : $2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$

وأن : $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{2x-3}{x+3}=\frac{-1}{4}$$

5) $\lim_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}$ لدينا : $\lim_{x\to2}3x^2-5x-2=0$ و $\lim_{x\to2}2x^2-5x+2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 2 جذر للحدوديتين $3x^2-5x-2$ و للحدودية $2x^2-5x+2$

اذن : الحدوديتان تقبلان القسمة على: $x-2$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن :

$3x^2-5x-2=(x-2)(3x+1)$ وأن : $2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)$

$$\lim_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(3x+1)}{(x-2)(2x-1)}=\lim_{x\to2}\frac{3x+1}{2x-1}=\frac{7}{3}$$

6) $\lim_{x\to1}\frac{2x^3+x^2-3}{2x^2+x-3}$ لدينا : $\lim_{x\to1}2x^3+x^2-3=0$ و $\lim_{x\to1}2x^2+x-3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 1 جذر للحدوديتين $2x^3+x^2-3$ و للحدودية $2x^2+x-3$

اذن : الحدوديتان تقبلان القسمة على: $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن :

$2x^3+x^2-3=(x-1)(2x^2+3x+3)$ وأن : $2x^2+x-3=(x-1)(2x+3)$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^3+x^2-3}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x^2+3x+3)}{(x-1)(2x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+3x+3}{2x+3}=\frac{8}{5}$$

7) $\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x-2}$ لدينا : $\lim_{x\to2}x^4-16=0$ و $\lim_{x\to2}x-2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^4-2^4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\left(x^2\right)^2-\left(2^2\right)^2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\left(x^2-2^2\right)\left(x^2+2^2\right)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)\left(x^2+4\right)=32$$

8) $\lim_{x\to0}-\frac{9}{\sqrt{x}}=-\infty$ لأن : $\lim_{x\to0}\sqrt{x}=0^+$

5. نهاية الدالة الحدودية

نهاية دالة حدودية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

مثال : $\lim_{x\to+\infty}3x^2+5x-4$

الجواب: $\lim_{x\to+\infty}3x^2+5x-4=\lim_{x\to+\infty}3x^2=+\infty$

6. نهاية الدالة الجذرية

نهاية دالة جذرية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

مثال : $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6-x^2+1}{x^4+x-4}$

الجواب: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6-x^2+1}{x^4+x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}2x^{6-4}=\lim_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$

تمرين7: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim_{x\to+\infty}1+5x-9x^2$

2) $\lim_{x\to-\infty}\left(-5x^3-4x+12\right)$ 3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5+3x^2+x}{-10x^5-x-1}$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}$ 5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{20x^3-7x^2+x}{10x^4-3x-6}$

6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+4x^2+1}{x^8-x+3}$ 7) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{(x-1)^2}$

أجوبة : 1) $\lim_{x\to+\infty}1+5x-9x^2=\lim_{x\to+\infty}-9x^2=-\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty}-5x^3-4x+12=\lim_{x\to-\infty}-5x^3=+\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5+3x^2+x}{-10x^5-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5}{-10x^5}=-\frac{5}{10}=-\frac{1}{2}$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}-3x^3=+\infty$

5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{20x^3-7x^2+x}{10x^4-3x-6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{20x^3}{10x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{20}{10x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0^-$

6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+4x^2+1}{x^8-x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5}{x^8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^3}=0^+$

7) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$

7. نهاية الدوال اللاجذرية

خاصية: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال على الشكل $[a;+\infty[$ بحيث $f(x)\geq0\ \forall x\in[a;+\infty[$

- إذا كان $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$ و $l\geq0$ فان $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$
- إذا كان $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $l\geq0$ فان $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$

أمثلة : 1) $\lim_{x\to2}\sqrt{3x^2+4}$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}$ 3) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

أجوبة : 1) $\lim_{x\to2}\sqrt{3x^2+4}=\sqrt{3\times2^2+4}=\sqrt{16}=4$

2) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}$ لدينا: $\lim_{x\to+\infty}x+7=+\infty$ اذن : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}=+\infty$

3) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$ لدينا: $\lim_{x\to2}\sqrt{x-1}-1=0$ و $\lim_{x\to2}x-2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-1^2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-1-1}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{2}$$

تمرين8: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-5x+1}$

2) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-5x+7}$ 3) $\lim_{x\to+\infty}-3x\sqrt{6x^2+x-4}$ 4) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

5) $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ 6) $\lim_{x\to1^+}\frac{1-2x}{\sqrt{x-1}}$ 7) $\lim_{x\to-3}\frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}$

8) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{\sqrt{x-2}-1}$ 9) $\lim_{x\to5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$

أجوبة : 1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-5x+1}$ لدينا: $\lim_{x\to+\infty}3x^2-5x+1=\lim_{x\to+\infty}3x^2=+\infty$

اذن : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-5x+1}=+\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-5x+7}$ لدينا: $\lim_{x\to-\infty}-5x+7=+\infty$ اذن : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-5x+7}=+\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}-3x\sqrt{6x^2+x-4}$ لدينا $\lim_{x\to-\infty}-3x=-\infty$ و $\lim_{x\to}\sqrt{6x^2+x-4}=+\infty$

اذن : $\lim_{x\to+\infty}-3x\sqrt{6x^2+x-4}=-\infty$

4) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ لدينا: $\lim_{x\to1}\sqrt{x}-1=0$ و $\lim_{x\to1}x-1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

5) $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ لدينا : $\lim_{x\to4}\sqrt{x}-2=0$ و $\lim_{x\to4}x-4=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

6) $\lim_{x\to1^+}\frac{1-2x}{\sqrt{x-1}}$ لدينا : $\lim_{x\to1^+}1-2x=-1$ و $\lim_{x\to1^+}\sqrt{x-1}=0^+$ ومنه $\lim_{x\to1^+}\frac{1-2x}{\sqrt{x1}}=-\infty$

7) $\lim_{x\to-3}\frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}$ لدينا : $\lim_{x\to-3}1-\sqrt{x+4}=0$ و $\lim_{x\to-3}x+3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to-3}\frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{(1-\sqrt{x+4})}{(x+3)(1+\sqrt{x+4})}=\lim_{x\to-3}\frac{1^2-(\sqrt{x+4})^2}{(x+3)(1+\sqrt{x+4})}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{-x-3}{(x+3)(1+\sqrt{x+4})}=\lim_{x\to-3}\frac{-(x+3)}{(x+3)(1+\sqrt{x+4})}=\lim_{x\to-3}\frac{-1}{1+\sqrt{x+4}}=-\frac{1}{2}$$

8) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{\sqrt{x-2}-1}$ لدينا : $\lim_{x\to3}x^2-3x=0$ و $\lim_{x\to3}\sqrt{x-2}-1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{\sqrt{x-2}-1}=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{x-2}-1)}=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{\left((\sqrt{x-2})^2-1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{x-3}=\lim_{x\to3}x(\sqrt{x-2}+1)=6$$

9) $\lim_{x\to5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ لدينا : $\lim_{x\to5}2-\sqrt{x-1}=0$ و $\lim_{x\to5}x-5=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{(2-\sqrt{x-1})(2+\sqrt{x-1})}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to5}\frac{2^2-(\sqrt{x-1})^2}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{5-x}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to5}\frac{-(x-5)}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to5}\frac{-1}{2+\sqrt{x-1}}=\frac{-1}{4}$$

مبرهنة: لتكن f دالة عددية و l و a عددين حقيقيين

$\lim_{x\to a^+}f(x)=l$ يكافئ $\lim_{\substack{x\to a\\ x\succ a}}f(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ x\prec a}}f(x)=l$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}$

1. أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to1^+}f(x)$ و $\lim_{x\to1^-}f(x)$
2. هل الدالة f تقبل نهاية عند : $x_0=1$ ؟

أجوبة : 1) ندرس اشارة $x-1$: $x-1=0\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

$$\begin{cases}f(x)=\frac{x^2-1}{x-1},x>1\\ f(x)=\frac{x^2-1}{-(x-1)},x<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1},x>1\\ f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)},x<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=x+1,x>1\\ f(x)=-(x+1),x<1\end{cases}$$

$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}x+1=2$ و $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}-(x+1)=-2$

2) نلاحظ أن : $\lim_{x\to1^+}f(x)\neq\lim_{x\to1^-}f(x)$ ومنه لدالة f

لا تقبل نهاية عند : $x_0=1$

تمرين9: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=\frac{x^2-16}{|x-4|}$

1. أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to4^+}f(x)$ و $\lim_{x\to4^-}f(x)$
2. هل الدالة f تقبل نهاية عند : $x_0=4$ ؟

أجوبة : 1) ندرس اشارة $x-4$: $x-4=0\Leftrightarrow x=4$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$x-4$	$-$	0	$+$

$$\begin{cases}f(x)=\frac{x^2-16}{x-4},x>4\\ f(x)=\frac{x^2-16}{-(x-4)},x<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=\frac{(x+4)(x-4)}{x-4},x>4\\ f(x)=\frac{(x+4)(x-4)}{-(x-4)},x<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=x+4,x>4\\ f(x)=-(x+4),x<4\end{cases}$$

$\lim_{x\to4^+}f(x)=\lim_{x\to4^+}x+4=8$ و $\lim_{x\to4^-}f(x)=\lim_{x\to4^-}-(x+4)=-8$

2) نلاحظ أن: $\lim_{x\to4^+}f(x)\neq\lim_{x\to4^-}f(x)$ ومنه

الدالة f لاتقبل نهاية عند : $x_0=4$

تمرين10: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=\frac{|x|}{x}+x^4$

1. أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to0^+}f(x)$ و $\lim_{x\to0^-}f(x)$
2. هل الدالة f تقبل نهاية عند : $x_0=0$ ؟

أجوبة :

$$\begin{cases}f(x)=\frac{x}{x}+x^4,x>0\\ f(x)=\frac{-x}{x}+x^4,x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=1+x^4,x>0\\ f(x)=-1+x^4,x<0\end{cases}$$

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}1+x^4=1$ و $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}-1+x^4=-1$

2) نلاحظ أن : $\lim_{x\to4^+}f(x)\neq\lim_{x\to4^-}f(x)$

ومنه لدالة f لاتقبل نهاية عند : $x_0=0$

8. نهاية الدوال المثلثية

خاصيات: • $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ • $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ • $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$

• $\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}=1$ و $\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{ax}=1$ $\forall a\in\mathbb{R}^*$

أمثلة: أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{4x}$ (2 $\lim_{x\to0}\frac{\sin6x}{\tan3x}$ (3 $\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{\sin4x}$

أجوبة : 1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}\times\frac{2x}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}\times\frac{1}{2}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(2

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin6x}{\tan3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin6x}{6x}\times\frac{6x}{\tan3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin6x}{6x}\times\frac{3x}{\tan3x}\times2=1\times1\times2=2$$

3) $\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{\sin4x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{2x}\times\frac{4x}{\sin4x}\times\frac{2x}{4x}=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

تمرين11: أحسب النهايات التالية : (1 $\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}$

(2 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\tan x}$ (3 $\lim_{x\to0}\frac{\tan10x}{\sin5x}$

أجوبة : (1 $\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\times3=1\times3=3$

(2 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{x}{\tan x}=1\times1=1$

(3 $\lim_{x\to0}\frac{\tan10x}{\sin5x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan10x}{10x}\times\frac{5x}{\sin5x}\times\frac{10x}{5x}=1\times1\times2=2$

9. النهايات و الترتيب

خاصيات: لتكن I مجالا من نوع $[a,+\infty[$ حيث $a\in\mathbb{R}$ و $l\in\mathbb{R}$

لتكن f و U و V دوال عددية معرفة على المجال I اذا

■ اذا كانت $U(x)\le f(x)$ $\forall x\in I$ وكانت: $\lim_{x\to+\infty}U(x)=+\infty$ فان : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

■ اذا كانت $f(x)\le V(x)$ $\forall x\in I$ وكانت $\lim_{x\to+\infty}V(x)=-\infty$ فان : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

■ اذا كانت $U(x)\le f(x)\le V(x)$ $\forall x\in I$ وكانت: $\lim_{x\to+\infty}U(x)=\lim_{x\to+\infty}V(x)=l$ فان : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$

مثال1: أحسب النهاية التالية : $\lim_{x\to+\infty}2x+\sin(x)$

الجواب: نعلم أن : $-1\le\sin x\le1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن : $2x-1\le\sin x+2x\le1+2x$ اذن : $2x-1\le\sin x+2x$

ونعلم أن : $\lim_{x\to+\infty}2x-1=+\infty$ ومنه : $\lim_{x\to+\infty}2x+\sin(x)=+\infty$

مثال2: أحسب النهاية التالية : $\lim_{x\to-\infty}-4x^2+\cos x$

الجواب: نعلم أن : $-1\le\cos x\le1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن : $-4x^2-1\le-4x^2+\cos x\le1-4x^2$ اذن: $-4x^2+\cos x\le1-4x^2$

ونعلم أن : $\lim_{x\to+\infty}1-4x^2=-\infty$ ومنه : $\lim_{x\to-\infty}-4x^2+\cos x=-\infty$

مثال3: أحسب النهاية التالية : $\lim_{x\to+\infty}x^2\sin\left(\frac1x\right)$

الجواب: نعلم أن : $-1\le\sin\left(\frac1x\right)\le1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن : $-x^2\le x^2\sin\left(\frac1x\right)\le x^2$ ولدينا : $\lim_{x\to0}x^2=0$ و $\lim_{x\to0}-x^2=0$

ومنه : $\lim_{x\to+\infty}x^2\sin\left(\frac1x\right)=0$

تمرين12: أحسب النهايات التالية :

(1 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2-\cos x}$ (2 $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3-\sin x}$

الجواب: (1 نعلم أن : $-1\le\cos x\le1$ $\forall x\in\mathbb{R}$ اذن :

$-1\le-\cos x\le1$

اذن : $1\le2-\cos x\le3$ اذن : $\frac13\le\frac{1}{2-\cos x}\le\frac11$ اذن :

$\frac x3\le\frac{x}{2-\cos x}\le\frac x1$

اذن : $\frac x3\le\frac{x}{2-\cos x}$ ونعلم أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac x3=+\infty$ ومنه : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2-\cos x}=+\infty$

(2 نعلم أن : $-1\le\sin x\le1$ $\forall x\in\mathbb{R}$ اذن: $-1\le-\sin x\le1$

اذن : $2\le3-\sin x\le4$ اذن: $\frac14\le\frac{1}{3-\sin x}\le\frac12$

اذن : $\frac{x^3}{4}\le\frac{x^3}{3-\sin x}\le\frac{x^3}{2}$

اذن : $\frac{x^3}{3-\sin x}\le\frac{x^3}{2}$ ونعلم أن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2}=-\infty$ ومنه : $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3-\sin x}=-\infty$

تمرين13: أحسب النهايات التالية: (1 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}-2x$

(2 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$ (3 $\lim_{x\to\mp\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x$ (4 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$

(5 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

الجواب: (1 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}-2x$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}-2x=-\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نتخلص من ال ش غ م بالتعميل ب x^2 داخل الجذر مربع:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}-2x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac1x+\frac3{x^2}\right)}-2x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac1x+\frac3{x^2}\right)}-2x$$

$=\lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{\left(1+\frac1x+\frac3{x^2}\right)}-2x$ لأن : $\sqrt{x^2}=|x|$ وبما أن: $x\to+\infty$ فان :

$\sqrt{x^2}=|x|=x$

ومنه : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}-2x=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{\left(1+\frac1x+\frac3{x^2}\right)}-2x=$

$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\left(1+\frac1x+\frac3{x^2}\right)}-2\right)=+\infty\times(-1)=-\infty$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac1x=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac3{x^2}=0$

(2 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$ لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\frac{1}{+\infty}=0$ لأن : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+x=+\infty$

(3 أ) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x$ لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+4}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}3x=+\infty$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x=+\infty$

(3 ب) لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+4}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}3x=-\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نتخلص من ال ش غ م بالتعميل ب x^2 داخل الجذر مربع:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac2x+\frac4{x^2}\right)}+3x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac2x+\frac4{x^2}\right)}+3x$$

$=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{\left(1+\frac2x+\frac4{x^2}\right)}+3x$ لدينا : $\sqrt{x^2}=|x|$ وبما أن: $x\to-\infty$ فان :

$\sqrt{x^2}=|x|=-x$

ومنه : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x=\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{\left(1+\frac2x+\frac4{x^2}\right)}+3x=$

$=\lim_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{\left(1+\frac2x+\frac4{x^2}\right)}-3\right)=+\infty\times(-2)=-\infty$ لأن: $\lim_{x\to-\infty}\frac2x=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac4{x^2}=0$

(4 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$ لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+x=+\infty$

دائما نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{\infty}{\infty}$

نعمل ب x^2 داخل الجذر مربع وب x في البسط ونجد :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{1}{2}$$

(5 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}x-1=+\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{\infty}{\infty}$

نعمل ب x^2 داخل الجذر مربع وب x في البسط ونجد :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

لأن : $\sqrt{x^2}=|x|$ وبما أن $x\to+\infty$: فان $\sqrt{x^2}=|x|=x$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1-0}{\sqrt{1+0}}=1$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

تمرين14: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}, & x\ge -1 \\ f(x)=\dfrac{x^2-3}{x}, & x<-1 \end{cases}$$

1. أحسب النهايات التالية: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

$\lim_{x\to-1^+}f(x)$ و $\lim_{x\to-1^-}f(x)$

2. هل الدالة f تقبل نهاية عند : $x_0=-1$ ؟

الجواب: (1 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+4x+3}{x+1}$$

لدينا $\lim_{x\to-1^+}x^2+4x+3=0$ و $\lim_{x\to-1^+}x+1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : -1 جذر للحدودية x^2+4x+3

اذن : هي تقبل القسمة على: $x+1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن : $x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x+3)(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}x+3=2$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-3}{x}=\frac{1-3}{-1}=\frac{-2}{-1}=2$$

2) نعم الدالة f تقبل نهاية عند : $x_0=-1$

لأن : $\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^-}f(x)$ ومنه : $\lim_{x\to-1}f(x)=2$

تمارين للبحث:

تمرين1: أحسب النهايات التالية :

(1 $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5+3x^2+x}{-10x^5-x-1}$ (2 $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^3+2x^2+1}{x^4+3x-1}$

(3 $\lim_{x\to2^-}\frac{-2x+1}{x^2-x-2}$ (4 $\lim_{x\to2^+}\frac{-2x+1}{x^2-x-2}$

(5 $\lim_{x\to-3}\frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}$ (6 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$

تمرين2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x};\ x\ge 0 \\ f(x)=x^3;\ x<0 \end{cases}$$

1. أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to0^+}f(x)$ و $\lim_{x\to0^-}f(x)$

2. استنتج : $\lim_{x\to0}f(x)$

تمرين3: أحسب النهايات التالية :

(1 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$ (2 $\lim_{x\to-\infty}x-\sqrt{x^2-x}$

(3 $\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x^2-x}$ (4 $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{5x^2+x-1}-2x+1$

(5 $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{5x^2+x-1}+2x+1$ (6 $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x-1}+x$

تمرين4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=x^3-\dfrac{1}{8};\ x>\dfrac{1}{2} \\ f(x)=1-2x;\ x\le\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

و $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)$ $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)$

مذكرة رقم8 في درس الدوران

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
ـ تعريف الدوران؛ الدوران العكسي لدوران ـ الحفاظ على المسافة وعلى قياس زاوية موجهة وعلى المرجح. ـ صورة مستقيم وقطعة ودائرة بدوران.	ـ إنشاء صور أشكال اعتيادية بدوران معلوم؛ ـ التعرف على تقايس الأشكال باستعمال الدوران؛ ـ استعمال دوران معلوم في وضعية هندسية بسيطة.	ـ يعرف الدوران انطلاقا من مركزه وزاويته ـ يعتبر إدخال الإحداثيات والصيغة التحليلية للدوران وتركيب دورانين خارج المقرر.

I. الدوران و الدوران العكسي

لتكن Ω نقطة من المستوى الموجه و $\alpha=\frac{\pi}{3}=60°$ ولتكن A و B نقطتين من المستوى الموجه

أرسم النقطة A' بحيث : $\begin{cases}\Omega A=\Omega A'\\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega A'}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]\end{cases}$ نقول A' هي صورة A بالدوران r الذي مركزه Ω زاويته α

بنفس الطريقة نرسم B' صورة B بالدوران r الذي مركزه Ω زاويته α

1) تعريف الدوران

لتكن Ω نقطة من المستوى الموجه و α عددا حقيقيا

الدوران الذي مركزه Ω زاويته α هو التحويل في المستوى الذي يربط كل نقطة M من المستوى بالنقطة M' المعرفة كالتالي

نرمز للدوران الذي مركزه Ω زاويته α بالرمز $r(\Omega;\alpha)$ أو r إذا لم يكن هناك التباس

$r(M)=M'$: تقرأ M' هي صورة M بالدوران r

- إذا كان $M=\Omega$ فان $M'=\Omega$
- إذا كان $M\neq\Omega$ فان $\begin{cases}\Omega M=\Omega M'\\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}\right)\equiv\alpha[2\pi]\end{cases}$

2) الدوران العكسي لدوران

تعريف : لتكن Ω نقطة من المستوى الموجه و α عددا حقيقيا الدوران $r(\Omega;-\alpha)$ الذي مركزه Ω زاويته $-\alpha$ يسمى الدوران العكسي للدوران $r(\Omega;\alpha)$ الذي مركزه Ω زاويته α

- الدوران العكسي لدوران r يرمز له بالرمز r^{-1}
- لكل نقطة M من المستوى لدينا :

$r^{-1}(M')=M \Leftrightarrow r(M)=M'$

II. خاصيات:

خاصية1 : الحفاظ على المسافة: إذا كانت A و B نقطتين من المستوى و A' و B' صورتي A و B على التوالي بدوران فان : $AB=A'B'$

نقول الدوران يحافظ على المسافة

خاصية2 : ليكن r دورانا زاويته α. إذا كانت A' و B' صورتي نقطتين مختلفتين A و B على التوالي بالدوران r فان : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}\right)\equiv\alpha[2\pi]$

ملحوظة: تمكننا هذه الخاصية من تحديد زاوية دوران انطلاقا من نقطتين مختلفتين وصورتيهما

تمرين1: ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A بحيث : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

وليكن O منتصف القطعة $[BC]$

1. أنشئ صورة المثلث ABC بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$
2. أنشئ صورة المثلث ABC بالدوران r' الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

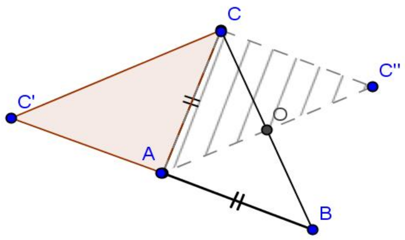
أجوبة: 1) $r(A)=A$ لأن A مركز الدوران r :

و $r(B)=C$ لأن : $\begin{cases}AB=AC\\ \left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

و $r(B)=C'$ ومنه صورة المثلث ABC بالدوران r هو المثلث : ACC'

1) $r'(A)=C$ و $r'(B)=A$ و $r'(C)=C''$

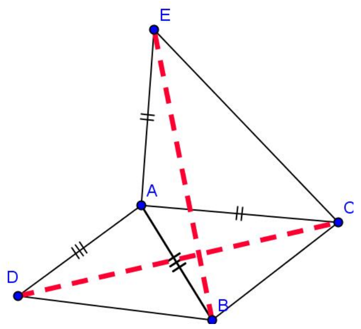
ومنه صورة المثلث ABC بالدوران r هو المثلث : ACC''



تمرين2: ABC مثلثا نشئ خارجه مثلثين ABD و ACE متساويي الساقين وقائمي الزاوية في A

1. بين أن : $BE=CD$
2. بين أن : $(BE)\perp(CD)$

الجواب:



نعتبر الدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

لدينا : $\begin{cases}AD=AB\\ \left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

ومنه : $r(D)=B$ ❶

ولدينا : $\begin{cases}AC=AE\\ \left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ ومنه : $r(C)=E$ ❷

من ❶و❷ وبما أن الدوران يحافظ على المسافة فان : $BE=CD$

2) لدينا : $r(D)=B$ ❶ و $r(C)=E$ ❷اذن :

$\left(\overline{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{EB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أن : $(BE)\perp(CD)$

خاصية3 : الحفاظ على قياس زاوية موجهة

لتكن A و B و C و D نقط من المستوى بحيث $A\neq B$ و $C\neq D$ و A' و B' و C' و D' صورها على التوالي بدوران لدينا : $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})\equiv(\overline{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}})[2\pi]$

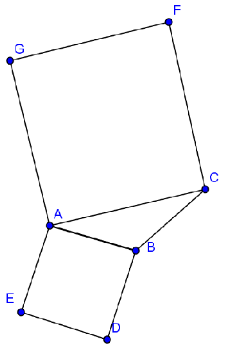
نقول الدوران يحافظ على قياس الزوايا

تمرين3: ABC مثلث بحيث القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ موجب .

ننشئ خارج المثلث ABC المربعين $ABDE$ و $ACFG$

نعتبر الدوران r الذي مركزه A و زاوية $\frac{\pi}{2}$

1)حدد $r(E)$ و $r(C)$ 2)بين أن : $(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}})\equiv(\overline{\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}})[2\pi]$



1) لدينا : $\begin{cases} AE=AB \\ (\overline{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ومنه : ❶ $r(E)=B$

لدينا : $\begin{cases} AC=AG \\ (\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ومنه : ❷ $r(C)=G$

ولدينا: ❸ $r(A)=A$ لأن A مركز الدوران : r

2) من ❶و❷ و ❸ وبما أن الدوران يحافظ على قياس الزوايا فان : $(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}})\equiv(\overline{\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}})[2\pi]$

خاصية4 : الحفاظ على المرجح

ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$

إذا كانت A' و B' و G' صور A و B و G على التوالي بدوران r

فان : G' هي مرجح النقطتين المتزنتين $(A';\alpha)$ و $(B';\beta)$

ملحوظة: يمكننا تعميم هذه الخاصية على مرجح ثلاث أو أربع نقط.

استنتاج : الحفاظ على المنتصف

ليكن I منتصف القطعة $[AB]$

إذا كانت A' و B' و I' صور A و B و I على التوالي بدوران

فان: I' هي منتصف القطعة $[A'B']$

خاصية5 : الحفاظ على معامل استقامية متجهتين

لتكن A' و B' و C' صور A و B و C على التوالي بدوران

إذا كان : $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ حيث k عدد حقيقي فان : $\overrightarrow{A'C'}=k\overrightarrow{A'B'}$

تمرين4: $ABCD$ مربع مركزه O بحيث : $(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و I و J نقطتان من المستوى بحيث : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

وليكن r الدوران الذي مركزه O و زاوية $\frac{\pi}{2}$

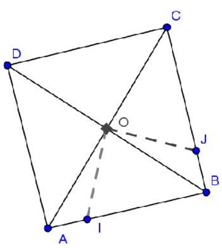
بين أن : $OI=OJ$ وأن : $(OI)\perp(OJ)$

الجواب :

يكفي أن نبين أن : $r(I)=J$ ؟؟؟؟

نضع : $r(I)=I'$

لدينا : $\begin{cases} OA=OB \\ (\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ومنه : $r(A)=B$



ولدينا : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ اذن: $\overrightarrow{BI'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❶ لأن الدوران : الحفاظ على معامل استقامية متجهتين

ونعلم أن : $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❷

من ❶و❷ نستنتج أن : $\overrightarrow{BI'}=\overrightarrow{BJ}$ أي $I'=J$ أي $r(I)=J$

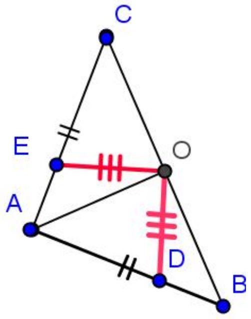
وبالتالي : $\begin{cases} OI=OJ \\ (\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

تمرين5: ABC مثلث قائم الزاوية A ومتساوي الساقين فبحيث : $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و O منتصف القطعة $[BC]$

وليكن D بحيث : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ وليكن E بحيث : $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

باعتبار الدوران r الذي مركزهO وزاويته $\frac{\pi}{2}$ بين أن المثلث ODE قائم الزاوية ومتساوي الساقين في O

الجواب : يكفي أن نبين أن : $r(E)=D$ ؟؟؟؟



نضع : $r(E)=E'$

لدينا : $\begin{cases} OA=OC \\ (\overline{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ومنه : ❶ $r(C)=A$

ولدينا : $\begin{cases} OA=OB \\ (\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ومنه : ❷ $r(A)=B$

ولدينا : $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ ❸ اذن من ❶و❷ و❸:نجد أن $\overrightarrow{AE'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❹لأن الدوران : يحافظ على معامل استقامية متجهتين

ونعلم أن : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❺

من ❹و❺ نستنتج أن : $\overrightarrow{AE'}=\overrightarrow{AD}$ أي $E'=D$ أي $r(E)=D$

وبالتالي : $\begin{cases} OE=OD \\ (\overline{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ يعني ان : أن المثلث ODE قائم الزاوية ومتساوي الساقين في O

III.صور بعض الأشكال بدوران:

ليكن r دورانا و A و B و O و A' و B' و O' نقطا من المستوى بحيث : $r(A)=A'$ و $r(B)=B'$ و $r(O)=O'$

خاصية :

- صورة المستقيم (AB) بالدوران r هي المستقيم $(A'B')$
- صورة القطعة $[AB]$ بالدوران r هي المستقيم $[A'B']$
- صورة الدائرة $C(O;R)$ التي مركزها O وشعاعها R بالدوران r هي الدائرة $C'(O';R)$ التي مركزها O' وشعاعها R

استنتاج

- صورة نصف المستقيم$[AB)$ بالدوران r هي نصف المستقيم $[A'B')$
- صورتا مستقيمين متعامدين بالدوران r هما مستقيمان متعامدان
- صورتا مستقيمين متوازيين بالدوران r هما مستقيمان متوازيان
- إذا كانت نقطة M تنتمي إلى تقاطع مستقيمين (D) و (Δ) فان صورة M بالدوران r هي نقطة تقاطع صورتي

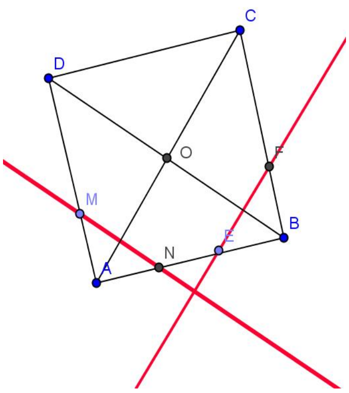
المستقيمين (D) و (Δ) بالدوران r .

تمرين6: $ABCD$ مربع مركزه O بحيث : $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ و (D) مستقيم يوازي المستقيم (BD) و يقطع (AD) في M و (AB) في N

وليكن r الدوران الذي مركزه O و زاوية $\frac{\pi}{2}$

نعتبر النقطتين E و F صورتي النقطتين M و N بالدوران r على ا لتوالي.

1. أرسم الشكل و بين أن : $(EF)\perp(MN)$
2. حدد صورة المستقيم (BD) بالدوران r
3. أ)بين أن : $DN = FA$ ب)بين أن : $(EF)\parallel(AC)$



الأجوبة : 1)لدينا : $r(M)=E$ ❶ و $r(N)=F$ ❷

من ❶و❷ نستنتج أن : $(\overline{MN},\overline{EF}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ أي أن : $(EF)\perp(MN)$

2) صورة المستقيم (BD) بالدوران r ؟؟؟

لدينا : $\begin{cases} 0B=0C \\ (\overline{0B},\overline{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ اذن : $r(B)=C$ ❶

ولدينا : $\begin{cases} 0D=0A \\ (\overline{OD},\overline{OA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ اذن : $r(D)=A$ ❷

من ❶و❷ نستنتج أن: $r((BD))=(AC)$

3) أ) $DN=FA$ ؟؟؟

ولدينا : $r(D)=A$ ❶ و $r(N)=F$ ❷

اذن : $DN=FA$ لأن : الدوران يحافظ على المسافة

ب)نبين أن : $(EF)\parallel(AC)$:

لدينا : $(MN)\parallel(BD)$ حسب المعطيات و لدينا :

و $r((BD))=(AC)$ و $r((MN))=(EF)$

وبما أن : الدوران يحافظ على التوازي فان : $(EF)\parallel(AC)$

تمارين للبحث

تمرين1: $ABCD$ مربع بحيث : $(\overline{AB},\overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

1. حدد زاوية الدوران r الذي مركزه A و $r(D)=B$
2. حدد زاوية الدوران r' الذي مركزه C و $r'(D)=B$

تمرين2: ABC مثلث متساوي الأضلاع بحيث : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

1.حدد زاوية الدوران r_1 الذي مركزه B و يحول A إلى C

2.حدد مركز و زاوية الدوران r_2 الذي يحول A إلى B و B إلى C.

تمرين3: $ADEF$ مربع بحيث : $(\overline{AD},\overline{AF}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

ننشئ خارجه المثلث CED متساوي الأضلاع و داخله المثلث BEF متساوي الأضلاع

1. نعتبر الدوران r الذي مركزه E و زاوية $\frac{\pi}{3}$

بين أن : $r(D)=C$ و $r(F)=B$

2. لتكن A_1 النقطة بحيث : $r(A_1)=A$

a) بين أن المثلث AEA_1 متساوي الأضلاع

b) بين أن النقط : A_1 و D و F مستقيمية

c) استنتج أن النقط : A و B و C مستقيمية

مذكرة رقم 9 في درس الاشتقاق

الأهداف و القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- قابلية اشتقاق دالة في نقطة x_0 ؛ العدد المشتق؛ التأويل الهندسي للعدد المشتق و المماس لمنحنى؛ تقريب دالة قابلة للاشتقاق في نقطة بدالة تآلفية؛ - الاشتقاق على اليمين؛ الاشتقاق على اليسار؛ نصف مماس؛ مماس أو نصف مماس عمودي؛ - الاشتقاق على مجال؛ المشتقة الأولى؛ المشتقة الثانية؛ المشتقات المتتالية؛ - اشتقاق الدوال $f+g$ ، λf ، fg ، $\frac{1}{f}$ ، $\frac{f}{g}$ ، f^n $(n\in\mathbb{Z})$ ؛ $f(ax+b)$ ؛ $\sqrt{f}$. - رتابة دالة وإشارة مشتقتها؛ مطاريف دالة قابلة للاشتقاق على مجال. - المعادلة التفاضلية: $y''+\omega^2 y=0$.	- تقريب دالة بجوار نقطة x_0 بدالة تآلفية؛ - التعرف على أن العدد المشتق لدالة في x_0 هو المعامل الموجه لمماس منحنى الدالة في النقطة التي أفصولها x_0 ؛ - التعرف على مشتقات الدوال المرجعية؛ - التمكن من تقنيات حساب مشتقة دالة؛ - تحديد معادلة المماس لمنحنى دالة في نقطة وإنشاؤه؛ - تحديد رتابة دالة انطلاقا من دراسة إشارة مشتقتها؛ - تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني؛ - حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية و القيم القصوية .	- من بين الأمثلة التي يمكن معالجتها: تقريب الدوال المعرفة بما يلي: $h\to(1+h)^2$ و $h\to(1+h)^3$ و $h\to\frac{1}{1+h}$ و $h\to\sqrt{1+h}$ بجوار الصفر بدوال تآلفية. - توظف النهاية $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ في تحديد مشتقة كل من الدالتين $x\to\sin x$ و $x\to\cos x$. - تقبل المبرهنات المتعلقة بالرتابة وإشارة المشتقة الأولى؛ - يقبل الحل العام للمعادلة التفاضلية: $y''+\omega^2 y=0$

I. قابلية اشتقاق دالة عددية في نقطة

1. العدد المشتق

تعريف : لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$$

l يسمى العدد المشتق للدالة في النقطة a و نرمز له بالرمز : $f'(a)$

ونكتب : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

ملاحظة : الكتابة: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

تكافئ الكتابة: $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=5x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0=1$

الجواب : $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{5x^2-5}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{5(x^2-1)}{x-1}$

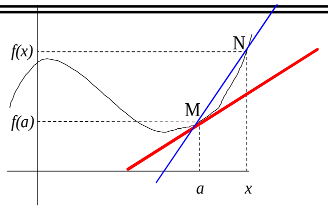
$=\lim_{x\to1}\frac{5(x^2-1^2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{5(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}5(x+1)=5\times2=10$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0=1$

و $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=10=f'(1)$ و هو العدد المشتق عند $x_0=1$

2. التأويل الهندسي للعدد المشتق – معادلة مماس لمنحنى دالة في نقطة

تعريف : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.



المستقيم (Δ) المار من النقطة $M(a;f(a))$ و الذي معامله الموجه هو $f'(a)$ يسمى المماس للمنحنى (C_f) في النقطة M

خاصية : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a

معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة $M(a;f(a))$ هي :

$$(\Delta)\ :\ y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

تمرين1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-2x+1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0=2$.

الجواب: (1 $f(2)=2^2-2\times2+1=1$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x+1-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x=2$ ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0=1$

$f'(2)=2$ و هو العدد المشتق عند $x_0=2$

(2 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=2x-3\Leftrightarrow y=1+2(x-2)\Leftrightarrow y=f(2)+f'(2)(x-2)$

II. الاشتقاق على اليمين –الاشتقاق على اليسار

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3+|x|$

1. أحسب $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0=0$)
2. أحسب $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0=0$)

3.هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$ ؟

4.حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة f على اليمين عند $x_0=0$.

5.حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة f على اليسار عند $x_0=0$.

6.كيف نسمي النقطة $A(0,f(0))$ ؟

الجواب : $\begin{cases} f(x)=x^3+x; x\ge 0 \\ f(x)=x^3-x; x\le 0\end{cases}$ و $f(0)=0^3+|0|=0$

1) $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3+x-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x^2+1)}{x}=\lim_{x\to0^+}x^2+1=1$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$ و $1=f'_d(0)$

و هو العدد المشتق على اليمين عند $x_0=0$

2) $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3-x-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x^2-1)}{x}=\lim_{x\to0^+}x^2-1=-1$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=0$ و $-1=f'_g(0)$

و هو العدد المشتق على اليسار عند $x_0=0$

3) f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$ ولكن : $f'_d(0)\neq f'_g(0)$

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0=0$.

$y=f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_d): y=x \Leftrightarrow y=0+1(x-0)\Leftrightarrow y=f(0)+f'_d(0)(x-0)$

5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0=0$.

$y=f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_g): y=-x \Leftrightarrow y=0-1(x-0)\Leftrightarrow y=f(0)+f'_g(0)(x-0)$

6) لدينا $f'_d(0)\neq f'_g(0)$ النقطة : $A(0;f(0))$ تسمى نقطة مزواة

خاصية: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

f قابلة للاشتقاق على النقطة a تكافئ f قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة a و f قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة a و $f'_g(a)=f'_d(a)$

تمرين2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=|x^2-1|$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0=1$
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0=1$
3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$ ؟
4. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0=1$.
5. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0=1$.
6. كيف نسمي النقطة $A(1,f(1))$ ؟

الجواب : $f(x)=|x^2-1|$ ندرس اشارة :

x^2-1 : $x^2-1=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=1$ أو $x=-1$

ومنه : $\begin{cases} f(x)=x^2-1; x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[\\ f(x)=-(x^2-1); x\in[-1;1]\end{cases}$ و $f(1)=|1^2-1|=0$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x2-1$	$+$	0	$-$	0	$+$

1) $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1-0}{x-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}x+1=2$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=1$ و $2=f'_d(1)$

و هو العدد المشتق على اليمين عند $x_0=1$

2) $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x^2-1)-0}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}-(x+1)=-2$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$ و $-2=f'_d(1)$

و هو العدد المشتق على اليسار عند $x_0=1$

3)

f قابلة للاشتقاق على اليمين و على اليسار عند $x_0=1$

ولكن : $f'_d(1)\neq f'_g(1)$

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$

4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0=1$.

$y=f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_d): y=2x-4\Leftrightarrow y=0+2(x-2)\Leftrightarrow y=f(1)+f'_d(1)(x-1)$

5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0=0$.

$y=f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_g): y=-2x+2\Leftrightarrow y=0-2(x-1)\Leftrightarrow y=f(1)+f'_g(1)(x-1)$

6) لدينا $f'_d(1)\neq f'_g(1)$ النقطة : $A(1;f(1))$ تسمى نقطة مزواة

III. الدالة المشتقة لدالة عددية

1. الاشتقاق على مجال

تعريف: f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I

2. الدالة المشتقة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $f'(x)$ و المعرفة كما يلي : $f':I\to\mathbb{R}$, $x\to f'(x)$

IV. جدول للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات حول الدوال المشتقة

(أنظر الجدول1 و 2)

أمثلة: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=2$ 2) $f(x)=3x-5$ 3) $f(x)=x^{10}$

4) $f(x)=4x^3-\frac{1}{2}x^2-1$ 5) $f(x)=\frac{5}{x}$ 6) $f(x)=6\sqrt{x}-4$

7) $f(x)=6x^4-\cos x+3\sin x$ 8) $f(x)=\cos(7x+2)$

9) $f(x)=\frac{4}{5}\sin(5x+4)$ 10) $f(x)=3\tan x-1$

11) $f(x)=x\cos x$ 12) $f(x)=\frac{1}{2x+1}$

13) $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ 14) $f(x)=(3x+4)^3$ 15) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

أجوبة : 1) $f'(x)=(2)'=0$ 2) $f'(x)=(3x-5)'=3$

3) $f'(x)=(x^{10})'=10x^{10-1}=10x^9$

4) $f'(x)=\left(4x^3-\frac{1}{2}x^2-1\right)'=4\times3x^{3-1}-\frac{1}{2}\times2x-0=12x^2-x$

(5 $f'(x)=\left(\frac{5}{x}\right)'=\left(5\times\frac{1}{x}\right)'=5\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-5}{x^2}$

(6 $f'(x)=\left(6\sqrt{x}-4\right)'=6\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{x}$

(7 $f'(x)=\left(6x^4-\cos x+3\sin x\right)'=6\times4x^3+\sin x+3\cos x=24x^3+\sin x+3\cos x$

(8 $f'(x)=\cos(7x+2)'=-7\times\sin(7x+2)$

(9 $f'(x)=\frac{4}{5}\sin(5x+4)'=5\frac{4}{5}\times\cos(5x+4)=4\times\cos(5x+4)$

(10 $f'(x)=(3\tan x-1)'=3\times(1+\tan^2 x)-0=3\times(1+\tan^2 x)$

(11 نستعمل القاعدة التالية : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$f'(x)=(x\times\cos x)'=x'\times\cos x+x\times\cos' x=1\times\cos x-x\times\sin x=\cos x-x\sin x$

(12 نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$f'(x)=\left(\frac{1}{2x+1}\right)'=-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}=-\frac{2}{(2x+1)^2}$

(13 $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)'=\frac{(3x-1)'(x+2)-(3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{3(x+2)-1\times(3x-1)}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$

(14 $f(x)=(3x+4)^3$ نستعمل القاعدة التالية : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$f'(x)=\left((3x+4)^3\right)'=3\times(3x+4)^{3-1}\times(3x+4)'=3\times3\times(3x+4)^{3-1}=9(3x+4)^2$

(15 نستعمل القاعدة التالية : $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

تمرين3: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

(1 $f(x)=11$ (2 $f(x)=7x+15$ (3 $f(x)=2x^3$

(4 $f(x)=4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1$ (5 $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6$

(6 $f(x)=\frac{3}{x}$ (7 $f(x)=4\sqrt{x}-1$ (8 $f(x)=\cos 2x+3\sin 3x$

(9 $f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$ (10 $f(x)=\frac{1}{5x+7}$

(11 $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ (12 $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$ (13 $f(x)=\frac{1}{\sin x}$

(14 $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ (15 $f(x)=(2x-1)^7$

أجوبة : (1 $f'(x)=(11)'=0$ (2 $f'(x)=(7x+15)'=7$

(3 $f'(x)=(2x^3)'=2\times3x^{3-1}=6x^2$

(4 $f'(x)=\left(4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=4\times4x^{4-1}-\frac{1}{3}\times3x^2-1+0=16x^3-x^2-1$

(5 $f'(x)=\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6\right)'=\frac{1}{5}\times5x^{5-1}-\frac{1}{4}\times4x^3-4+0=x^4-x^3-4$

(6 $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=\left(3\times\frac{1}{x}\right)'=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-3}{x^2}$

(7 $f'(x)=\left(4\sqrt{x}-1\right)'=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$

(8 $f'(x)=(\cos 2x+3\sin 3x)'=-2\sin 2x+3\times3\cos 3x=-2\sin 2x+9\cos 3x$

(9 $f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$

نستعمل القاعدة التالية : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$f'(x)=\left((3x^2+2)\times(7x+1)\right)'=(3x^2+2)'\times(7x+1)+(3x^2+2)\times(7x+1)'$

$f'(x)=6x\times(7x+1)+7(3x^2+2)=42x^2+6x+21x^2+14=63x^2+6x+14$

(10 نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$f'(x)=\left(\frac{1}{5x+7}\right)'=-\frac{(5x+7)'}{(5x+7)^2}=-\frac{5}{(5x+7)^2}$

(11 $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ نستعمل القاعدة التالية : $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+8x}\right)'=\frac{(x^2+8x)'}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$

(12 $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x)=\left(\frac{7x}{x^3+1}\right)'=\frac{(7x)'(x^3+1)-7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{7(x^3+1)-7x\times3x^2}{(x^3+1)^2}$

$f'(x)=\frac{7x^3+7-21x^3}{(x^3+1)^2}=\frac{7-14x^3}{(x^3+1)^2}$

(13 $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$f'(x)=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2}=-\frac{\cos x'}{(\sin x)^2}$

(14 $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}$

$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$

(15 $f(x)=(2x-1)^7$ نستعمل القاعدة التالية : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$f'(x)=\left((2x-1)^7\right)'=7\times(2x-1)^{7-1}\times(2x-1)'=14(2x-1)^6$

V.الدالة المشتقة الثانية-المشتقات المتتالية

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3-5x^2+4x-2$

أحسب المشتقة الأولى و الثانية و الثالثة

الجواب:

$f'(x)=\left(x^3-5x^2+4x-2\right)'=3x^2-5\times2x^1+4-0=3x^2-10x+4$

$f''(x)=\left(3x^2-10x+4\right)'=6x-10$ و $f'''(x)=(6x-10)'=6$

VI.تطبيقات الدالة المشتقة:

1. رتابة دالة وإشارة مشتقاتها

خاصية:لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I

• f تزايدية على مجال I يعني $\forall x\in I\quad f'(x)\ge 0$

• f تناقصية على مجال I يعني $f'(x) \le 0$ $\forall x \in I$

• f ثابتة على مجال I يعني $f'(x) = 0$ $\forall x \in I$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2+2x-2$

1) حدد D_f 2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3) أدرس تغيرات 4) حدد جدول تغيرات f

الجواب: 1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2+2x-2=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2+2x-2=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x)=\left(x^2+2x-2\right)'=2x+2$

$f'(x)=0$ يعني $2x+2=0$ يعني $x=-1$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$2x+2$	$-$	0	$+$

اذا كانت: $x\in[-1;+\infty[$ فان : $f'(x)\ge 0$ ومنه f تزايدية

اذا كانت: $x\in]-\infty;-1]$ فان : $f'(x)\le 0$ ومنه f تناقصية

4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

2. مطار يف دالة قابلة للاشتقاق

خاصية1: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة a وتقبل مطرا فا في النقطة a فان $f'(a)=0$

خاصية 2: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

إذا كانت f' تنعدم في النقطة a تتغير إشارتها فان $f(a)$ مطرا فا للدالة f

مثال: حدد مطاريف الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2-6x+1$

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$ و $f'(x)=\left(x^2-6x+1\right)'=2x-6$

$f'(x)=0$ يعني $2x-6=0$ يعني $x=3$

ندرس اشارة : $f'(x)$ ونحدد جدول التغيرات

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

f' تنعدم في 3 و تتغير إشارتها اذن $f(3)=-8$ مطرا ف للدالة f

وبالضبط قيمة دنيا للدالة f

تمرين4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2+x+1$

أو $f(x)=-x^2+2x+3$ أو $f(x)=-x^2+x$

1) حدد D_f 2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3) أحسب مشتقة الدالة f و أدرس اشارتها 4) حدد جدول تغيرات f

5) حدد معادلة لمماس منحنى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0=1$

6) حدد نقط تقاطع $\left(C_f\right)$ مع محوري المعلم

7) حدد مطاريف الدالة f ان وجدت

8) أرسم $\left(C_f\right)$ في معلم متعامد ممنظم

الجواب: $f(x)=2x^2+x+1$

1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2x^2+x+1=\lim_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x^2+x+1=\lim_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x)=\left(2x^2+x+1\right)'=4x+1$

$f'(x)=0$ يعني $4x+1=0$ يعني $x=-\frac{1}{4}$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$4x+1$	$-$	0	$+$

4) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{7}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

5) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=5x-21 \Leftrightarrow y=4+5(x-5) \Leftrightarrow y=f(1)+f'(1)(x-1)$

لأن : $f(1)=4$ و $f'(1)=5$

6) أ) نقط تقاطع $\left(C_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $2x^2+x+1=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=1$ و $c=1$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times1\times2=-7<0$

ومنه هذه المعادلة ليس لها حل: وبالتلي التمثيل المبياني لا يقطع محور الأفاصيل

ب) نقط تقاطع $\left(C_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

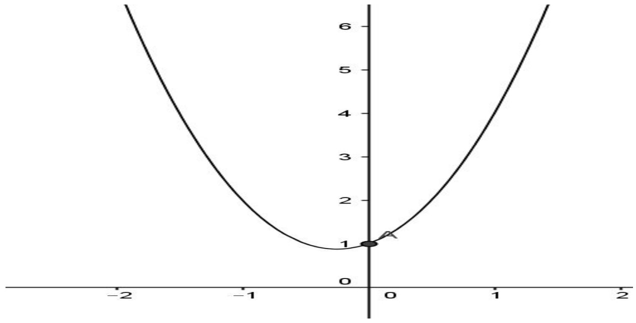
نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=1$ ومنه نقطة التقاطع هي: $A(0;1)$

7) الدالة تقبل قيمة دنيا هي : $\frac{7}{8}$

8) رسم: C_f

2-	-1	-1/4	0	1	2
7	2	7/8	1	4	11



ملاحظة : بالنسبة ل $f(x)=-x^2+2x+3$ وتحديد نقط التقاطع

مع محور الأفاصيل نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني $-x^2+2x+3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=-1$ و $b=2$ و $c=3$

$$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4\times3\times(-1)=16=(4)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **و** $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(2)+\sqrt{16}}{-2}=-1$ **و** $x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{-2}=3$

ومنه نقط التقاطع هما: $A(-1;0)$ أو $B(3;0)$

<u>تمرين5</u>: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+2x; x\le 1 \\ f(x)=-\frac{2}{x}+5; x>1 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=|x|(x-1)$$

1)أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=1$

2)هل الدالة f قابلة للاشتقاق ؟

3)أدرس قابلية اشتقاق الدالة g عند $x_0=0$

<u>الجواب</u> : $\begin{cases} f(x)=x^2+2x; x\le 1 \\ f(x)=-\frac{2}{x}+5; x>1 \end{cases}$ و $f(1)=1^2+2\times1=3$

$$1)\ \lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-\frac{4}{x}+5-3}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-\frac{4}{x}+2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{-4+2x}{x}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{-4+2x}{x}\times\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{-4+2x}{x}\times\frac{1}{x-1}=-\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=1$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 1 جذرللحدودية x^2+2x-3

اذن : هي تقبل القسمة على : $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن : $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}x+3=4$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$ و $4=f'_g(1)$

2) f غير قابلة للاشتقاق على اليمين

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$

3) $g(x)=|x|(x-1)$ و $g(0)=0$ $\begin{cases} g(x)=x(x-1); x\ge 0 \\ g(x)=-x(x-1); x\le 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-1)-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}x-1=-1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$ و $-1=f'_d(0)$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x(x-1)-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}-x+1=1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=0$ و $-1=g'_g(0)$

g قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$

ولكن : $g'_d(0)\neq g'_g(0)$

ومنه : g غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

3. حل معادلة تفاضلية

تعريف:ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم .

• المعادلة $y''+\omega^2y=0$ ذات المجهول الدالة y حيث y'' مشتقتها الثانية تسمى معادلة تفاضلية.

• كل دالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$

وتحقق المتساوية : $f''(x)+\omega^2f(x)=0$ لكل x من $\mathbb{R}$

تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y''+\omega^2y=0$.

خاصية:ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم .

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+\omega^2y=0$ هو مجموعة

الدوال y المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x$.

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

ملحوظة :حل المعادلة التفاضلية : $y''+\omega^2y=0$

يعني تحديد الحل العام للمعادلة.

<u>مثال:</u>حل المعادلة التفاضلية التالية: $y''+16y=0$

الجواب $y''+4^2y=0\Leftrightarrow y''+16y=0$:

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+16y=0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos4x+\beta\sin4x$

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

<u>تمرين6</u>: حل المعادلات التفاضلية التالية: 1) $y''+4y=0$

2) $y''+8y=0$ 3) $y''+y=0$ 4) $9y''+16y=0$

<u>الجواب</u> 1) $y''+2^2y=0\Leftrightarrow y''+4y=0$:

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+4y=0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos2x+\beta\sin2x$

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

2) $y''+(2\sqrt{2})^2y=0\Leftrightarrow y''+8y=0$:

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+8y=0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos2\sqrt{2}x+\beta\sin2\sqrt{2}x$

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

3) $y''+y=0\Leftrightarrow y''+1^2y=0$:

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+y=0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos1x+\beta\sin1x$

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

4) $y''+\left(\frac{4}{3}\right)^2y=0\Leftrightarrow y''+\frac{16}{9}y=0\Leftrightarrow 9y''+16y=0$:

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+8y=0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos\frac{4}{3}x+\beta\sin\frac{4}{3}x$

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

جدو ل للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات حول الدوال

لدالة	الدالة المشتقة f'
$f(x)=k$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=ax$	$f'(x)=a$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1} \qquad n\in\mathbb{Z}^*$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos(ax+b)$	$f'(x)=-a\sin(ax+b)$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$f'(x)=a\cos(ax+b)$
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

الدالة	الدالة المشتقة f'
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
$f(x)=u+v$	$f'(x)=u'+v'$
$f(x)=u-v$	$f'(x)=u'-v'$
$f(x)=k.u$	$f'(x)=k.u'$
$f(x)=u\times v$	$f'(x)=u'\times v+u\times v'$
$f(x)=u^n$	$f'(x)=nu^n\times u'$
$f(x)=\frac{1}{u}$	$f'(x)=-\frac{u'}{u^2}$
$f(x)=\frac{u}{v}$	$f'(x)=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
$f(x)=\sqrt{u}$	$f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

مذكرة رقم 10 في درس متجهات الفضاء

الأهداف و القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
ـ الحساب المتجهي في الفضاء؛ ـ المتجهات المستقيمية؛ التعريف المتجهي لمستقيم؛ التعريف المتجهي لمستوى؛ ـ المتجهات المستوائية.	ـ التمكن من قواعد الحساب المتجهي في الفضاء؛ ـ التعرف والتعبير عن استقامية متجهتين؛ ـ التعرف والتعبير عن استوائية ثلاث متجهات؛ ـ تطبيق الاستقامية والاستوائية في حل مسائل هندسية.	ـ يقدم مفهوم المتجهة والحساب المتجهي بنفس الكيفية التي قدم بها في المستوى. ـ يتم الاكتفاء بالتأويل الهندسي للاستقامية والاستوائية.

I. تساوي متجهتين

عناصر متجهة: A و B نقطتان من الفضاء , إذا رمزنا للمتجهة $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\vec{u}$ فان :

- اتجاه $\vec{u}$ هو المستقيم (AB) .
- منحى هو المنحى من A نحو B
- منظم $\vec{u}$ هي المسافة AB و نكتب : $\|\vec{u}\|=AB$

ملحوظة: لكل نقطة A من الفضاء , المتجهة $\overrightarrow{AA}$ ليس لها اتجاه و منظمها منعدم ؛
$\overrightarrow{AA}$ تسمى المتجهة المنعدمة , ونكتب $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء , لكل نقطة A من الفضاء , توجد نقطة وحيدة M من الفضاء بحيث : $\vec{u}=\overrightarrow{AM}$

تعريف: نقول إن متجهتين متساويتان , ادا كان لهما نفس الاتجاه ونفس المنحى ونفس المنظم.

خاصية: ليكن $ABCD$ رباعيا من الفضاء لدينا :
$ABCD$ متوازي الأضلاع ادا وفقط ادا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

مثال: لتكن A و B و C و D أربع نقط غير مستقيمية
بين أنه ادا كان : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$ لكل M من الفضاء فان : $ABCD$ متوازي الأضلاع.

الجواب :يكفي أن نبين مثلا أن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ؟؟؟؟
لدينا :
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$ يعني $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}$
يعني $\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ يعني $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

II. مجموع متجهتين

تعريف: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء
مجموع المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هي المتجهة $\vec{w}$ بحيث : ادا وضعنا $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ فان : $\vec{w}=\overrightarrow{AC}$ و نكتب : $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$

علاقة شال: لكل A و B و C نقط من الفضاء
لدينا : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

مقابل متجهة: لتكن $\vec{u}$ متجهة من الفضاء ,
مقابل المتجهة $\vec{u}$ هي المتجهة التي نرمز لها بالرمز $-\vec{u}$ و التي لها نفس اتجاه $\vec{u}$ ونفس منظم $\vec{u}$ و لكن منحاها هو عكس منحى $\vec{u}$ ولدينا $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ لكل A و B من الفضاء .

لتكن A و B و C و D أربع نقط من الفضاء
مثال: نضع : $\vec{u}=3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MD}$ لكل M من الفضاء
بين أن : المتجهة $\vec{u}$ غير مرتبطة بالنقطة M

الجواب : $\vec{u}=3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{AD}$
يعني $\vec{u}=-2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AD}$ ومنه المتجهة $\vec{u}$ غير مرتبطة بالنقطة M

III. استقامية متجهتين و التعريف المتجهي لمستقيم ومستوى

1. استقامية متجهتين :

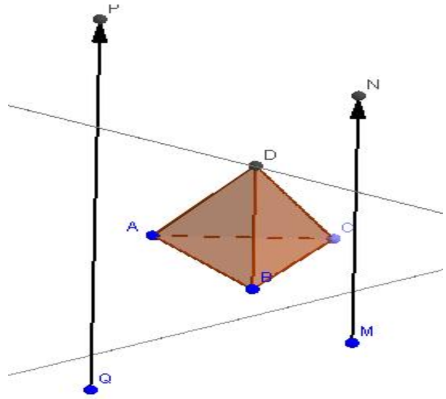
تعريف: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء
نقول ان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان اذا وجد عدد حقيقي k بحيث : $\vec{v}=k\vec{u}$

خاصية :: لتكن A و B و C و D نقط من الفضاء بحيث $A\neq B$ و $C\neq D$
$(AB)\parallel(CD)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R};\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$

تمرين: ليكن $ABCD$ رباعي الأوجه
نعتبر النقط M و N و P و Q أربع نقط بحيث :
$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CQ}=3\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{CD}$

1. أنشئ الشكل .
2. أكتب كلا من المتجهتين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{PQ}$ بدلالة $\overrightarrow{BD}$
3. استنتج أن المتجهتين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{PQ}$ مستقيميتان .
4. ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (MN) و (PQ)؟

أجوبة :الشكل:



(2 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AD}=2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=2\overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}=-\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}=-3\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CB}=-3\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\right)$

$$\overrightarrow{PQ}=-3\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\right)=-3\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=-3\overrightarrow{BD}$$

3) وجدنا $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{BD}$ يعني $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ ❶

ووجدنا $\overrightarrow{PQ}=-3\overrightarrow{BD}$ يعني $\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ ❷

من ❶ و ❷ نستنتج أن : $\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ أي $\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$

ومنه المتجهتين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{PQ}$ مستقيميتان .

4) وجدنا $\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$ اذن المستقيمان (MN) و (PQ) متوازيان

2.التعريف المتجهي لمستقيم في الفضاء :

لتكن نقطة A من الفضاء و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة

المستقيم (D) الذي يمر من A و $\vec{u}$ متجهة موجهة له نرمز له بالرمز $D\left(A;\vec{u}\right)$ ولدينا :

$$M\in D\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R};\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$$

$$M\in\left(AB\right)\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R};\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$$

3.التعريف المتجهي لمستوى في الفضاء :

A و B و C ثلاث نقط من الفضاء غير مستقيمية

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين غير مستقيميتين و A و B و C تكون لنا مستوى $(P)=ABC$

نقول $(P)=ABC$ مستوى يمر من النقطة A و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين موجهتين له

ونكتب : $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)=ABC$

$M\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AM}$ مستوائية

$$M\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R};\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$$

$$M\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R};\exists y\in\mathbb{R}\,\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$$

$M\in ABC\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AM}$ مستوائية

<u>تمرين</u>

ليكن $ABCD$ رباعي الأوجه و M نقطة من الفضاء بحيث :

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$$

1.أكتب المتجهة $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

2.استنتج أن النقطة M تنتمي إلى المستوى (ABC)

3.استنتج أن المتجهات $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EC}$ مستوائية .

أجوبة :1)

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}$$

2) وجدنا $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}$ ومنه النقطة M تنتمي إلى المستوى (ABC)

3) وجدنا $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AC}$ ومنه المتجهات $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستوائية

مذكرة رقم 12 في درس تحليلية الفضاء

الأهداف و القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- إحداثيات نقطة بالنسبة لمعلم؛ إحداثيات متجهة بالنسبة لأساس؛ إحداثيات $\vec{u}+\vec{v}$ و $\lambda\vec{u}$؛ إحداثيات $\overrightarrow{AB}$؛ - محددة ثلاث متجهات؛ - تمثيل بارامتري لمستقيم؛ الأوضاع النسبية لمستقيمين؛ - تمثيل بارامتري لمستوى؛ - معادلة ديكارتية لمستوى؛ الأوضاع النسبية لمستويين - معادلتان ديكارتيتان لمستقيم؛ - الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى.	- ترجمة مفاهيم وخاصيات الهندسة التآلفية والهندسة المتجهية بواسطة الإحداثيات؛ - البرهنة على استقامية متجهتين؛ - البرهنة على استوائية ثلاث متجهات؛ - اختيار التمثيل المناسب (ديكارتي أو بارامتري) لدراسة الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات وفي تأويل النتائج.	- يتم تحديد المعلم والأساس انطلاقا من أربع نقط غير مستوائية؛ - يتم استعمال الإسقاط عل مستوى بتواز مع مستقيم لتقديم إحداثيات نقطة (دون الإفراط في تناول الإسقاط)؛ - يتم التركيز على الأداة التحليلية في دراسة الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات في الفضاء.

I.إحداثيات نقطة بالنسبة لمعلم ، إحداثيات متجهة بالنسبة لأساس

▪ الأساس و المعلم في الفضاء

اذا كان $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاثة متجهات غير مستوائية و O نقطة من الفضاء.

نقول إن المثلوث $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أساس للفضاء ، و أن المربوع $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم في الفضاء.

ملحوظة: أربع نقط O و A و B و C غير مستوائية تحدد لنا أساسا مثلا : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$

و معلما في الفضاء مثلا : $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$.

خاصية: ليكن $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلما في الفضاء

لكل نقطة M من الفضاء توجد ثلاث أعداد حقيقية x و y و z بحيث: $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

و لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء يوجد مثلوث وحيد $(x;y;z)$ بحيث : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

- $(x;y;z)$ يسمى مثلوث إحداثيات النقطة M بالنسبة للمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و نكتب $M(x;y;z)$.
- x يسمى أفصول النقطة M بالنسبة للمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
- y يسمى أرتوب النقطة M بالنسبة للمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
- z يسمى أنسوب النقطة M بالنسبة للمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
- $(x;y;z)$ يسمى مثلوث إحداثيات المتجهة $\vec{u}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و نكتب $\vec{u}(x;y;z)$.

تمرين1: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط A و B و C و D بحيث :

$\overrightarrow{OA}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ و $\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$ و

$\overrightarrow{OC}=\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$ و $\overrightarrow{AD}=3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$

1) حدد إحداثيات A و B و C و D في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

2) حدد إحداثيات المتجهات $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ في الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

أجوبة :1) $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ يعني $A(1;2;-3)$

$\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$ يعني $B(2;5;3)$

$\overrightarrow{OC}=\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$ يعني $C(1;-4;2)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}$ يعني $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OA}$

يعني $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AO}=3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}+\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}=4\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$

يعني $D(4;4;2)$

2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-(\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k})+2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}=-\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}+2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}=\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$ ومنه $\overrightarrow{AB}(1;3;6)$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=-(\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k})+\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$

$\overrightarrow{AC}=-\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}+\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}=0\vec{i}-6\vec{j}+5\vec{k}$ ومنه $\overrightarrow{AC}(0;-6;5)$

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ يعني $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}-2(0\vec{i}-6\vec{j}+5\vec{k})$

يعني $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}-2(0\vec{i}-6\vec{j}+5\vec{k})=\vec{i}+15\vec{j}-4\vec{k}$ ومنه $\vec{u}(1;15;-4)$

▪إحداثيات منتصف قطعة و المسافة بين نقطتين

خاصية: لتكن $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتين من الفضاء المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و I منتصف القطعة $[AB]$

1) مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

2) مثلوث إحداثيات النقطة I

هو $I\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2};\frac{z_B+z_A}{2}\right)$

3) المسافة: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

مثال : $A(-3;2;1)$ و $B(5;3;-1)$ حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$ و مثلوث إحداثيات I منتصف القطعة $[AB]$ و المسافة AB

الجواب : $\overrightarrow{AB}(5+3;3-2;-1-1)$ يعني $\overrightarrow{AB}(8;1;-2)$

$I\left(\frac{5+(-3)}{2};\frac{3+2}{2};\frac{-1+1}{2}\right)$ يعني $I\left(1;\frac{5}{2};0\right)$

$$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(5+3)^2+(3-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{64+1+4}=\sqrt{69}$$

في كل ما يلي الفضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

II. محددة ثلاث متجهات في الفضاء

1. شرط استقامية متجهتين

خاصية1: لتكن $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ متجهتين غير منعدمتين.

المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k بحيث : $x'=kx$ و $y'=ky$ و $z'=kz$

ملحوظة: إذا كانت جميع إحداثيات كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير منعدمة فان : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان إذا وفقط إذا كانت $\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}$

خاصية2: لتكن $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ متجهتين من الفضاء .

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان مستقيميتان إذا وفقط إذا كانت :

$$\begin{vmatrix}y&y'\\z&z'\end{vmatrix}=0 \text{ و } \begin{vmatrix}x&x'\\z&z'\end{vmatrix}=0 \text{ و } \begin{vmatrix}x&x'\\y&y'\end{vmatrix}=0$$

مثال: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المتجهات $\vec{u}(1;-1;2)$ و $\vec{v}(-2;2;-4)$ و $\vec{w}(1;1;2)$

1) أدرس استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

2) أدرس استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{w}$

الأجوبة : 1) نحسب المحددات المستخرجة :لدينا

$$\begin{vmatrix}-1&2\\2&-4\end{vmatrix}=4-4=0 \text{ و } \begin{vmatrix}1&-2\\2&-4\end{vmatrix}=-4+4=0 \text{ و } \begin{vmatrix}1&-2\\-1&2\end{vmatrix}=2-2=0$$

ومنه المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين

2) نحسب المحددات المستخرجة :لدينا $\begin{vmatrix}-1&1\\2&2\end{vmatrix}=-2-2=-4\neq0$

ومنه المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{w}$ غير مستقيميتين

تمرين2: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط $A(1;2;1)$ و $B(2;1;3)$ و $C(-1;4;-3)$ و $D(2;3;3)$

1. أدرس استقامية النقط A و B و C
2. أدرس استقامية النقط A و B و D

الأجوبة : 1) $\overrightarrow{AB}(2-1;1-2;3-1)$ يعني $\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$

$\overrightarrow{AC}(-1-1;4-2;-3-1)$ يعني $\overrightarrow{AC}(-2;2;-4)$

نحسب المحددات المستخرجة :لدينا

$$\begin{vmatrix}-1&2\\2&-4\end{vmatrix}=4-4=0 \text{ و } \begin{vmatrix}1&-2\\2&-4\end{vmatrix}=-4+4=0 \text{ و } \begin{vmatrix}1&-2\\-1&2\end{vmatrix}=2-2=0$$

ومنه المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتين وبالتالي النقط : A و B و C مستقيمية

2) $\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$ و $\overrightarrow{AD}(1;1;2)$

$\begin{vmatrix}-1&1\\2&2\end{vmatrix}=-2-2=-4\neq0$ ومنه المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مستقيميتين

وبالتالي النقط : A و B و D غير مستقيمية

2. متجهات مستوائية:

تعريف: لتكن $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ و $\vec{w}(x'';y'';z'')$ ثلاث متجهات من الفضاء .

العدد الحقيقي: $x(y'z''-z'y'')-y(x'z''-z'x'')+z(x'y''-y'x'')$

يسمى محددة المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ونرمز له بأحد الرمزين : $\begin{vmatrix}x&x'&x''\\y&y'&y''\\z&z'&z''\end{vmatrix}$ أو $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$

ومنه لدينا :

$$\begin{vmatrix}x&x'&x''\\y&y'&y''\\z&z'&z''\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}y'&y''\\z'&z''\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x'&x''\\z'&z''\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}x'&x''\\y'&y''\end{vmatrix}$$

مثال: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المتجهات $\vec{u}(-1;1;1)$ و $\vec{v}(0;-4;4)$ و $\vec{w}(-2;0;4)$

أحسب محددة المتجهات : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix}-1&0&-2\\1&-4&0\\1&4&4\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-4&0\\4&4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0&-2\\4&4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&-2\\-4&0\end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix}-1&0&-2\\1&-4&0\\1&4&4\end{vmatrix}=-1\times-16-1\times8+1\times(-8)=16-16=0$$

خاصية: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من الفضاء.

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهات مستوائية إذا وفقط إذا كانت $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$

ملاحظة : في المثال السابق المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية

نتيجة: المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية إذا وفقط إذا كانت $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\neq0$

تمرين3: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المتجهات $\vec{u}(1;1;1)$ و $\vec{v}(-2;1;1)$ و $\vec{w}(0;1;2)$ و $\vec{x}(0;3;3)$ و $\vec{y}(1;m;2)$ حيث m بارا متر حقيقي.

1. بين أن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{x}$ مستوائية
2. بين أن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية
3. حدد العدد m بحيث تكون المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{y}$ مستوائية

أجوبة : 1)

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{x})=\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&1&3\\1&1&3\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&3\\1&3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-2&0\\1&3\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2&0\\1&3\end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{x})=3-3+6-6=0$$

ومنه : المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{x}$ مستوائية

2)

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-2&0\\1&2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2&0\\1&1\end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=1+4-2=3\neq0$$

ومنه : المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية

3) $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{y}$ مستوائية يعني

يعني $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{y}\right)=0$ يعني $\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&1&m\\1&1&2\end{vmatrix}=0$ يعني

$1\begin{vmatrix}1&m\\1&2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-2&1\\1&2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2&1\\1&m\end{vmatrix}=0$ يعني $6-3m=0$ يعني $m=2$

تمرين4: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ النقط : $A(1;1;-2)$ و $B(0;2;-1)$ و $C(1;-3;2)$ و $D(-1;1;2)$ و $E(1;1;3)$

1. بين أن النقط A و B و C و D مستوائية
2. بين أن النقط A و B و C و E مستوائية؟

أجوبة : 1) $\overrightarrow{AB}(-1;1;1)$ و $\overrightarrow{AC}(0;-4;4)$ و $\overrightarrow{AD}(-2;0;4)$ و

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-1&0&-2\\1&-4&0\\1&4&4\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-4&0\\4&4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0&-2\\4&4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&-2\\-4&0\end{vmatrix}=0$$

ومنه : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مستوائية و بالتالي النقط A و B و C و D مستوائية

2) $\overrightarrow{AE}(0;0;5)$

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right)=\begin{vmatrix}-1&0&0\\1&-4&0\\1&4&5\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-4&0\\4&5\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0&0\\4&5\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&0\\-4&0\end{vmatrix}=20\neq0$$

ومنه : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}$ غير مستوائية و بالتالي النقط A و B و C و E غير مستوائية

III. تمثيل بارامتري لمستقيم في الفضاء:

تعريف: لتكن $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(a;b;c)$ متجهة غير منعدمة من الفضاء.

النظمة: $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{cases}$ تسمى تمثيلا بارا متريا للمستقيم $D(A;\vec{u})$ المار من A و $\vec{u}$ متجهة موجهة له.

تمرين5: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ النقط : $A(1;3;1)$ و $B(2;1;2)$ و $C(3;-3;1)$ و $D(2;-1;0)$ المتجهة $\vec{u}(-1;4;1)$

1) حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (D) المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}$

2) هل النقط $B(2;1;2)$ $C(3;-3;1)$ و $D(2;-1;0)$ تنتمي للمستقيم (D)؟

3) حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (BC)

4) أدرس الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (BC)

أجوبة : 1) $(t\in\mathbb{R})$ $(D)\begin{cases}x=1-t\\y=3+4t\\z=1+t\end{cases}$

2) $\begin{cases}2=1-t\\1=3+4t\\2=1+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t=-\frac{1}{2}\\t=-1\end{cases}$ ومنه $B\notin(D)$

$\begin{cases}3=1-t\\-3=3+4t\\1=1+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\t=-\frac{3}{2}\\t=0\end{cases}$ ومنه $C\notin(D)$ و $\begin{cases}2=1-t\\-1=3+4t\\0=1+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t=-1\\t=-1\end{cases}$ ومنه $D\in(D)$

3) المستقيم (BC) يمر من النقطة $B(2;1;2)$ و $\overrightarrow{BC}(1;-4;-1)$ متجهة موجهة له اذن $(t\in\mathbb{R})$ $(BC)\begin{cases}x=2+1t\\y=1-4t\\z=2-t\end{cases}$

4) $\overrightarrow{BC}(1;-4;-1)$ و $\vec{u}(-1;4;1)$

نلاحظ أن : $\overrightarrow{BC}=-\vec{u}$ ومنه $\overrightarrow{BC}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين وبالتالي المستقيمين (D) و (BC) متوازيين

تمرين6: ليكن (D) و (Δ) مستقيمين من الفضاء معرفان على التوالي بتمثيليهما البرامتريان : $(t\in\mathbb{R})$ $(D)\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=1+t\end{cases}$

$(k\in\mathbb{R})$ $(\Delta)\begin{cases}x=3+k\\y=-1+2k\\z=3-k\end{cases}$

بين أن المستقيمين (D) و (Δ) غير متوازيين

الجواب : $\vec{u}(1;-1;1)$ متجهة موجهة ل (D) و $\vec{v}(1;2;-1)$ متجهة موجهة ل (Δ)

نلاحظ أن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين وبالتالي المستقيمين (D) و (Δ) غير متوازيين

IV. تمثيل بارامتري لمستوى في الفضاء – معادلة ديكارتية لمستوى

1. تمثيل بارامتري لمستوى في الفضاء

تعريف: لتكن $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ متجهتين غير مستقيميتين.

النظمة التالية : $(P):\begin{cases}x=x_A+at+a't'\\y=y_A+bt+b't'\\z=z_A+ct+c't'\end{cases}$

حيث $(t\in\mathbb{R})$ و $(t'\in\mathbb{R})$ تسمى تمثيلا بارامتريا للمستوى $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ المار من A و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

مثال : حدد تمثيلا بارا متريا للمستوى $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ حيث: $A(1;-3;1)$ و $\vec{u}(-2;4;1)$ و $\vec{v}(-1;0;2)$

الجواب : $(P):\begin{cases}x=1-2t-t'\\y=-3+4t\\z=1+t+2t'\end{cases}$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ و $(t'\in\mathbb{R})$ هو تمثيل بارا متريا للمستوى $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$

2. معادلة ديكارتية لمستوى

مثال: حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من $A(1;-3;1)$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}(-2;4;1)$ و $\vec{v}(-1;0;2)$

الجواب : نلاحظ أن $\vec{u}(-2;4;1)$ و $\vec{v}(-1;0;2)$ غير مستقيميتين

$M(x;y;z)\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية

يعني : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$ يعني : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y+3;z-1)$ يعني : $\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1\\ y+3 & 4 & 0\\ z-1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}4&0\\1&2\end{vmatrix}-(y+3)\begin{vmatrix}-2&-1\\1&2\end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix}-2&-1\\4&0\end{vmatrix}=0$

يعني : $8(x-1)+3(y+3)+4(z-1)=0$ يعني : $8x-8+3y+9+4z-4=0$

يعني : $(P)\ :8x+3y+4z-3=0$

تعريف: لتكن $A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيمتين.

معادلة ديكارتيه للمستوى (P) المار من A و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تكتب على الشكل : $ax+by+cz+d=0$ حيث a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث : $(a;b;c)\neq(0;0;0)$.

خاصية: مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق العلاقة : $ax+by+cz+d=0$ بحيث : $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ هي مستوى

تمرين7: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

النقط $A(1;2;3)$ و $B(1;1;2)$ و $C(-1;2;-1)$

1) بين أن النقط A و B و C غير مستقيمية

2) أعط تمثيلا بارامتريا للمستوى (ABC)

3) أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

أجوبة : 1) $\overrightarrow{AB}(0;-1;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;0;-4)$

نحسب المحددات المستخرجة :لدينا $d_1=\begin{vmatrix}-1&0\\-1&-4\end{vmatrix}=4\neq0$

ومنه المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيميتين وبالتالي النقط : A و B و C غير مستقيمية

2) لدينا المستوى (ABC) يمر من النقطة A و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين موجهتين له اذن : $(P):\begin{cases}x=1+0t-2t'\\y=2-1t+0t'\\z=3-1t-4t'\end{cases}$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ و $(t'\in\mathbb{R})$

هو تمثيل بارامتري للمستوى (ABC)

3) $M(x;y;z)\in(ABC)$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستوائية

يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y-2;z-3)$ يعني : $\begin{vmatrix}x-1&0&-2\\y-2&-1&0\\z-3&-1&-4\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}-1&0\\-1&-4\end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix}0&-2\\-1&-4\end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix}0&-2\\-1&0\end{vmatrix}=0$

يعني : $4(x-1)+2(y-2)-2(z-3)=0$ يعني : $4x-4+2y-4-2z+6=0$

يعني : $4x+2y-2z-2=0$ يعني : $(P)\ :2x+y-z-1=0$

3. الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

خاصية: ليكن $(Q)=P(B;\vec{u'};\vec{v'})$ و $(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})$ مستويين من الفضاء لدينا :

1. إذا كان : $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u'})=0$ و $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v'})=0$
فان : (P) و (Q) منطبقان أو متوازيان قطعا.
2. إذا كان : $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{u'})\neq0$ أو $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{v'})\neq0$
فان : (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم.

ملحوظة: ليكن (P) و (P') مستويين من الفضاء معرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$(P):ax+by+cz+d=0$ مع $(a;b;c)\neq(0;0;0)$

و $(P'):a'x+b'y+c'z+d'=0$ مع $(a';b';c')\neq(0;0;0)$

1. يكون المستويان (P) و (P') متقاطعين إذا وفقط إذا كان : $ab'-ba'\neq0$ أو $ac'-ca'\neq0$ أو $bc'-cb'\neq0$.
2. يكون المستويان (P) و (P') متوازيين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم k بحيث : $a'=ka$ و $b'=kb$ و $c'=kc$.
3. يكون المستويان (P) و (P') منطبقين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم k بحيث : $a'=ka$ و $b'=kb$ و $c'=kc$ و $d'=kd$

مثال : $(Q)\ :\ x-y-2z-3=0$ و $(P)\ :3x-3y-6z-2=0$

الجواب : المستويان (P) و (P') متوازيين قطعا $k=3$

تمرين8: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقطة $A(1;1;0)$ و المتجهتين $\vec{u}(1;1;1)$ و $\vec{v}(1;-1;2)$

و المستوى (Q) الذي معادلة الديكارتية : $x+y-z+1=0$ (Q)

1) أعط معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من A و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

2) أدرس الوضع النسبي للمستويين (Q) و (P).

الجواب : 1)نلاحظ أن $\vec{u}(1;1;1)$ و $\vec{v}(1;-1;2)$ غير مستقيميتين

$M(x;y;z)\in P(A;\vec{u};\vec{v})$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية

يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$ يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y-1;z)$ يعني : $\begin{vmatrix}x-1&1&1\\y-1&1&-1\\z&1&2\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=0$

يعني : $3(x-1)-(y-1)-2z=0$ يعني : $(P)\ :3x-y-2z-2=0$

2) $(Q)\ :\ x+y-z+1=0$ و $(P)\ :3x-y-2z-2=0$

$3\times1-1\times(-1)=4\neq0$ اذن (P) و (Q) متقاطعين

V. معادلتان ديكارتيتان لمستقيم

تعريف وخاصية: ليكن $D(A;\vec{u})$ المستقيم المار من $A(x_A;y_A;z_A)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ متجهة موجهة له.

- إذا كانت: $a\neq0$ و $b\neq0$ و $c\neq0$ فان النظمة: $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$
تسمى : معادلتان ديكارتيتان للمستقيم D
- إذا كان أحد الأعداد a أو b أو c منعدما (مثلا $a=0$ و $b\neq0$ و $c\neq0$) فان النظمة: $x=x_A$ و $\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$ تسمى : معادلتان ديكارتيتان للمستقيم D
- إذا كان عددان من الأعداد a أو b أو c منعدمان (مثلا $a=0$ و $b=0$ و $c\neq0$) فان النظمة: $x=x_A$ و $y=y_A$ تسمى : معادلتان ديكارتيتان للمستقيم D .

مثال1 : حدد معادلتان ديكارتيتان للمستقيم $(D)=D\left(A;\vec{u}\right)$.

حيث : $A(1;-1;2)$ و $\vec{u}(1;2;3)$ متجهة موجهة له.

الجواب : $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$ يعني $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$

$$\begin{cases}\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}\\ \frac{x-1}{1}=\frac{z-2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-1)=y+1\\ 3(x-1)=z-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y-3=0\\ 3x-z-1=0\end{cases}$$

مثال2 : حدد معادلتان ديكارتيتان للمستقيم $(D)=D\left(A;\vec{u}\right)$.

حيث : $A(1;-1;3)$ و $\vec{u}(0;1;2)$ متجهة موجهة له.

الجواب : $\begin{cases}x=1\\ \frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 2(y+1)=z-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 2y-z+5=0\end{cases}$

VI. الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى في الفضاء- دراسة تحليلية:

مثال1: $(P):3x-y-2z-2=0$ و $(t\in\mathbb{R})$ $(D)\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\\ z=3+2t\end{cases}$

أدرس الوضع النسبي للمستوى (P) و المستقيم (D)

الجواب : $(P):x+y-z+1=0$

اذن : $(1+t)+(2-t)-(3+2t)t+1=0$ يعني $t=\frac{1}{2}$ اذن : (D) يقطع

المستوى (P) في النقطة : $\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\\ y=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\\ z=3+2\frac{1}{2}=4\end{cases}$

$A\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};4\right)$ هي نقطة التقاطع

مثال2: $(P):3x-y-2z-2=0$ و $(t\in\mathbb{R})$ $(D)\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+t\\ z=-2+4t\end{cases}$

أدرس الوضع النسبي للمستوى (P) و المستقيم (D)

الجواب : $(P):5x+2y-3z-10=0$

اذن : $5(1+2t)+2(-1+t)-3(-2+4t)t-10=0$ يعني $-1=0$ غير ممكن

اذن : (D) و (P) متوازيان قطعا

خاصية: ليكن $(D)=D\left(A;\vec{w}\right)$ و $(P)=P\left(B;\vec{u};\vec{v}\right)$

- إذا كان $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=0$ و $A\in(P)$ فان $(D)\subset(P)$
- إذا كان $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=0$ و $A\notin(P)$ فان (D) يوازي قطعا (P)
- إذا كان $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)\neq0$ فان (D) يخترق (P).

مثال1 و $(D)=D\left(A;\vec{w}\right)$ و $(P)=P\left(B;\vec{u};\vec{v}\right)$ حيث $\vec{u}(1;-1;1)$ و

$\vec{v}(0;1;0)$ و $\vec{w}(0;2;0)$ و $A(0;0;-1)$ و $B(1;0;0)$

1) حدد معادلة ديكارتية للمستوى $(P)=P\left(B;\vec{u};\vec{v}\right)$

2) أدرس الوضع النسبي للمستوى (P) و المستقيم (D)

الجواب : 1) نلاحظ أن $\vec{u}(1;-1;1)$ و $\vec{v}(0;1;0)$ غير مستقيميتين

$M(x;y;z)\in P\left(B;\vec{u};\vec{v}\right)$ يعني $\overrightarrow{BM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية

يعني : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$ يعني : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$

$\overrightarrow{BM}(x-1;y;z)$ يعني : $\begin{vmatrix}x-1&1&0\\ y&-1&1\\ z&1&0\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}-1&1\\ 1&0\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}1&0\\ 1&0\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}1&0\\ -1&1\end{vmatrix}=0$

يعني : $-(x-1)-0+z=0$ يعني : $(P):-x+z+1=0$

2) $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\ -1&1&2\\ 1&0&0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&2\\ 0&0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&0\\ 0&0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&0\\ 1&2\end{vmatrix}=0$

ولدينا $A\in(P)$ لأن:

$(P):-0-1+1=0$ ومنه $(D)\subset(P)$

أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة	مـادة الـريـاضيات	المستوى : الأولى باك علوم تجريبية الأستاذ : عثماني نجيب مذكرة رقم /11

مذكرة رقم 11 في درس دراسة الدوال

الأهداف و القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
ـ الفروع اللانهائية: المستقيمات المقاربة؛ الاتجاهات المقاربة؛ ـ نقط الانعطاف؛ تقعر منحنى دالة؛ ـ عناصر تماثل منحنى دالة.	ـ حل مبياني لمعادلات ومتراجحات؛ ـ استعمال الدورية وعناصر تماثل منحنى في اختصار مجموعة دراسة دالة؛ ـ استعمال إشارة المشتقة الثانية لدراسة تقعر منحنى وتحديد نقط انعطافه؛ ـ دراسة وتمثيل دوال حدودية ودوال جذرية ودوال لاجذرية؛ ـ دراسة وتمثيل دوال مثلثية بسيطة.	ـ ينبغي الاقتصار على تحديد نهايات دوال بسيطة (دوال حدودية من الدرجة الثانية والدرجة الثالثة أو دوال من الشكل $x \to ax+b+\varphi(x)$ حيث $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$) عند محدات مجموعات تعريفها وتحديد فروعها اللانهائية؛ ـ ينبغي دراسة دوال لا يطرح حساب وإشارة مشتقاتها صعوبة بالغة؛ ـ ينبغي تناول الحل المبياني لمعادلات ومتراجحات من النوع $f(x)=c$ و $f(x)\leq c$ و $f(x)\leq g(x)$ و $f(x)=g(x)$ و $f(x)<g(x)$ حيث f و g دالتان من بين الدوال الواردة في البرنامج إذا لم يكن الحل الجبري في المتناول.

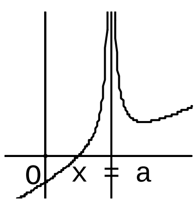
I. المستقيمات المقاربة

في جميع فقرات الدرس , ننسب المستوى إلى معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$

1. فرع لا نهائي لمنحنى دالة عددية

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و (C_f) منحناها في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

إذا آلت إحدى احداثيي نقطة من (C_f) إلى ما لا نهاية , نقول إن (C_f) يقبل فرعا لا نهائيا.

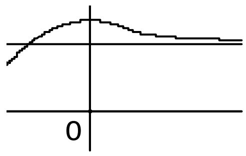


2. المقارب الموازي لمحور الأراتيب

تعريف: إذاكانت: $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=+\infty$ أو $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=-\infty$ أو

$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=+\infty$ أو $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=-\infty$

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $x=a$ مقارب للمنحنى (C_f)



مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$f(x)=\frac{2x-1}{3x-6}$

حدد $\lim_{x\to2^+} f(x)$ و $\lim_{x\to2^-} f(x)$ وأول النتيجتين هندسيا

الجواب : $\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{2x-1}{3x-6}$

x	$-\infty$ $\quad 2 \quad$ $+\infty$
$3x-6$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

$\lim_{x\to2^+} 2x-1=3$ و $\lim_{x\to2^+} 3x-6=0^+$ و $\lim_{x\to2^-} 3x-6=0^-$

ومنه : $\lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to2^-} f(x)=-\infty$

التأويل المبياني : المستقيم ذا المعادلة $x=2$ مقارب للمنحنى (C_f)

والمقارب الموازي لمحور الأفاصيل

تعريف: إذا كانت: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$ (أو $\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$) ,

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y=a$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{6x+1}{2x-5}$

حدد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ وأول النتيجتين هندسيا

الجواب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{2x}=\frac{6}{2}=3$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{2x}=\frac{6}{2}=3$

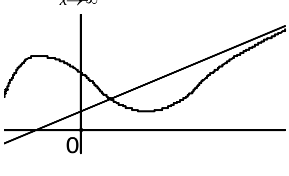
التأويل المبياني : المستقيم ذا المعادلة $y=3$ مقارب للمنحنى (C_f)

المقارب المائل

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و تقبل نهاية غير منتهية بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)

إذا كانت: $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$ (أو $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0$)

حيث $a\in\mathbb{R}^*$ و $b\in\mathbb{R}$ نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ مائل مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$) .



مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=2x-1+\frac{1}{x-3}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. حدد معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

الجواب:

1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-3\neq0\}$ ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{3\}=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

2) $f(x)=2x-1+\frac{1}{x-3}$ يعني $f(x)-(2x-1)=\frac{1}{x-3}$

يعني $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-3}=\frac{1}{+\infty}=0$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

خاصية: يكون المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ مقاربا مائلا لمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ إذا وفقط إذا كان : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax=b$

II. الفروع الشلجمية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x بحيث تقبل نهاية لا منتهية بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$) و (C_f) منحناها في معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$.

2. فرع شلجمي اتجاهه محور الأفاصيل

تعريف: إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ (أو $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$) نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)

مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x}$

أحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و أول هندسيا النتيجة

الجواب : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{+\infty}=0$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

3. فرع شلجمي اتجاهه محور الأراتيب

تعريف: إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ أو $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ أو $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ أو $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3$ أحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و أول هندسيا النتيجة

الجواب : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

4. فرع شلجمي اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y=ax$ حيث $a\neq 0$:

تعريف: إذا كانت: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax=+\infty$

نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذي المعادلة $y=ax$ بجوار $+\infty$ (نفس التعريف بجوار $-\infty$)

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x}-x$

1. حدد حيز تعريف الدالة f و أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
2. حدد طبيعة الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f

الجواب : 1) $D_f=\mathbb{R}^+$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(1-\sqrt{x})=-\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}-1=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}-1=\frac{1}{+\infty}-1=-1=a$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax=\lim_{x\to+\infty} f(x)-(-1)x=\lim_{x\to+\infty} f(x)+x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذي المعادلة $y=-x\Leftrightarrow y=(-1)x$ بجوار $+\infty$

III. تقعر منحنى – نقط الانعطاف

خاصية: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I و (C_f) منحناها في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

- إذا كانت f'' موجبة على المجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعرا موجها نحو محور الأراتيب الموجبة.
- إذا كانت f'' سالبة على المجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعرا موجها نحو محور الأراتيب السالبة.
- إذا كانت f'' تنعدم في النقطة $x_0\in I$ وتتغير إشارتها بجوار x_0 فان النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة انعطاف المنحنى (C_f) .

مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي : $f(x)=\frac{1}{12}x^4-2x^2+x+\frac{2}{3}$

1. أحسب $f''(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$
2. أدرس تقعر المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع تحديد نقطتي انعطافه

الجواب : 1)

$$f'(x)=\left(\frac{1}{12}x^4-2x^2+x+\frac{2}{3}\right)'=\frac{1}{12}4\times x^3-4x+1=\frac{1}{3}x^3-4x+1$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-4x+1\right)'=x^2-4$$

2) $f''(x)=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow x^2-2^2=0\Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ أو $x=-2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

- تقعر (C_f) موجه نحو محورالأراتيب الموجبة على المجال: $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$
- تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب الموجبة على المجال: $[-2,2]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

$A(1,f(1))$ و $B(-1,f(-1))$ نقطتا انعطافه

IV. محور تماثل – مركز تماثل

خاصية: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على مجموعة D و (C_f) منحناها في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

- يكون المستقيم ذو المعادلة $x=a$ $(a\in\mathbb{R})$ محور تماثل المنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{cases}(\forall x\in D);(2a-x)\in D\\(\forall x\in D);f(2a-x)=f(x)\end{cases}$$

- تكون النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تماثل المنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{cases}(\forall x\in D);(2a-x)\in D\\(\forall x\in D);f(2a-x)=2b-f(x)\end{cases}$$

مثال1 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x-x^2}$

1. حدد حيز تعريف الدالة f

2. بين أن المستقيم $x=\frac{1}{2}$ محور تماثل للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f

الجواب:

1) $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ ، $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-x^2\geq 0\}$

$x-x^2=0 \Leftrightarrow x(1-x)=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $x=1$

ومنه جدول الاشارة :

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$x-x^2$	$-$ 0 $+$ 0 $-$

ومنه: $D_f=[0,1]$

2) $x=a$ يعني $x=\frac{1}{2}$

أ) نبين أنه : اذا كانت $x\in[0,1]$ فان : $1-x\in[0,1]$ ؟؟؟

$x\in[0,1] \Leftrightarrow 0\leq x\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq -x\leq 0 \Leftrightarrow 1-1\leq 1-x\leq 1+0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0\leq 1-x\leq 1 \Leftrightarrow 1-x\in[0,1]$

ب)نبين أن : $f(1-x)=f(x)$ ؟؟؟؟

$f(1-x)=\sqrt{(1-x)-(1-x)^2}=\sqrt{1-x-(1-2x+x^2)}$

$=\sqrt{1-x-1+2x-x^2}=\sqrt{x-x^2}=f(x)$

ومنه $x=\frac{1}{2}$ محور تماثل منحنى الدالة f .

مثال2 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x+1}$$

1. بين أن $f(x)=x-2+\frac{2}{x+1}$ $\forall\in D_f$
2. بين أن النقطة $\Omega(-1;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

الجواب : 1) $x-2+\frac{2}{x+1}=\frac{(x-2)(x+1)+2}{x+1}=\frac{x^2-x}{x+1}=f(x)$

2) $\Omega(-1;-3)$ $\Omega(a;b)$

أ) نبين أنه : اذا كانت $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ فان : $-2-x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ ؟؟؟

$x\in\mathbb{R}-\{-1\} \Leftrightarrow x\neq -1 \Leftrightarrow -x\neq 1 \Leftrightarrow -2-x\neq -2+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2-x\neq -1 \Leftrightarrow -2-x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

ب)نبين أن : $f(-2-x)+f(x)=-6=2b$ ؟؟؟؟

$f(-4-x)+f(x)=-4-x-1+\frac{1}{-4-x+2}+x-1+\frac{1}{x+2}$

$=-4-2+\frac{1}{-x-2}+\frac{1}{x+2}=-6+-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}=-6$

ومنه $\Omega(-2;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

تمرين1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أدرس زوجية الدالة f
3. أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f
4. أدرس الفروع اللانهاية لمنحنى الدالة f
5. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها
6. حدد جدول تغيرات الدالة f
7. حدد معادلة لمماس المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في النقطة A التي أفصولها $x_0=-1$
8. حدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.
9. حدد مطا ريف الدالة f اذا وجدت
10. أرسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

أجوبة : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$ (1 $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2)أ) اذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان $-x\in\mathbb{R}$

ب) $f(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-4(-x)=-\frac{1}{3}x^3-4(-x)=-\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)=-f(x)$

ومنه f دالة فردية

3) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

لأن نهاية دالة حدودية عند مالانهايةهي نهاية حدها الأكبر درجة

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^2=+\infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}x^2=+\infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

5) $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)'=\frac{1}{3}3\times x^2-4=x^2-4$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2-2^2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ أو $x=-2$

x	$-\infty$ -2 2 $+\infty$
x^2-4	$+$ 0 $-$ 0 $+$

6)

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$16/3$	$\searrow$	$-16/3$	$\nearrow$	$+\infty$

7)معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0=-1$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $f(-1)=\frac{11}{3}$ و $f'(-1)=-3$

$y=f(-1)+f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y=\frac{11}{3}-3(x+1) \Leftrightarrow y=-3x+\frac{2}{3}$

8) أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\frac{1}{3}x^3-4x=0$

يعني $x\left(\frac{1}{3}x^2-4\right)=0$ يعني $x=0$ أو $\frac{1}{3}x^2-4=0$

يعني $x=0$ أو $x^2=12$ يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{12}$ أو $x=-\sqrt{12}$

يعني $x=0$ أو $x=2\sqrt{3}$ أو $x=-2\sqrt{3}$

ومنه نقط التقاطع هم: $A(2\sqrt{3};0)$ و $B(-2\sqrt{3};0)$ و $O(0;0)$

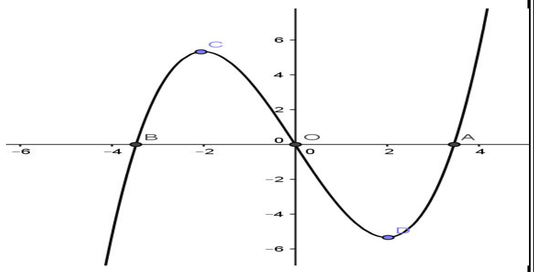
ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ لدينا $f(0)=0$ ومنه نقطة التقاطع هي: $O(0;0)$

9) $f(2)=-\frac{16}{3}$ هي قيمة دنيا للدالة f

$f(-2)=\frac{16}{3}$ هي قيمة قصوى للدالة f

9)التمثيل المبياني للدالة f



تمرين2: نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g(x)=\frac{2x+1}{x+1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة g.
2. أحسب نهايات الدالة g في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
3. أحسب الدلة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g.
4. أنشئ منحنى الدالة g.

الحل:

1)حيز تعريف الدالة g هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1\}$

و منه $D=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

2) $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

$\lim_{x\to-1^+}g(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{2x+1}{x+1}=-\infty$ و $\lim_{x\to-1^-}g(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{2x+1}{x+1}=+\infty$

يعني المستقيم ذا المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى.

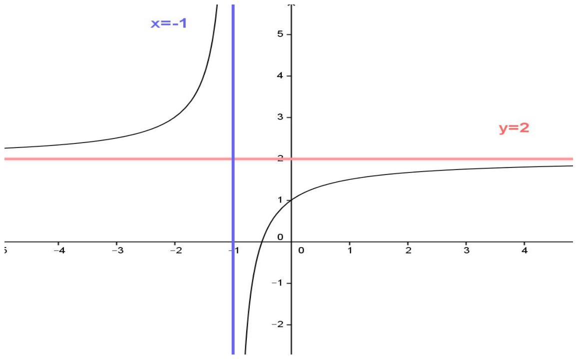
3)لكل x من D لدينا: $g'(x)=\frac{\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$

يعني: $(\forall x\in D)\ g'(x)>0$

4)جدول تغيرات الدالة.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	‖	$\nearrow$	2

منحنى الدالة g.



تمرين3: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$f(x)=\sqrt{4x^2+2x-2}$

1. حدد D_f و حدد $f'(x)$
2. أحسب : $\lim_{x\to-\infty}f(x)$
3. بين : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$ و أحسب : $\lim_{x\to-\infty}f(x)+2x$
4. أستنتج معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

أجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/4x^2+2x-2\geq 0\}$

$2x^2+x-1=0\Leftrightarrow 4x^2+2x-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{-1+3}{2\times2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ و $x_2=\frac{-4}{4}=-1$ ومنه جدول الاشارة :

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$4x2+2x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه: $D_f=]-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$\forall x\in]-\infty;-1[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$f'(x)=\left(\sqrt{4x^2+2x-2}\right)'=\frac{(4x^2+2x-2)'}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{8x+2}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{4x+1}{\sqrt{4x^2+2x-2}}$

2) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}$

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}4x^2+2x-2=\lim_{x\to-\infty}4x^2=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}}{x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}$

لدينا : $x\to-\infty$ ومنه : $|x|=-x$ ومنه

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}=-\sqrt{4}=-2=a$

$\lim_{x\to\infty}f(x)+2x=\lim_{x\to\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}+2x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x-2-4x^2}{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}+2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{-\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}+2\right)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}=b$

4)ومنه : $y=ax+b$ أي $y=-2x-\frac{1}{2}$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$