الرياضيات

التمرين الأول :

1) مثلوث إحداثيات المتجهة $\vec{OC}\wedge\vec{OD}$:

لدينا : $\vec{OD}(x_D-x_O, y_D-y_O, z_D-z_O)$ و $\vec{OC}(x_C-x_O, y_C-y_O, z_C-z_O)$

ومنه : $\vec{OD}(0, 1, -1)$ و $\vec{OC}(2, -1, 0)$

$$\vec{OC}\wedge\vec{OD} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{OC}\wedge\vec{OD} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{OC}\wedge\vec{OD} = (1, 2, 2)$$

لدينا : $\vec{OC}\wedge\vec{OD}$ متجهة منظمية على المستوى (OCD) ،

ولدينا : $O(0,0,0)$ نقطة تنتمي إلى المستوى (OCD)

ومنه فإن : $x + 2y + 2z + d = 0$

أي أن : $0 + 0 + 0 + d = 0$

وبالتالي : $d = 0$

إذن : معادلة ديكارتية للمستوى (OCD) هي : $x + 2y + 2z = 0$

2) لدينا : (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\vec{MA}\cdot\vec{MB} = 0$

ولدينا : $\vec{MB}(x_B - x ; y_B - y ; z_B - z)$ و $\vec{MA}(x_A - x ; y_A - y ; z_A - z)$

أي :

$$\vec{MA}\cdot\vec{MB} = (x_A - x)(x_B - x) + (y_A - y)(y_B - y) + (z_A - z)(z_B - z) = 0$$

$$= x_A x_B - x x_A - x x_B + x^2 + y_A y_B - y_A y - y_B y + y^2 + z_A z_B - z_A z - z_B z + z^2 = 0$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + x(-x_A - x_B) + y(-y_A - y_B) + z(-z_A - z_B) + x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B = 0$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + x(2-6) + y(-2-6) + z(-8-0) - 12 + 12 + 8\times 0 = 0$$

$$= x^2 - 4x + y^2 - 8y + z^2 - 8z = 0$$

$$= (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 - 4 - 16 - 16 = 0$$

$$= (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 36$$

إذن : (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(2,4,4)$ وشعاعها $R = \sqrt{36} = 6$

٣) أ- المسافة بين Ω و (OCB).

$$d(\Omega,(OCB))=\frac{|2\times 1+2\times 4+4\times 2|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{18}{\sqrt{9}}=6$$

ب- لدينا، $d=6=R$

إذن: المستوى (OCB) مماس للفلكة (S).

٢- $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=-2\times 6+6\times 2+0\times 8=-12+12+0=0$

لدينا، (S) هي الفلكة التي مركزها Ω وشعاعها R،

وهي مجموعة النقط M التي تحقق $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$

ولدينا، $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0$ ومنه فإن O تنتمي إلى الفلكة (S)

و O توجد ضمن المستوى (OCB)

إذن، O هي نقطة تماس الفلكة (S) والمستوى (OCB)

التمرين الثاني

① الكتابة على الشكل المثلثي للعددين a و b:

$a=2-2i$	$b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
$r_a=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$	$r_b=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$
$a=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}-i\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)$	$b=1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$
$a=2\sqrt{2}\left(\cos-\frac{\pi}{4}+i\sin-\frac{\pi}{4}\right)$	$b=1\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
$a=\left[2\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$	$b=\left[1,\frac{5\pi}{6}\right]$

②أ- لدينا، R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{5\pi}{6}$:

ونعلم أن الصيغة العقدية للدوران هي، $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$

أي، $z'=e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$

ومنه $z'=e^{i\frac{5\pi}{6}}(z-z_O)+z_O$

وبالتالي، $z'=\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)z$

إذن $z'=bz$

ب- C هي صورة A بالدوران R

أي أن، $z_C=bz_A$

$z_C=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(2-2i)$

إذن $z_C = -2\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times 2i + \frac{1}{2}\times 2i - \frac{1}{2}\, i\times 2i$

$z_C = -\sqrt{3} + i\sqrt{3} + i + 1$

$z_C = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$

إذن، C صورة A بالدوران R.

3- لدينا، $z_C = b\, z_A$

أي أن $z_C = [1, \frac{5\pi}{6}]\times[2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}]$

وبالتالي، $z_C = [1\times 2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6} + (-\frac{\pi}{4})]$

إذن، $\arg c = \arg a + \arg b$

ومنه، $\arg c = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$

أي، $\arg c \equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

- التمرين الثالث:

$3B, 4N, 5R$

1- احتمال الحدث A، 3 كرات من نفس اللون.

$3B$ أو $3N$ أو $3R$

$$P(A) = \frac{C_3^3 + C_4^3 + C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

• احتمال الحدث B، 3 كرات مختلفة اللون مثنى مثنى.

$1B, 1N, 1R$

$$P(B) = \frac{C_3^1 \times C_5^1 \times C_4^1}{C_{12}^3} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

2- X المتغير الذي يربط كل سحبة بعدد الألوان التي تحملها.

أ- $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

ب- قانون الاحتمال:

$3B$ أو $3N$ أو $3R$

$$P(X=1) = \frac{C_3^3 + C_4^3 + C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{3}{44}$$

$2B, 1\bar{B}$ أو $2N, 1\bar{N}$ أو $2R, 1\bar{R}$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2\times C_9^1 + C_4^2\times C_8^1 + C_5^2\times C_7^1}{C_{12}^3} = \frac{145}{220} = \frac{29}{44}$$

$1B, 1R, 1N$

$$P(X=3) = \frac{C_3^1\times C_4^1\times C_5^1}{C_{12}^3} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

x	1	2	3
$P(X=x_i)$	$3/44$	$29/44$	$3/11$

، الأمل الرياضي :

$$E(X) = \frac{3}{44}\times 1 + 2\times\frac{29}{44} + \frac{3}{11}\times 3$$

$$E(X) = \frac{3}{44} + \frac{58}{44} + \frac{36}{44}$$

$$E(X) = \frac{97}{44}$$

التمرين الرابع :

1) أ- نتحقق من أن $\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$ لكل $x \neq -3$

$$1 - \frac{3}{x+3} = \frac{x+3-3}{x+3} = \frac{x}{x+3}$$

ب-

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}\,dx = \int_{-2}^{-1} 1 - \frac{3}{x+3}\,dx$$

$$= \left[x - 3\ln|x+3|\right]_{-2}^{-1}$$

$$= -1 - 3\ln|2| + 2 - \ln|1|$$

$$= 1 - 3\ln(2)$$

ومنه

2)

$$J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6)\,dx$$

لدينا ،

$$u(x) = \ln(2x+6) \longrightarrow u'(x) = \frac{2}{2x+6}$$

و

$$v'(x) = 1 \longrightarrow v(x) = x$$

ومنه ،

$$J = \left[x \ln(2x+6)\right]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} x \times \frac{2}{2x+6}\,dx$$

$$J = \left[x \ln(2x+6)\right]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} x \times \frac{2}{2(x+3)}\,dx$$

$$J = \left[x \ln(2x+6)\right]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}\,dx$$

$$J = -\ln(4) + 2\ln(2) - I$$

$$J = -\ln(4) + \ln(4) - I$$

$$J = -I$$

إذن

I)

لدينا، $f(x) = 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$

1) لنتحقق أن، $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$

لدينا $(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 = (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} + 1 + 1$

$= e^x - 2\sqrt{e^x} + 2$

لدينا، $f(x) = 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$

$Df = \{x / x \in \mathbb{R} \text{ و } e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0\}$

$Df = \{x / x \in \mathbb{R} \text{ و } (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 > 0\}$

لدينا: $(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 = 0$

$(\sqrt{e^x} - 1)^2 = -1$

وهذا لا يمكن، إذن $(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 > 0$

ومنه فإن $Df = \mathbb{R}$

لدينا: $1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} = \frac{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}{e^x}$

أي $= \frac{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}{e^x} = 0$

ومنه فإن، $\frac{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1}{e^x} = 0$

لدينا $e^x > 0$

وبالتالي $(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 = 0$

لدينا، $(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 > 0$

إذن $\frac{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1}{e^x} > 0$

ومنه فإن، $1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$

(c)

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} 2\ln\left[(\sqrt{e^x}-1)^2+1\right]$

لدينا، $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

ومنه، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x}+2\right)$

لدينا. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

ومنه. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2\ln 2 = \ln 4$

إذن، $\mathcal{C}_f$ يقبل مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y=\ln 4$.

(3) أ ـ الدالة المشتقة

لدينا $f(x) = 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x}+2\right)$

وبالتالي $f'(x) = \dfrac{2\left(e^x - 2\sqrt{e^x}+2\right)'}{e^x - 2\sqrt{e^x}+2}$

ومنه، $f'(x) = \dfrac{2\left(e^x - 2\times\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}\right)}{e^x - 2\sqrt{e^x}+2}$

أي، $f'(x) = \dfrac{2\left(\frac{e^x\sqrt{e^x}-e^x}{\sqrt{e^x}}\right)}{(\sqrt{e^x}-1)^2+1}$

ومنه، $f'(x) = \dfrac{2e^x(\sqrt{e^x}-1)}{\left[(\sqrt{e^x}-1)^2+1\right]\sqrt{e^x}}$

إذن، $f'(x) = \dfrac{2(\sqrt{e^x})^2(\sqrt{e^x}-1)}{\sqrt{e^x}\left[(\sqrt{e^x}-1)^2+1\right]}$

ومنه، $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x}-1)}{(\sqrt{e^x}-1)^2+1}$

لدينا $f'(0) = \dfrac{2\sqrt{e^0}(\sqrt{e^0}-1)}{(\sqrt{e^0}-1)^2+1} = \dfrac{2\times 0}{1} = 0$.

- إشارة $\sqrt{e^x}-1$

لدينا

$$\sqrt{e^x}-1=0$$
$$\sqrt{e^x}=1$$
$$e^{\frac{1}{2}x}=1$$
$$\ln e^{\frac{1}{2}x}=\ln 1$$
$$\frac{1}{2}x=0$$
$$x=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\sqrt{e^x}-1$		$-$	0	$+$	

لدينا $2\sqrt{e^x}>0$ و $(\sqrt{e^x}+1)^2+1>0$

وبالتالي، إشارة f' هي إشارة $(\sqrt{e^x}-1)$.

لدينا، $f'(x)\geq 0$ على المجال $[0,+\infty[$

إذن: f تزايدية على المجال $[0,+\infty[$.

ولدينا، $f'(x)\leq 0$ على المجال $]-\infty,0]$

إذن f تناقصية على المجال $]-\infty,0]$.

4) أ- لنتحقق من أن $f(x)=2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$

$$2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)=2x+2\ln\left(\frac{e^x-2\sqrt{e^x}+2}{e^x}\right)$$
$$=2x+2\ln(e^x-2\sqrt{e^x}+2)-2\ln e^x$$
$$=2x+2\ln(e^x-2\sqrt{e^x}+2)-2x$$
$$=2\ln(e^x-2\sqrt{e^x}+2)=f(x)$$

إذن $f(x)=2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$

- يكون، $(D): y=2x$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$،

إذا وفقط إذا كان، $\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x=0$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim_{x\to+\infty} 2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

ومنه $\lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x = 2\ln 1 = 0$

إذن $(D): y = 2x$ مقارب مائل لـ C_f بجوار $+\infty$.

5) أ- نتحقق من أن $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

لدينا $(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) = (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} - \sqrt{e^x} + 2$

$= e^x - 3\sqrt{e^x} + 2$

ب- ندرس إشارة $\sqrt{e^x} - 2$

$\sqrt{e^x} - 2 = 0$

$\sqrt{e^x} = 2$

$e^{\frac{1}{2}x} = 2$

$\ln e^{\frac{1}{2}x} = \ln 2$

$\frac{1}{2}x = \ln 2$

$x = 2\ln 2$

$x = \ln 4$

x	$-\infty$	$\ln 4$	$+\infty$
$\sqrt{e^x} - 2$	$-$	0	$+$

• إشارة $(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$

x	$-\infty$	0		$\ln 4$	$+\infty$
$(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

ج- لدينا $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 \leq 0$ $\forall x \in [0, \ln 4]$

أي $e^x - 2\sqrt{e^x} - \sqrt{e^x} + 2 \leq 0$ $\forall x \in [0, \ln 4]$

ومنه $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$ $\forall x \in [0, \ln 4]$

د- لدينا $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$ $\forall x \in [0, \ln 4]$

$2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq 2\ln(\sqrt{e^x})$

$2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq 2\ln e^{\frac{1}{2}x}$

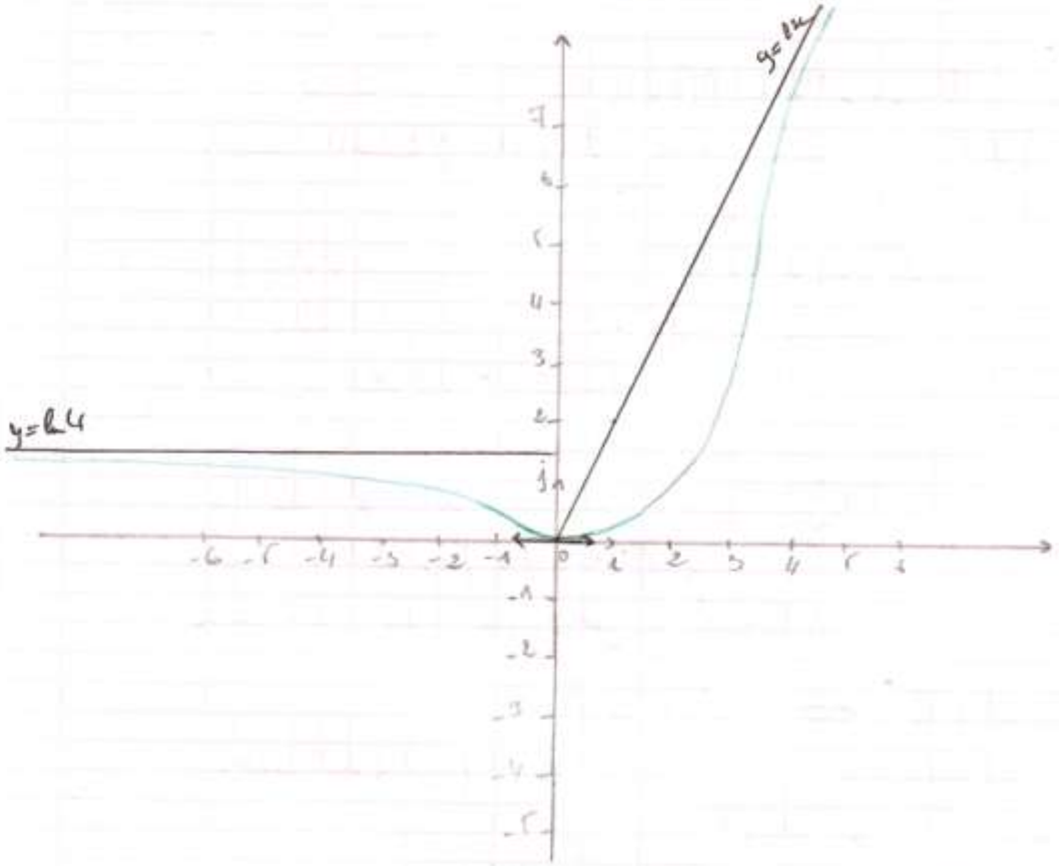
$2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq 2 \times \frac{1}{2} x$

إذن $f(x) \leq x$ $\forall x \in [0, \ln 4]$

ج) المنحنى :

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\ln 4$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



II) لدينا
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) لنبين أن $0 \leq u_n \leq \ln 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- من أجل $n=0$ لدينا $0 \leq u_0 = 1 \leq \ln 4$

- نفترض أن $0 \leq u_n \leq \ln 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- ولنبين أن $0 \leq u_{n+1} \leq \ln 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

لدينا، $f(0)=0$ و $f(\ln 4)=\ln 4$

ولدينا f دالة تزايدية قطعا على المجال $[0, +\infty[$.

ولدينا، $0 \leq U_n \leq \ln 4$

أي أن: $f(0) \leq f(U_n) \leq f(\ln 4)$

ومنه $0 \leq U_{n+1} \leq \ln 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

إذن: حسب البرهان بالترجع فإن $0 \leq U_n \leq \ln 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

② (U_n) متتالية تناقصية،

لدينا، $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$

وحسب السؤال (الجزء I 5 د) لدينا، $\forall x \in [0, \ln 4] \; f(x) \leq x$

أي: $\forall x \in [0, \ln 4] \; f(x) - x \leq 0$

إذن، $f(U_n) - U_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه، $U_{n+1} - U_n \leq 0$

إذن U_n متتالية تناقصية.

③ لدينا، U_n تناقصية ومصغورة بـ 0.

ولدينا، f دالة متصلة على المجال $[0, \ln 4]$

و $f([0, \ln 4]) = [0, \ln 4]$

ومنه فإن، نهاية U_n هي حل: $f(\ell) = \ell$

$$f(\ell) = \ell \iff f(\ell) - \ell = 0$$

وحسب السؤال (5،ب) لدينا، $f(x) - x = 0$

$x_1 = \ln 4$ و $x_2 = 0$

وبما أن U_n تناقصية ومصغورة بـ 0.

فإن، $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = 0$