المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
للجهة الشرقية
النيابة الإقليمية - وجدة -

جميع دروس الثانية باك آداب وعلوم انسانية مع تمارين وأمثلة وأنشطة محلولة

إعداد : نجيب عثماني

(أستاذ الثانوي تأهيلي الدرجة الممتازة)

السنة الدراسية : 2017/2016

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

مذكرة رقم 1 في درس المتتاليات الترجعية

مذكرة رقم : 1
الأستاذ : عثماني نجيب

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- المتتاليات من الشكل: $u_{n+1}=au_n+b$ وتمثيلها مبيانيا؛ - نهايات المتتاليات المرجعية: $(n)_{n\geq0}$ و $(n^2)_{n\geq0}$ و $(n^3)_{n\geq0}$ و $(\sqrt{n})_{n\geq0}$ و $(n^p)_{n\geq0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3؛ - نهايات المتتاليات المرجعية: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geq0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3؛ - نهاية متتالية هندسية (a^n) حيث $a\in\mathbb{R}$. - العمليات على النهايات؛	- استعمال المتتاليات الهندسية والمتتاليات الحسابية في دراسة أمثلة من متتاليات من الشكل: $u_{n+1}=au_n+b$؛ - استعمال نهايات المتتاليات المرجعية لتحديد نهايات متتاليات عددية؛	- نقبل أن المتتاليات $(n)_{n\geq0}$ و $(n^2)_{n\geq0}$ و $(n^3)_{n\geq0}$ و $(\sqrt{n})_{n\geq0}$ و $(n^p)_{n\geq0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3 تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول n إلى $+\infty$ وأن المتتاليات $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geq0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3، تؤول إلى 0 عندما يؤول n إلى $+\infty$ اعتبارا لكون المتتالية العددية دالة عددية معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية؛ - جميع النهايات الواردة في محتوى البرنامج تعتبر نهايات مرجعية؛ - تعتبر العمليات على النهايات المنتهية واللامنتهية مقبولة وينبغي تعويد التلاميذ على الاستعمال الصحيح لها؛ - إن أي دراسة نظرية لمفهوم نهاية متتالية تعتبر خارج البرنامج

I. المتتاليات الحسابية: تذكير

نشاط: لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

1) 0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ...

2) 6 , 3 , 0 , -3 , -6 , -9 , -12 , ...

3) 1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 , ...

4) $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \frac{1}{32}$, ...

5) 1, 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , ...

مثال 1 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n=2n-1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

- أحسب حدها الأول u_0
- أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$
- أحسب $u_{n+1}-u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

الجواب: $u_0=2\times0-1=0-1=-1$

$u_1=2\times1-1=2-1=1$

$u_2=2\times2-1=4-1=3$

$u_3=2\times3-1=6-1=5$

نلاحظ أن فرق حدين متتالين هو العدد 2

$u_{n+1}-u_n=(2(n+1)-1)-(2n-1)=(2n+2-1)-(2n-1)$

إذن: $=(2n+2-1)-(2n-1)=(2n+1)-(2n-1)=2n+1-2n+1$ $\quad u_{n+1}-u_n=2=r$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ هي حسابية أساسها : $r=2$

1. تعريف: نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r بحيث : $u_{n+1}=u_n+r \quad \forall n\geq n_0$

العدد الحقيقي r يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$

تمرين1 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n = 2n+3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب : $u_{n+1} - u_n$
2. ماذا تستنتج ؟

الجواب :

$$u_{n+1}-u_n = (2(n+1)+3)-(2n+3) = (2n+2+3)-(2n+3)$$
$$= (2n+2+3)-(2n+3) = (2n+5)-(2n+3) = 2n+5-2n-3$$

اذن : $u_{n+1} - u_n = 2 = r$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ هي حسابية أساسها : $r=2$

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0 فان : $u_n = u_0 + (n-0)r$

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_1 فان : $u_n = u_1 + (n-1)r$

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_2 فان : $u_n = u_2 + (n-2)r$

3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية

نضع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n$ حيث $n \succ p \ge n_0$

لدينا $S_n = (n-p+1)\left(\frac{u_n+u_p}{2}\right)$

المجموع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n$ يحتوي على $(n-p+1)$ حد

مثال :

1. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = 1$

أحسب المجموع التالي : $S_1 = u_3 + u_4 + u_5 + \cdots + u_{30}$

2. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ و حدها الأول $u_0 = 4$

أحسب المجموع التالي : $S_2 = u_7 + u_8 + u_9 + \cdots + u_{25}$

الجواب: 1) $S_1 = u_3 + u_4 + u_5 + \cdots + u_{30} = (30-3+1)\frac{u_3+u_{30}}{2}$

$$S_1 = (28)\frac{u_3+u_{30}}{2}$$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0 = 1$ فان : $u_n = u_0 + (n-0)r$

أي: $u_n = 1 + (n-0)\frac{1}{2}$ أي: $u_n = 1 + \frac{n}{2}$

ومنه نحسب: $u_3 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ و: $u_{30} = 1 + \frac{30}{2} = \frac{32}{2} = 16$

وبالتالي: $S_1 = (28)\frac{u_3+u_{30}}{2} = 14\left(\frac{5}{2}+16\right) = 14\left(\frac{37}{2}\right) = 7\times 37 = 259$

2) $S_2 = u_7 + u_8 + u_9 + \cdots + u_{25} = (25-7+1)\frac{u_7+u_{25}}{2} = (19)\frac{u_7+u_{25}}{2}$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ وحدها الأول $u_0 = 4$ فان : $u_n = u_0 + (n-0)r$

أي: $u_n = 4 + (n-0)(-2)$ أي: $u_n = 4 - 2n$

ومنه نحسب: $u_7 = 4 - 2\times 7 = 4 - 14 = -10$ و: $u_{25} = 4 - 2\times 25 = 4 - 50 = -46$

وبالتالي: $S_2 = (19)\frac{u_7+u_{25}}{2} = (19)\frac{-10+-46}{2} = (19)\frac{-56}{2} = 19\times -28 = -532$

تمرين2 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge 0}$ المعرفة بالصيغة التالية : $u_n = 3n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\ge 0}$ حسابية
2. أحسب المجموع : $S_6 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_6$

الجواب : 1)

$$u_{n+1} - u_n = (3(n+1)+1) - (3n+1) = (3n+3+1) - (3n+1) = 3$$

اذن : $u_{n+1}-u_n=3=r$ ومنه $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية

$S_6=u_1+u_2+\cdots+u_6=(6-1+1)\frac{u_1+u_6}{2}$ (2

$S_6=(6)\frac{u_1+u_6}{2}=3(u_1+u_6)$

وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها الأول $u_0=1$ فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=1+(n-0)3$ أي: $u_n=1+3n$

ومنه نحسب: $u_1=1+3\times 1=4$ و $u_6=1+3\times 6=19$

وبالتالي: $S_6=3(4+19)=3\times 23=69$

تمرين3: نعتبر متتالية حسابية $(u_n)_{n\geq 0}$ أساسها : $r=2$ وحدها الأول $u_0=3$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. أكتب u_n بدلالة n
3. أحسب المجموع : $S_6=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{10}$

الجواب : 1) $u_1=u_0+r=3+2=5$

$u_2=u_1+r=5+2=7$

$u_3=u_2+r=7+2=9$

2) وبما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول $u_0=3$ فان : $u_n=u_0+(n-0)r$

أي: $u_n=3+2(n-0)$ أي: $u_n=2n+3$

$S=u_0+u_1+\cdots+u_{10}=(10-0+1)\frac{u_0+u_{10}}{2}$ (3

$S_6=11\frac{u_0+u_{10}}{2}=\frac{11}{2}(3+u_{10})$

ومنه نحسب: $u_{10}=2\times 10+3=23$

وبالتالي: $S=\frac{11}{2}(3+23)=\frac{11}{2}\times 26=11\times 13=143$

II. المتتاليات الهندسية

1. تعريف: نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q بحيث : $u_{n+1}=qu_n \quad \forall n\geq n_0$

العدد الحقيقي q يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$

مثال : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n=2\times 3^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب حدها الأول u_0
2. أحسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ماذا تستنتج ؟

الجواب: 1)

$u_0=2\times 3^0=2\times 1=2$

2) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2\times 3^{n+1}}{2\times 3^n}=\frac{3^{n+1}}{3^n}=\frac{3^n\times 3^1}{3^n}=3^1=3=q$

اذن: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $u_0=2$

تمرين4 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n=3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

بين أن (u_n) متتالية هندسية و حدد أساسها و حدها الأول

الجواب: 1) $u_0=3\times\left(\frac{2}{5}\right)^0=3\times 1=3$

2) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n\times\left(\frac{2}{5}\right)^1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{2}{5}=q$ اذن: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ وحدها الأول $u_0=3$

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم وحدها الأول u_0 فان : $u_n = u_0 q^{n-0}$

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم وحدها الأول u_1 فان : $u_n = u_1 q^{n-1}$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم فان : $u_n = u_m q^{n-m}$ لكل $n \geq n_0$ و $m \geq n_0$

مثال: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول $u_0 = 81$ وأساسها : $q = \dfrac{1}{3}$

1. أكتب u_n بدلالة n
2. أحسب u_1 و u_2 و u_3
3. حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n = 1$

الأجوبة : 1) نعلم أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{3}$ وحدها الأول $u_0 = 81$

اذن: $u_n = u_0 q^{n-0}$ ومنه : $u_n = 81 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

2) $u_1 = 81 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^1 = \dfrac{81}{3} = 27$ و $u_2 = 81 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{81}{9} = 9$ و $u_3 = 81 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{81}{27} = 3$

3) $u_n = 1$ يعني $81 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1$ يعني $81 \times \dfrac{1}{3^n} = 1$ يعني $\dfrac{81}{3^n} = 1$ يعني $81 = 3^n$ يعني $n = 4$

تمرين5: نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) بحيث حدها الأول $u_0 = 5$ و $u_3 = 40$

1. تحقق أن أساس المتتالية (u_n) هو $q = 2$
2. أكتب u_n بدلالة n
3. أحسب u_4
4. حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث $u_n = 160$

الأجوبة : 1) نعلم أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية اذن :

اذن: $u_3 = u_0 q^{3-0}$ يعني : $40 = 5q^3$ يعني : $q^3 = \dfrac{40}{5}$ يعني : $q^3 = 8$ يعني : $q = 2$

2) $u_n = 5 \times (2)^n$

3) $u_1 = 81 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^1 = \dfrac{81}{3} = 27$ و $u_2 = 81 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{81}{9} = 9$ و $u_4 = 5 \times (2)^4 = 5 \times 16 = 80$

4) $u_1 = 81 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^1 = \dfrac{81}{3} = 27$ و $u_2 = 81 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{81}{9} = 9$ و $u_5 = 2 \times u_4 = 2 \times 80 = 160$

ومنه : $n = 5$

3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم نضع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

إذا كان $q \neq 1$ فان : $S_n = u_0 \left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

تمرين6: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة التالية : $u_{n+1} = 3 \times U_n$ و $u_0 = 2$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية
2. عبر عن U_n بدلالة n
3. أحسب المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_5$

الجواب: 1)

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3 \times u_n}{u_n} = 3 = q$

اذن: المتتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $u_0 = 3$

2) $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $u_0=3$

اذن: $u_n=u_0q^{n-0}$ أي: $u_n=3\times(3)^n=3^1\times(3)^n=(3)^{n+1}$

3) $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_5=u_1\times\dfrac{1-q^{5-1+1}}{1-q}=u_1\times\dfrac{1-q^5}{1-q}$

نحسب: u_1

$u_1=3^{1+1}=3^2=9$

$S_n=9\times\dfrac{1-3^5}{1-3}=9\times\dfrac{1-3^5}{-2}=9\times\dfrac{1-243}{-2}=9\times\dfrac{-242}{-2}=1029$

III. المتتاليات من صنف $U_{n+1}=aU_n+b$

مثال 1: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بالعلاقة الترجعية التالية : $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=2u_n+3\end{cases}$

أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)

الجواب : نعوض n ب 0 فنجد : $u_{0+1}=2\times u_0+3=2\times1+3=2+3=5$

اذن : $u_1=5$

نعوض n ب 1 فنجد : $u_{1+1}=2\times u_1+3=2\times5+3=10+3=13$

اذن : $u_2=13$

نعوض n ب 2 فنجد : $u_{2+1}=2\times u_2+3=2\times13+3=26+3=29$

اذن : $u_3=29$

ملاحظة : هذه المتتالية تسمى متتالية ترجعيه

مثال 2: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases}u_{n+1}=2u_n+2\\u_0=2\end{cases}\ \forall n\in\mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=u_n+2\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. أحسب $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n

الجواب: 1) نعوض n ب 0 فنجد : $u_{0+1}=2\times u_0+2=2\times2+3=4+3=7$

اذن : $u_1=7$

نعوض n ب 1 فنجد : $u_{1+1}=2\times u_1+2=2\times7+2=14+2=16$

اذن : $u_2=16$

: نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0+2=2+2=4$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1+2=7+2=9$

2) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{u_{n+1}+2}{u_n+2}=\dfrac{2u_n+2+2}{u_n+2}=\dfrac{2u_n+4}{u_n+2}=\dfrac{2(u_n+2)}{u_n+2}=2=q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول $v_0=4$

3) كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول $v_0=4$

فان: $v_n=v_0\times q^n$ أي: $v_n=4\times2^n$

4) استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=u_n+2$ اذن: $v_n-2=u_n$

أي: $u_n=4\times2^n-2$

تمرين7: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}\ \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} \\ u_0 = 3 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + 1$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n
4. أحسب بدلالة n المجموع : $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

الجواب:(1 نعوض nب0 فنجد: $u_{0+1} = \frac{1}{2}\times u_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times 3 - 3 = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$

اذن : $u_1 = -\frac{3}{2}$

نعوض n ب 1 فنجد : $u_{1+1} = \frac{1}{2}\times u_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2} - 3 = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4}$ اذن : $u_2 = -\frac{9}{4}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0 = u_0 + 1 = 3 + 1 = 4$.

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1 = u_1 + 1 = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$

(2 $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}+1}{u_n+1} = \frac{\frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} + 1}{u_n+1} = \frac{\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}}{u_n+1} = \frac{\frac{1}{2}(u_n+1)}{u_n+1} = \frac{1}{2} = q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 4$

(3 كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 4$

فان: $v_n = v_0 \times q^n$ أي: $v_n = 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n = u_n + 1$ اذن: $v_n - 1 = u_n$

أي: $u_n = 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$

(4 $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

$$S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n-0+1}}{1-q} = 3\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 3\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 6\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

تمرين8 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\forall n \in \mathbb{N}\ \begin{cases} u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - 1 \\ u_0 = -1 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = u_n - 2$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

الجواب:(1 نعوض nب0 فنجد:

$u_{0+1} = \frac{3}{2}\times u_0 - 1 = \frac{3}{2}\times(-1) - 1 = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{3}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{5}{2}$ اذن : $u_1 = -\frac{5}{2}$

نعوض n ب 1 فنجد :

اذن : $u_{1+1}=\frac{3}{2}\times u_1-1=\frac{3}{2}\times\left(-\frac{5}{2}\right)-1=-\frac{15}{4}-1=-\frac{15}{4}-\frac{4}{4}=-\frac{19}{4}$ $u_2=-\frac{15}{4}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0-2=-1-2=-3$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=-\frac{5}{2}-2=-\frac{5}{2}-\frac{4}{2}=-\frac{9}{2}$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-2}{u_n-2}=\frac{\frac{3}{2}u_n-1-2}{u_n-2}=\frac{\frac{3}{2}u_n-3}{u_n-2}=\frac{\frac{3}{2}u_n-\frac{6}{2}}{u_n-2}=\frac{\frac{3}{2}(u_n-2)}{u_n-2}=\frac{3}{2}=q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{2}$ وحدها الأول $v_0=4$

3) كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{2}$ وحدها الأول $v_0=-3$

فان: $v_n=(-3)\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=u_n-2$ اذن: $v_n+2=u_n$ أي: $u_n=-3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2$

تمرين9 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-3\\ u_0=2\end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=u_n+6$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

الجواب: 1)نعوض nب0 فنجد: $u_{0+1}=\frac{1}{2}\times u_0-3=\frac{1}{2}\times 2-3=1-3=-2$ اذن : $u_1=-2$

نعوض n ب 1 فنجد : $u_{1+1}=\frac{1}{2}\times u_1-3=\frac{1}{2}\times(-2)-3=-1-3=-4$ اذن : $u_2=-\frac{15}{4}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0+6=2+6=8$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1+6=-2+6=4$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}+6}{u_n+6}=\frac{\frac{1}{2}u_n-3+6}{u_n+6}=\frac{\frac{1}{2}u_n+3}{u_n+6}=\frac{\frac{1}{2}u_n+\frac{6}{2}}{u_n+6}=\frac{\frac{1}{2}(u_n+6)}{u_n+6}=\frac{1}{2}=q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=8$

3) كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=8$

فان: $v_n=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=u_n+6$ اذن: $v_n-6=u_n$ أي: $u_n=8\left(\frac{1}{2}\right)^n-6$

تمرين10 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}\ \begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \\ u_0 = 10 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 3$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

الجواب:1) نعوض n ب0 فنجد: $u_{0+1} = \frac{2}{3}\times u_0 + 1 = \frac{2}{3}\times 10 + 1 = \frac{20}{3} + 1 = \frac{20}{3} + \frac{3}{3} = \frac{23}{3}$ اذن : $u_1 = \frac{23}{3}$

نعوض n ب 1 فنجد : $u_{1+1} = \frac{2}{3}\times u_1 1 = \frac{2}{3}\times\frac{23}{3} + 1 = \frac{46}{9} + 1 = \frac{46}{9} + \frac{9}{9} = \frac{55}{9}$ اذن : $u_2 = \frac{55}{9}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0 = u_0 - 3 = 10 - 3 = 7$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1 = u_1 - 3 = \frac{23}{3} - 3 = \frac{23}{3} - \frac{9}{3} = \frac{14}{3}$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_n - 3} = \frac{\frac{2}{3}u_n + 1 - 3}{u_n - 3} = \frac{\frac{2}{3}u_n - 2}{u_n - 2} = \frac{\frac{2}{3}u_n - \frac{6}{2}}{u_n - 2} = \frac{\frac{2}{3}(u_n - 3)}{u_n - 2} = \frac{2}{3} = q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{3}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 7$

3) كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = 7$

فان: $v_n = 7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n = u_n - 3$ اذن: $v_n + 3 = u_n$ أي: $u_n = 7\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$

مذكرة رقم 2 في درس نهاية متتالية

مذكرة رقم : 2
الأستاذ : عثماني نجيب

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

توجيهات تربوية	القدرات المنتظرة	محتوى البرنامج
- نقبل أن المتتاليات $(n)_{n\geq0}$ و $(n^2)_{n\geq0}$ و $(n^3)_{n\geq0}$ و $(\sqrt{n})_{n\geq0}$ و $(n^p)_{n\geq0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3 تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول n إلى $+\infty$ وأن المتتاليات $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geq0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3، تؤول إلى 0 عندما يؤول n إلى $+\infty$ اعتبارا لكون المتتالية العددية دالة عددية معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية؛ - جميع النهايات الواردة في محتوى البرنامج تعتبر نهايات مرجعية؛ - تعتبر العمليات على النهايات المنتهية واللامنتهية مقبولة وينبغي تعويد التلاميذ على الاستعمال الصحيح لها؛ - إن أي دراسة نظرية لمفهوم نهاية متتالية تعتبر خارج البرنامج	- استعمال المتتاليات الهندسية والمتتاليات الحسابية في دراسة أمثلة من متتاليات من الشكل: $u_{n+1}=au_n+b$؛ - استعمال نهايات المتتاليات المرجعية لتحديد نهايات متتاليات عددية؛	- المتتاليات من الشكل: $u_{n+1}=au_n+b$ وتمثيلها مبيانيا؛ - نهايات المتتاليات المرجعية: $(n)_{n\geq0}$ و $(n^2)_{n\geq0}$ و $(n^3)_{n\geq0}$ و $(\sqrt{n})_{n\geq0}$ و $(n^p)_{n\geq0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3، - نهايات المتتاليات المرجعية: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq0}$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geq0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3؛ - نهاية متتالية هندسية (a^n) حيث $a\in\mathbb{R}$. - العمليات على النهايات؛

I. متتاليات مرجعية نهايتها $+\infty$

نشاط: أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} x$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^7$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 9x^2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{8}x^4$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^6$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 7\sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} -x$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} -4x^7$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} -6\sqrt{x}$

ولكون المتتالية العددية هي نوع من الدوال العددية معرفة على $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$ فإننا نحصل على نتائج مشابهة :

خاصية 1 :

المتتاليات المرجعية : (n) و (n^2) و (n^3) و $(\sqrt{n})$ و (n^p) حيث $p\in\mathbb{N}$ و $p\geq4$ تؤول الى $+\infty$ عندما تؤول n الى $+\infty$

ونكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$

خاصية 2:

إذا كانت (u_n) متتالية مرجعية نهايتها $+\infty$ فان المتتالية $(-u_n)$ تؤول الى $-\infty$

II. متتاليات مرجعية نهايتها 0

خاصية: المتتاليات المرجعية : $\left(\frac{1}{n}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

حيث $p\in\mathbb{N}$ و $p\geq4$ تؤول الى 0 عندما تؤول n الى $+\infty$

ونكتب: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}=0$

تمرين 1 : أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2}{n^3}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-6}{\sqrt{n}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8}{n^7}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^5$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{2}n^6$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^9$

أجوبة: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2}{n^3}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-6}{\sqrt{n}}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8}{n^7}=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^5=-\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{2}n^6=-\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^9=+\infty$

IV. متتاليات نهايتها عدد

مثال : أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+3$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-4}{n^3}-7$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{n}}+5$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}$

أجوبة: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+3=0+3=3$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-4}{n^3}-7=0-7=-7$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{n}}+5=0+5=5$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}=0$

ملاحظات :

- كل متتالية تكون نهايتها عددا حقيقيا تسمى متتالية متقاربة
- كل متتالية غير متقاربة تسمى متتالية متباعدة

V. نهاية المتتالية $\left(a^n\right)$

خاصية: ليكن a عددا حقيقيا

1. إذا كان : $a \succ 1$ فان : $\left(a^n\right)$ تؤول إلى $+\infty$
2. إذا كان : $a = 1$ فان : $\left(a^n\right)$ تؤول إلى 1
3. إذا كان : $-1 \prec a \prec 1$ فان : $\left(a^n\right)$ تؤول إلى 0
4. إذا كان : $a \le -1$ فان : المتتالية $\left(a^n\right)$ ليست لها نهاية

أمثلة : أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(-5)^n$

أجوبة: : $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ لأن: $a=2>1$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ لأن: $-1<a=\frac{2}{3}<1$

$(-5)^n$ ليست لها نهاية لأن: $a=-5<-1$

تمرين 2: أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,7)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(3)^n-\frac{1}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(4)^{-n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n}$,

أجوبة: : $\lim\limits_{n\to+\infty}(0.7)^n=0$ لأن: $-1<a=0.7<1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2}^n=+\infty$ لأن: $a=\sqrt{2}>1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(3)^n-\frac{1}{2^n}=+\infty-0=+\infty$

$(-2)^n$ ليست لها نهاية لأن: $a=-2<-1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(4)^{-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(4)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ لأن: $-1<a=\frac{1}{4}<1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n=+\infty$ لأن: $a=\frac{5}{4}>1$

VI. العمليات على النهايات

لتكن $\left(u_n\right)$ و $\left(v_n\right)$ متتاليتين عدديتين و l و l' أعدادا حقيقية نقبل أن العمليات على المتتاليات العددية هي نفسها على الدوال العددية

1. الجمع و الضرب

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	l'	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(u_n+v_n)$	$l+l'$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ش غ م

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞
$\lim v_n$	l'	$l \succ 0$	$l \prec 0$	$l \succ 0$	$l \prec 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim(u_n\times v_n)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞	ش غ م

2. المقلوب و الخارج:

$\lim u_n$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{u}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0

أمثلة : أحسب النهايات التالية : 1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{5}{n^2}-1$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ 3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5}$ 4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n}$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2-n$ 6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}-2n$

$\lim u_n$	l		$l\prec0$	$l\succ0$	$-\infty$	$l\prec0$	l	∞	0
$\lim v_n$	$l'\neq0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$l\prec0$	$-\infty$	∞	∞	0
$\lim\frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0^+	0^-	0^-	$+\infty$	0^+	0	ش غ م	ش غ م

أجوبة:1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{5}{n^2}-1=0-0+0-1=-1$ لأن: $-1<a=\frac{2}{3}<1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{n^2}=0$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=(-3+0)(1+0)=(-3)(1)=-3$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(4-\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(4-\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{4}{3}$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7}{n^2}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{n^2}=0$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2-n$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غيرمحدد من قبيل: $+\infty-\infty$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2-n=\lim\limits_{n\to+\infty}n(n-1)=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}n-1=+\infty$ و $+\infty\times+\infty=+\infty$ $-1<a=\frac{2}{3}<1$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(3)^n}{(2)^n}+\frac{(2)^n}{(2)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n+1=+\infty+1=+\infty$$

6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}-2n$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غيرمحدد من قبيل: $+\infty-\infty$

ملاحظة :

❖ نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

❖ نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

تمرين3 : أحسب النهايات التالية : 1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5+\frac{1}{n}}{3-\frac{7}{n^2}}$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}4n^3-5n^2+3n-1$ 3) $\lim\limits_{n\to+\infty}6n^3-2n^5+7n-9$ 4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{9n-3}{3n+5}$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6n^2-9}{3n+1}$ 6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^5+3n-4}$ 7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}$ 8) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^2-(n-1)^2$

أجوبة: 1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5+\frac{1}{n}}{3-\frac{7}{n^2}}=\frac{5}{3}$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7}{n^2}=0$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}4n^3-5n^2+3n-1=\lim\limits_{n\to+\infty}4n^3=+\infty$ لأن: نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}6n^3-2n^5+7n-9=\lim\limits_{n\to+\infty}-2n^5=\infty$ لأن: نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{9n-3}{3n+5}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{9n}{3n}=\frac{9}{3}=3$ لأن: نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6n^2-9}{3n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6n^2}{3n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3\times2\times n\times n}{3n}=\lim\limits_{n\to+\infty}2\times n=+\infty$ لأن: نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة

6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^5+3n-4}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^5}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\times n}{n\times n\times n\times n\times n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}=0$

7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7n^2}{14n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7n\times n}{14n\times n\times n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0$

8) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^2-(n-1)^2$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غيرمحدد من قبيل: $+\infty-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^2-(n-1)^2=\lim\limits_{n\to+\infty}n^2+2n+1-\left(n^2-2n+1\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}4n=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$

تمرين4 : محلول في دفتر الدروس :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1}=5u_n+8 \\ u_0=4 \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=u_n+2$

1. أحسب u_1 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : 5
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الجواب: 1) نعوض n ب0 فنجد: $u_{0+1}=5\times u_0+8=5\times 4+8=28$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0+2=4+2=6$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1+2=28+2=30$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}+2}{u_n+2}=\frac{5u_n+8+2}{u_n+2}=\frac{5u_n+10}{u_n+2}=\frac{5(u_n+2)}{u_n+2}=5=q$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=5$ وحدها الأول $v_0=6$

3) كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=5$ وحدها الأول v_0

فان: $v_n=v_0\times q^n$ أي: $v_n=6\times(5)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

4) لدينا: $v_n=u_n+2$ اذن: $v_n-2=u_n$ أي: $u_n=6\times(5)^n-2$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 6\times(5)^n=+\infty$: لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(5)^n=0$ $1<q=5$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 6\times(5)^n-2=+\infty$

تمرين5 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+2 \\ u_0=-1 \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=u_n-\frac{8}{3}$

1. أحسب u_1 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : $\frac{1}{4}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الأجوبة 1) نعوض n ب0 فنجد: $u_{0+1}=\frac{1}{4}\times u_0+2=\frac{1}{4}\times(-1)+2=-\frac{1}{4}+2=\frac{7}{4}$ اذن : $u_1=\frac{7}{4}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0-\frac{8}{3}=-1-\frac{8}{3}=-\frac{11}{3}$ و نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1-\frac{8}{3}=-\frac{11}{3}-\frac{8}{3}=-\frac{19}{3}$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-\frac{8}{3}}{u_n-\frac{8}{3}}=\frac{\frac{1}{4}u_n+2-\frac{8}{3}}{u_n-\frac{8}{3}}=\frac{\frac{1}{4}u_n-\frac{2}{3}}{u_n-\frac{8}{3}}=\frac{\frac{1}{4}\left(u_n-\frac{8}{3}\right)}{u_n-\frac{8}{3}}=\frac{1}{4}=q$ اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0=-\frac{11}{3}$

3) كتابة v_n بدلالة n :بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ وحدها الأول v_0 فان: $v_n=v_0\times q^n$ أي: $v_n=-\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$

4) استنتاج u_n بدلالة n لدينا: $v_n=u_n-\frac{8}{3}$ اذن: $v_n+\frac{8}{3}=u_n$ أي: $u_n=-\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{8}{3}$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ $-1<a=\frac{1}{4}<1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{11}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$

تمرين6 : نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)$ المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5 \\ u_0 = 4 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية العددية $\left(v_n\right)$ المعرفة كالتالي : $v_n = u_n - 10$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n
4. أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الجواب:1) نعوض nب0 فنجد: $u_{0+1} = \frac{1}{2}\times u_0 + 5 = \frac{1}{2}\times 4 + 5 = 2 + 5 = 7$ اذن : $u_1 = 7$

نعوض n ب 1 فنجد : $u_{1+1} = \frac{1}{2}\times u_1 + 5 = \frac{1}{2}\times 7 + 5 = \frac{7}{2} + \frac{10}{2} = \frac{17}{2}$ اذن : $u_2 = \frac{17}{2}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0 = u_0 - 10 = 4 - 10 = -6$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1 = u_1 - 10 = 7 - 10 = -3$

2) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 10}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}u_n + 5 - 10}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}u_n - 5}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}u_n - \frac{10}{2}}{u_n - 10} = \frac{\frac{1}{2}\left(u_n - 10\right)}{u_n - 10} = \frac{1}{2} = q$

اذن: المتتالية $\left(v_n\right)$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = -6$

3) كتابة v_n بدلالة n

بما أن المتتالية $\left(v_n\right)$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = -6$ فان: $v_n = \left(-6\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n : لدينا: $v_n = u_n - 10$ اذن: $v_n + 10 = u_n$ أي: $u_n = -6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ولأن $-1 < a = \frac{1}{2} < 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10 = 0 + 10 = 10$

مذكرة رقم : 3
الأستاذ : عثماني نجيب

مذكرة رقم 3 في درس الاحتمالات

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- التجارب العشوائية؛ - استقرار تردد حدث عشوائي؛ - احتمال حدث؛	- تصور المحاكاة *Simulation* المناسبة حسب التجربة العشوائية المعنية وتطبيقها؛ - حساب احتمال اتحاد حدثين؛	- ينبغي تجنب أي تقديم نظري لمفهوم الاحتمال؛ - من خلال إعادة تجربة عشوائية بسيطة عددا كبيرا من المرات (رمي قطعة نقدية، سحب كرة من كيس، ...) نتبين استقرار تردد حدث عشوائي ثم تقبل هذه النتيجة؛ ويمكن استعمال الملمس *rand* من الآلة الحاسبة العلمية أو الآلة الحاسبة العلمية القابلة للبرمجة أو البرائم المندمجة في الحاسوب لهذه الغاية؛
- احتمال حدثين غير منسجمين؛ - الحدث المضاد؛ - اتحاد و تقاطع حدثين؛ - فرضية تساوي الاحتمالات؛	- حساب احتمال تقاطع حدثين؛ - حساب احتمال الحدث المضاد لحدث؛ - استعمال النموذج التعدادي المناسب حسب الوضعية المدروسة؛	- ينبغي الانطلاق من وضعيات ملموسة ومتدرجة تجعل التلميذ يتدرب تدريجيا على وصف تجارب عشوائية باستعمال لغة الاحتمال؛ - يقدم احتمال حدث انطلاقا من استقرار تردد حدث عشوائي؛ - يعتبر الاحتمال الشرطي واستقلالية حدثين والمتغيرات العشوائية خارج المقرر - يعزز تقديم مفاهيم الاحتمالات بأمثلة متنوعة تغطي مختلف الحالات الممكنة؛ - يطبق الاحتمال في وضعيات متنوعة ذات الارتباط بمواد التخصص؛

I.تجربة عشوائية- مصطلحات:

نشاط1: نذكر أن لقطعة نقدية وجهين : P و F

نرمي قطعة نقدية غير مزيفة مرة واحدة

هذه التجربة لا يمكن توقع نتيجتها مسبقا وبشكل أكيد ومنه تسمى **تجربة عشوائية**
تجربة عشوائية: نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها مسبقا.

ماهي نتائج هذه التجربة العشوائية؟
يمكن الحصول على : P أو F

P هي امكانية و F هي امكانية أخرى

إمكانية: كل نتيجة لتجربة عشوائية تسمى إمكانية.

اذن لهذه التجربة إمكانيتين فقط اذن مجموعة الامكانيات هي : $\Omega=\{P;F\}$

كون الإمكانيات: مجموعة كل الإمكانيات لتجربة عشوائية تسمى كون الإمكانيات و نرمز لها بالرمز Ω, و تسمى أيضا الحدث الأكيد.

أوتسمى فضاء الإمكانيات والكتابة : $card\left(\Omega\right)=2$ (إمكانيتين فقط)تقرأ رئيسي المجموعة Ω

نشاط2: نرمي قطعة نقدية غير مزيفة مرتين متتاليتين

هذه التجربة لا يمكن توقع نتيجتها مسبقا وبشكل أكيد ومنه هي **تجربة عشوائية**
ماهي نتائج هذه التجربة العشوائية؟
يمكن الحصول على : PP أو FF أو FP أو PF

PP هي **امكانية** و FF هي امكانية أخرى

اذن لهذه التجربة 4 امكانيات فقط اذن مجموعة الامكانيات هي : $\Omega=\{PP;FF;PF;FP\}$

وهي فضاء الإمكانيات ولدينا : $card\left(\Omega\right)=4$ (4 امكانيات فقط)

يمكن لنا استعمال شجرة الإمكانيات للبحث عن كل الامكانيات

<u>تمرين1</u> : أو **نشاط3:** نرمي قطعة نقدية غير مزيفة ثلاث مرات متتالية

1)أرسم شجرة الامكانيات

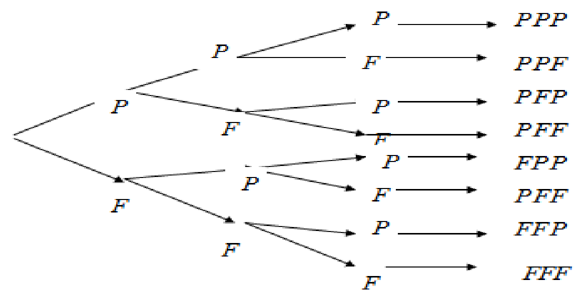
2)حدد كون الامكانيات Ω وحدد $card\left(\Omega\right)$

الأجوبة : هذه التجربة لا يمكن توقع نتيجتها مسبقا وبشكل أكيد ومنه هي **تجربة عشوائية**
ماهي نتائج هذه التجربة العشوائية؟

يمكن الحصول على : PPP أو FFF أو ......

PPP هي **امكانية** و FFF هي امكانية أخرى و ....

1)حدد كل الامكانيات و عددها :يمكن لنا استعمال **شجرة الإمكانيات**



2) اذن لهذه التجربة 8 امكانيات فقط اذن فضاء الامكانيات هو :

$\Omega=\{PPP;PPF;PFP;PFF;FPP;FPF;FFP;FFF\}$

3) $card(\Omega)=8$ (8 امكانيات فقط)

نشاط4: رمي نرد مكعب و وجوهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة هي تجربة عشوائية و كون الإمكانيات المرتبط بهذه التجربة هو:

$\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$

نعتبر : "الحصول على عدد زوجي" A يعني $A=\{2;4;6\}$

Aجزء من الكون Ω ويسمى حدثا

الحدث: كل مجموعة مكونة من إمكانية أو أكثر (أي كل جزء من الكون Ω).

" ظهور رقم فردي "B هو حدث آخر يعني: $B=\{1;3;5\}$

" ظهور رقم قابل للقسمة على 3 "C هو حدث آخر يعني: $C=\{3;6\}$

الحدث $A\cap B$ هو الحدث Aو B ويقرأ تقاطع الحدثين Aو B

$A\cap B=\varnothing$ **ونقول الحدثين** Aو B منفصلين أو غير منسجمين

$A\cap C=\{6\}$

الحدث الابتدائي: كل حدث يحتوي على إمكانية واحدة يسمى حدثا

مثال: $A\cap C=\{6\}$ حدث ابتدائي.

الحدث $A\cup B$ هو الحدث A أو B.ويقرأ اتحاد الحدثين Aو B

الحدث $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}=A\cup B$ هو الحدث الأكيد

$A\cup C=\{2;3;4;6\}$

نعتبر الحدث التالي: " عدم ظهور رقم قابل للقسمة على 3 "D

الحدث $D=\{1;2;4;5\}$ يسمى الحدث المضاد للحدث C ونكتب $D=\overline{C}$

II.استقرار تردد حدث_احتمال حدث:

مثال:رمينا نردا مكعبا (وجوهه الستة مرقمة من 1 الى 6) 1000 مرة و حصلنا على الترددات التالية:

الرقم	1	2	3	4	5	6
تردد الرقم	0,160	0,162	0,171	0,166	0,167	0,174

- تردد رقم 4 هو $\frac{166}{1000}=0,166$, أي أن النرد عين 166 مرة الرقم 4 خلال 1000 رمية.

لدينا: $\left(\frac{1}{6}\simeq 0,1666....\right)$ تردد الرقم 4 يستقر حول العدد $\frac{1}{6}$, نقول إن احتمال الحصول على الرقم 4 هو $\frac{1}{6}$.

و نكتب: $p(\{4\})=\frac{1}{6}$. (نلاحظ أن ترددات الأرقام الأخرى قريبة أيضا من العدد $\frac{1}{6}$).

- نعتبر الحدث A "الحصول على عدد زوجي" يعني: $A=\{2;4;6\}$, لدينا تردد الحدث A هو مجموع ترددات كل من الأرقام 2 و 4 و 6,

أي: $0,162+0,166+0,174=0,502$ نقول إن احتمال الحدث A هو $0,502$, و نكتب $P(A)=0,502$.

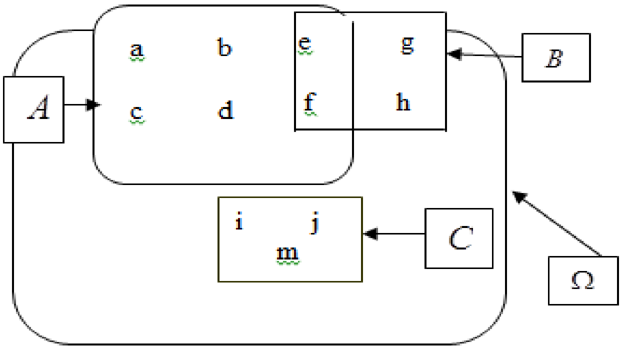
لدينا: $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=0,5$ و $P(A)\simeq 0,5$, و هو ما يفسر استقرار تردد الحدث A .

اذن : احتمال الحدث A نرمز له بالرمز $P(A)$.ولدينا الخاصيات التالية :

خاصية1: إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون إمكانيتها Ω , فان احتمال كل حدث A هو:

$$p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}$$

نشاط : الخطاطة جانبه تبين توزيع تلاميذ أحد الأقسام حسب الممارسة الرياضية :



الفئة A يمارسون كرة القدم

الفئة B يمارسون كرة اليد

الفئة C يمارسون كرة السلة

نختار عشوائيا احد التلاميذ من هذا القسم

1)أكتب A و B و C و Ω و $\overline{A}$ و $\overline{C}$ و $A\cap B$ و $A\cup B$ و $A\cap C$ و $A\cup C$ بالتفصيل

2)أحسب : $P(A)$ و $P(B)$ و $P(C)$ و $P(A\cap B)$ و $P(A\cup B)$ و $P(A\cap C)$ و $P(A\cup C)$ و $P(\overline{A})$ و $P(\overline{C})$

3)قارن: $1-p(A)$ و $p(\overline{A})$ و قارن $1-p(C)$ و $p(\overline{C})$

4)تحقق أن : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

5)تحقق أن : $P(A\cup C)=P(A)+P(C)$

الجواب:1) $A=\{a;b;c;d;e;f\}$ $B=\{e;f;g;h\}$ $C=\{i;j;m\}$ $\Omega=\{a;b;c;d;e;f;g;h;i;j;m\}$ $\overline{A}=\{g;h;i;j;m\}$

$\overline{C}=\{a;b;c;d;e;f;g;h\}$ $A\cap B=\{e;f\}$ $A\cup B=\{a;b;c;d;e;f;g;h\}$ $A\cap C=\varnothing$ $A\cup C=\{a;b;c;d;e;f;i;j;m\}$

2) $p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{6}{11}$ و $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{4}{11}$ و $p(C)=\frac{CardC}{Card\Omega}=\frac{3}{11}$ و $p(A\cap B)=\frac{Card(A\cap B)}{Card\Omega}=\frac{2}{11}$ و $p(A\cup B)=\frac{Card(A\cup B)}{Card\Omega}=\frac{8}{11}$

$p(A\cap C)=\frac{Card(A\cap C)}{Card\Omega}=\frac{0}{11}=0$ و $p(A\cup C)=\frac{Card(A\cup C)}{Card\Omega}=\frac{9}{11}$ و $p(\overline{A})=\frac{Card\overline{A}}{Card\Omega}=\frac{5}{11}$ و $p(\overline{C})=\frac{Card\overline{C}}{Card\Omega}=\frac{8}{11}$

3) $1-p(A)=1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}=p(\overline{A})$ و $1-p(C)=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}=p(\overline{C})$

4) $P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{6}{11}+\frac{4}{11}-\frac{2}{11}=\frac{8}{11}=P(A\cup B)$

5) $P(A)+P(C)=\frac{6}{11}+\frac{3}{11}=\frac{9}{11}=P(A\cup C)$

خاصية:ليكن Ω كون إمكانية تجربة عشوائية,

$p(\Omega)=1$ $\quad$ $p(\phi)=0$ $\quad$ لكل حدث A, $0\le p(A)\le 1$ $\quad$ ولكل حدث A لدينا $p(\overline{A})=1-p(A)$

لكل حدثين غير منسجمين A و B (أي $A\cap B=\phi$) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

لكل حدثين A و B لدينا $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.

تمرين2: A و B حدثان مرتبطان بنفس التجربة العشوائية بحيث:

$p(A)=0,7$ و $p(B)=0,4$ و $p(A\cap B)=0,3$.

أحسب: $p(\overline{A})$ و $p(\overline{B})$ و $p(A\cup B)$

الجواب: $p(\overline{A})=1-p(A)=1-0.7=0.3$ و $p(\overline{B})=1-p(B)=1-0.4=0.6$ و $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$ $=0.7+0.4-0.3=0.8$

III.فرضية تساوي الاحتمالات وأنواع السحب:

مثال1: يحتوي صندوق غير كاشف على 5 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كرتين حمراوين

نسحب عشوائيا من الصندوق كرة واحدة

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرة بيضاء "B و " سحب كرة سوداء " N و " سحب كرة حمراء "R و " عدم سحب كرة سوداء "D

الجواب:1) $card\left(\Omega\right)=10$ و هو ببساطة عدد الكرات في الصندوق

2) $p\left(B\right)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ $p\left(N\right)=\frac{CardN}{Card\Omega}=\frac{3}{10}$ و $p\left(R\right)=\frac{CardR}{Card\Omega}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

D هو الحدث المضاد للحدث N أي $D=\overline{N}$ **ومنه** $p\left(D\right)=p\left(\overline{N}\right)=1-p\left(N\right)=1-0.3=0.7$

تمرين3: يحتوي صندوق غير كاشف على أقراص مرقمة :

قرصان منهم يحملان الرقم 1 و ثلاث أقراص منهم يحملون الرقم 2 و سبعة أقراص تحمل الرقم 4

نسحب عشوائيا من الصندوق قرصا واحدا

1. حدد $card\left(\Omega\right)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب قرص يحمل الرقم 1 "A " سحب قرص يحمل الرقم 3 " B " سحب قرص يحمل رقم زوجي "C

" سحب رقم أصغر من أو يساوي 2 "D " سحب قرص لا يحمل الرقم 1 "E

الجواب:1) $card\left(\Omega\right)=12$ و هو ببساطة عدد الكرات في الصندوق

2) $p\left(B\right)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{0}{12}=0$ $p\left(A\right)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ $p\left(C\right)=\frac{CardC}{Card\Omega}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$ $p\left(D\right)=\frac{CardD}{Card\Omega}=\frac{5}{12}$

E هو الحدث المضاد للحدث A أي $E=\overline{A}$ **ومنه** $p\left(E\right)=p\left(\overline{A}\right)=1-p\left(A\right)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

تمرين4 :

1. أحسب : $4!$ و $5!$ و $7!$

2. أحسب : C_4^2 و C_5^2 و C_7^4 و C_{12}^3

3. أحسب : A_4^2 و A_5^3 و A_7^4

4. أحسب و بسط : $\frac{10!\times5!}{6!\times8!}$ و $\frac{A_6^3\times A_{10}^4}{A_{10}^5}$

الجواب:1)

$4!=4\times3\times2\times1=24$ و $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

$7!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$

2) $C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\times3\times2!}{2!2!}=\frac{4\times3}{2!}=6$ $C_5^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times4\times3!}{2!3!}=\frac{5\times4}{2!}=10$

$C_7^4=\frac{7!}{4!(7-4)!}=\frac{7!}{4!3!}=\frac{7\times6\times5\times4!}{4!3!}=\frac{7\times6\times5}{3!}=35$ $C_{12}^3=\frac{12!}{3!(12-3)!}=\frac{12!}{9!3!}=\frac{12\times11\times10\times9!}{9!3!}=\frac{12\times11\times10}{3!}=220$

(3 $A_5^3=5\times4\times3=60$ $A_4^2=4\times3=12$ $A_7^4=7\times6\times5\times4=840$

4) $\frac{10!\times5!}{6!\times8!}=\frac{10\times9\times8!\times5!}{6\times5!\times8!}=\frac{10\times9}{6}=\frac{10\times3\times3}{3\times2}=\frac{10\times3}{2}=15$ و $\frac{A_6^3\times A_{10}^4}{A_{10}^5}=\frac{6\times5\times4\times10\times9\times8\times7}{10\times9\times8\times7\times6}=\frac{5\times4}{1}=20$

مثال2: السحب تآنيا- التأليفات

يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 5 كرات حمراء

نسحب عشوائيا كرتين من الصندوق في آن واحد

1. حدد $card\left(\Omega\right)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين "B " سحب كرتين حمراوين "R " سحب كرتين من نفس اللون "M

" سحب كرتين من لون مختلف "D

الأجوبة:1) $card\left(\Omega\right)=C_8^2=\frac{8!}{2!(8-2)!}=\frac{8!}{2!6!}=\frac{8\times7\times6!}{2!6!}=\frac{8\times7}{2!}=28$

$$C_5^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times4\times3!}{2!3!}=\frac{5\times4}{2!}=10 \qquad p(R)=\frac{CardR}{Card\Omega}==\frac{C_5^2}{28}=\frac{10}{28} \qquad p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{C_3^2}{28}=\frac{3}{28}\ (2$$

سحب كرتين من نفس اللون أي سحب كرتين بيضاوين أو كرتين حمراوين $p(M)=\frac{CardM}{Card\Omega}==\frac{C_3^2+C_5^2}{28}=\frac{3+10}{28}=\frac{13}{28}$

D هو الحدث المضاد للحدث M أي $D=\overline{M}$ **ومنه** $p(D)=p(\overline{M})=1-p(M)=1-\frac{13}{28}=\frac{15}{28}$

تمرين5 : يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 5 كرات حمراء و 3 كرات سوداء

نسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق <u>في آن واحد</u>

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب ثلاث كرات بيضاء "B " سحب ثلاث كرات سوداء " N " سحب ثلاث كرات حمراء "R

" سحب ثلاث كرات من لون مختلف "D " سحب ثلاث كرات من نفس اللون "M

الجواب:1) $card(\Omega)=C_{12}^3$ ومنه $C_{12}^3=\frac{12!}{3!(12-3)!}=\frac{12!}{3!9!}=\frac{12\times11\times10\times9!}{3!9!}=\frac{12\times11\times10}{3!}=\frac{6\times2\times11\times10}{6}=220$

$$p(R)=\frac{CardR}{Card\Omega}==\frac{C_5^3}{28}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14} \qquad p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}==\frac{C_3^3}{28}=\frac{1}{28} \qquad p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{C_4^3}{28}=\frac{4}{28}=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}\ (2$$

$$C_5^3=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times4\times3!}{2!3!}=\frac{5\times4}{2!}=10$$

سحب 3 كرات من لون مختلف يعني سحب كرة واحدة حمراء وواحدة سوداء كرة واحدة بيضاء

$$p(D)=\frac{CardD}{Card\Omega}==\frac{C_3^1\times C_4^1\times C_5^1}{28}=\frac{3\times4\times5}{220}=\frac{15}{55}=\frac{3}{11}$$

M هو الحدث المضاد للحدث D أي $M=\overline{D}$ **ومنه** $p(M)=p(\overline{D})=1-p(D)=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{28}=\frac{2}{7}$

تمرين6 : يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء و 3 كرات سوداء

نسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق <u>في آن واحد</u>

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب ثلاث كرات بيضاء "B " سحب ثلاث كرات حمراء "R " سحب ثلاث كرات من لون مختلف "D

" سحب ثلاث كرات من نفس اللون "M " سحب كرة واحدة سوداء فقط "E " سحب كرتين حمراوين فقط "F

" سحب كرة بيضاء على الأقل "G

الأجوبة1) $card(\Omega)=C_{10}^3$

$$C_{10}^3=\frac{10!}{3!(10-3)!}=\frac{10!}{3!7!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{3!7!}=\frac{10\times9\times8}{6}=\frac{5\times2\times3\times3\times8}{6}=120$$

(2 $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{C_3^3}{120}=\frac{1}{120}$ لأننا نعلم ن : $C_n^n=1$

$p(R)=\frac{CardR}{Card\Omega}==\frac{C_4^3}{120}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$ لأننا نعلم ن : $C_n^{n-1}=n$

سحب 3 كرات من لون مختلف يعني سحب كرة واحدة حمراء ورة واحدة سوداء واحدة بيضاء

$$p(D)=\frac{CardD}{Card\Omega}==\frac{C_3^1\times C_4^1\times C_3^1}{120}=\frac{3\times4\times4}{120}=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$$

M هو الحدث المضاد للحدث D أي $M=\overline{D}$ **ومنه** $p(M)=p(\overline{D})=1-p(D)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

سحب كرة واحدة سوداء فقط يعني كرة واحدة سوداء وكرتين غير سوداوين يعني مسحوبة من بين الألوان الأخرى

$$p(E)=\frac{CardE}{Card\Omega}==\frac{C_3^1\times C_7^2}{120}=\frac{3\times C_7^2}{120}$$

نحسب C_7^2 $C_7^2=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7!}{2!5!}=\frac{7\times6\times5!}{2!5!}=\frac{7\times6}{2!}=21$ **ومنه** $p(E)=\frac{3\times21}{120}=\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$

سحب كرتين حمراوين فقط يعني سحب كرتين حمراوين وكرة ثالثة من بين الألوان الأخرى

$p(F)=\frac{CardF}{Card\,\Omega}==\frac{C_6^1\times C_4^2}{120}=\frac{6\times C_4^2}{120}=\frac{6\times6}{120}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$ **لأن :** $C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\times3\times2!}{2!2!}=\frac{4\times3}{2!}=6$

الحدث المضاد للحدث " سحب كرة بيضاء على الأقل "G

هو : " عدم سحب أي كرة بيضاء " $\overline{G}$ يعني سحب كرة من بين الألوان المتبقية

نحسب احتمال الحدث $\overline{G}$ اذن : $p(\overline{G})=\frac{C_7^3}{120}$ ونحسب C_7^3

$C_7^3=\frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{7!}{3!4!}=\frac{7\times6\times5\times4!}{3!4!}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$ ومنه : $p(\overline{G})=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$

ونعلم: $p(G)+p(\overline{G})=1$ يعني : $p(G)=1-p(\overline{G})=1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$

تمرين7 : يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرتين سوداوين مرقمتين 1 و 2

و يحتوي أيضا على 5 كرات صفراء مرقمة 1 و 2 و3 و4و5

1) نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق

أحسب احتمال الحدثين التاليين :

" سحب كرة صفراء "A سحب كرة تحمل رقما فرديا " B

2)نسحب عشوائيا كرتين من الصندوق <u>في آن واحد</u>

1. حدد $card\left(\Omega_2\right)$ حيث Ω_2 هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين صفراوين "C " سحب كرتين من نفس اللون " M " الحصول على رقمين زوجيين "E

" سحب كرتين مختلفتين اللون "D

الأجوبة:1) $card\left(\Omega\right)=7$ و هو ببساطة عدد الكرات في الصندوق

(1 $p(B)=\frac{CardB}{Card\,\Omega}=\frac{4}{7}$ $p(A)=\frac{CardA}{Card\,\Omega}=\frac{5}{7}$

(2 $card\,\Omega_2=C_7^2=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7!}{2!5!}=\frac{7\times6\times5!}{2!5!}=21$ **ومنه** $p(C)=\frac{CardC}{Card\,\Omega_2}==\frac{C_5^2}{21}=\frac{10}{21}$

لأن $C_5^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times4\times3!}{2!3!}=\frac{5\times4}{2!}=10$

$p(M)=\frac{CardM}{Card\,\Omega_2}=\frac{C_2^2+C_5^2}{21}=\frac{1+10}{21}=\frac{11}{21}$ $p(E)=\frac{CardE}{Card\,\Omega_2}=\frac{C_3^2}{21}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$

سحب 3 كرات من لون مختلف يعني سحب كرة واحدة حمراء وواحدة سوداء كرة واحدة بيضاء

$$p(D)=\frac{CardD}{Card\Omega}==\frac{C_3^1\times C_4^1\times C_5^1}{28}=\frac{3\times4\times5}{220}=\frac{15}{55}=\frac{3}{11}$$

M وD هما حدثين متضادين اذن : $p(D)+p(M)=1$ **ومنه** $p(D)=1-p(M)=1-\frac{11}{21}=\frac{21}{21}-\frac{11}{21}=\frac{10}{21}$

مثال3:السحب بدون إحلال- الترتيبات بدون تكرار

يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق :

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين "B   " سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين من نفس اللون "M   " سحب كرتين من لون مختلف "D

الجواب:(1 $card(\Omega)=A_7^2=7\times6=42$

(2 $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{A_3^2}{42}=\frac{3\times2}{7\times6}=\frac{1}{7}$ $p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}==\frac{A_4^2}{42}=\frac{4\times3}{7\times6}=\frac{2\times2\times3}{7\times6}=\frac{2}{7}$

$p(M)=\frac{CardM}{Card\Omega}=\frac{A_4^2+A_3^2}{42}=\frac{4\times3+3\times2}{7\times6}=\frac{18}{7\times6}=\frac{3\times6}{7\times6}=\frac{3}{7}$

D هو الحدث المضاد للحدث M أي $D=\overline{M}$ **ومنه** $p(D)=p(\overline{M})=1-p(M)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

تمرين8:يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب ثلاث كرات بيضاء "B   " سحب ثلاث كرات سوداء" N

" سحب ثلاث كرات من نفس اللون "M   " سحب ثلاث كرات من لون مختلف "D

الجواب:(1 $card(\Omega)=A_9^3=9\times8\times7=504$

(2 $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{A_4^3}{504}=\frac{4\times3\times2}{9\times8\times7}=\frac{4\times3\times2}{3\times3\times8\times7}=\frac{1}{3\times7}=\frac{1}{21}$ $p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}==\frac{A_5^3}{42}=\frac{5\times4\times3}{9\times8\times7}=\frac{5\times4\times3}{3\times3\times4\times2\times7}=\frac{5}{3\times2\times7}=\frac{5}{42}$

$p(M)=\frac{CardM}{Card\Omega}=\frac{A_4^3+A_5^3}{504}=\frac{4\times3\times2+5\times4\times3}{504}=\frac{24+60}{504}=\frac{84}{504}=\frac{1}{6}$

D هو الحدث المضاد للحدث M أي $D=\overline{M}$ **ومنه** $p(D)=p(\overline{M})=1-p(M)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

مثال4 :السحب بإحلال- الترتيبات بتكرار:

يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبإحلال كرتين من الصندوق :

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين "B   " سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين من نفس اللون "M   " سحب كرتين من لون مختلف "D

الجواب:(1

$card(\Omega)==7\times7=7^2=49$

(2 $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{3\times3}{49}=\frac{9}{49}$ $p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}==\frac{4\times4}{7\times7}=\frac{16}{49}$ $p(M)=\frac{CardM}{Card\Omega}=\frac{3\times3+4\times4}{7\times7}=\frac{25}{49}$

D هو الحدث المضاد للحدث M أي $D=\overline{M}$ **ومنه** $p(D)=p(\overline{M})=1-p(M)=1-\frac{25}{49}=\frac{24}{49}$

تمرين9:السحب بإحلال- الترتيبات بتكرار:

يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبإحلال كرتين من الصندوق :

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات
2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين "B   " سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين من نفس اللون "M   " سحب كرتين من لون مختلف "D

الجواب:(1

(1 $card(\Omega)==9\times9=9^2=81$

(2 $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{4\times4}{81}=\frac{16}{81}$ $p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}==\frac{5\times5}{81}=\frac{25}{81}$ $p(M)=\frac{CardM}{Card\Omega}=\frac{4\times4+5\times5}{81}=\frac{16+25}{81}=\frac{41}{81}$

D هو الحدث المضاد للحدث M أي $D=\overline{M}$ **ومنه** $p(D)=p(\overline{M})=1-p(M)=1-\frac{41}{81}=\frac{40}{81}$

مذكرة رقم : 4
الأستاذ : عثماني نجيب

مذكرة رقم 4 في درس الاشتقاق ودراسة الدوال

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- مراجعة ما سبقت دراسته في السنة الأولى: استعمال الدالة المشتقة لدراسة دالة عددية في حالة الدوال الحدودية من الدرجة الثانية والثالثة والدوال المتخاطة؛ - دراسة الدالة $x \to \sqrt{ax+b}$.	- التمكن من مشتقات الدوال الاعتيادية؛ - تحديد رتابة دالة انطلاقا من إشارة مشتقتها؛ - تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني؛ - الحل المبياني لمعادلات من الشكل $f(x)=\lambda$ ومتراجحات من الشكل $f(x)\le\lambda$ حيث f دالة اعتيادية.	- يتم التذكير بمفهوم الاشتقاق وتطبيقاته من خلال أنشطة متنوعة تبرز الأهمية التي يكتسبها في الدراسة الموضعية والشاملة للدوال المقررة وخاصة في التقريب المحلي لدالة وفي تحديد بعض المطاريف؛ - من خلال دراسة أمثلة لدوال حدودية ودوال جذرية تتم صيانة مكتسبات التلاميذ حول الاشتقاق وحساب النهايات وعناصر تماثل منحنى دالة وحل بعض المعادلات والمتراجحات مبيانيا؛ - دراسة إشارة $f'(x)$ لا ينبغي أن تطرح أية صعوبة للتلاميذ.

I. اشتقاق دالة في نقطة:

تعريف: نقول ان دالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 إذا وجد عدد حقيقي ℓ بحيث $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$ والعدد ℓ يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0. و نكتب $\ell=f'(x_0)$

ملاحظة: إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فان معادلة مماس المنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها x_0 هي:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0=1$.

الجواب:1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$=\lim\limits_{x\to 1}2(x+1)=2(1+1)=4=f'(1)\in\mathbb{R}$ اذن : الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$.

2) $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ و $f'(1)=4$ و $f(1)=2$ اذن :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=4(x-1)+2=4x-4+2$ ومنه $y=4x-2$ و هي معادلة المماس

تمرين1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=3x^2$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0=2$.

الجواب:1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x^2-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$=\lim\limits_{x\to 2}3(x+2)=3(2+2)=12=f'(2)\in\mathbb{R}$ اذن : الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$.

2) $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ و $f'(2)=12$ و $f(2)=12$ اذن :

$y=f'(2)(x-2)+f(2)=12(x-2)+12=12x-24+12$

$y=12x-12$ و هي معادلة المماس

II. الدالة المشتقة:

مشتقات الدوال الاعتيادية:

المجال	$f'(x)$	$f(x)$
$\mathbb{R}$	0	k
$\mathbb{R}$	a	ax
$\mathbb{R}$	$2x$	x^2
$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$x^n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$
$]-\infty,0[$ أو $]0,+\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$

أمثلة: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=2$ 2) $f(x)=3x-5$ 3) $f(x)=x^{10}$

الأجوبة :

1) $f'(x)=(2)'=0$ 2) $f'(x)=(3x-5)'=3$

3) $f'(x)=\left(x^{10}\right)'=10x^{10-1}=10x^9$

العمليات على الدوال المشتقة:

الشرط	مشتقتها	الدالة
	$u'+v'$	$u+v$
	$k\cdot u'$	$k\cdot u$
	$u'v+uv'$	$u\cdot v$
u لا تنعدم في I	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u}$
v لا تنعدم في I	$\frac{u'v+uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$
	$nu^{n-1}u'$	$u^n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

مثال1: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=2x^8$ 2) $f(x)=5x^4-1$

الأجوبة: 1) $f'(x)=\left(2x^8\right)'=2\times\left(x^8\right)'=2\times 8x^{8-1}=16x^7$ 2) $f'(x)=\left(5x^4-1\right)'=5\times\left(x^4\right)'-(1)'=5\times 4x^{4-1}-0=20x^3$

تمرين2: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=3x^7$ 2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-1$ 3) $f(x)=3x^3-4x^2+6$ 4) $f(x)=2x^5-3x^4-6x+1$

تمرين3: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=3x^3-\frac{1}{2}x^2-1$ 2) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6$ 3) $f(x)=2x^5-4x^2+7$

مثال2: حدد الدالة المشتقة للدالة f : $f(x)=(3x+5)\times(2x+6)$

الحل: $f'(x)=\left((3x+5)\times(2x+6)\right)'=\left((3x+5)\right)'\times(2x+6)+(3x+5)\times(2x+6)'$

$f'(x)=\left((3x+5)\times(2x+6)\right)'=3\times(2x+6)+(3x+5)\times 2$

$f'(x)=6x+18+6x+10=12x+28$

تمرين 4 : حدد الدالة المشتقة للدالة f : $f(x)=x^2\times(2x-1)$

الحل: $f'(x)=\left(x^2\times(2x-1)\right)'=\left(x^2\right)'\times(2x-1)+x^2\times(2x-1)'$

$f'(x)=2x\times(2x-1)+x^2\times 2=4x^2-2x+2x^2=6x^2-2x$

مثال3: حدد الدالة المشتقة للدالة f : $f(x)=\frac{1}{2x+1}$

الحل: $f'(x)=\left(\frac{1}{2x+1}\right)'=-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}=-\frac{2}{(2x+1)^2}$

تمرين5: حدد الدالة المشتقة للدالة f : $f(x)=\frac{1}{4x-3}$

الحل: $f'(x)=\left(\frac{1}{4x-3}\right)'=-\frac{(4x-3)'}{(4x-3)^2}=-\frac{4}{(4x-3)^2}$

مثال4: حدد الدالة المشتقة للدالة f : $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$

الحل: ($f'(x)=\left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right)'=\dfrac{(2x+3)'\times(x+1)-(2x+3)\times(x+1)'}{(x+1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{2\times(x+1)-(2x+3)\times1}{(x+1)^2}=\dfrac{2x+2-2x-3}{(x+1)^2}=\dfrac{-1}{(x+1)^2}$

تمرين6: حدد الدالة المشتقة للدالة f : $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+5}$

الحل: ($f'(x)=\left(\dfrac{3x-1}{2x+5}\right)'=\dfrac{(3x-1)'\times(2x+5)-(3x-1)\times(2x+5)'}{(2x+5)^2}$

$f'(x)=\dfrac{3\times(2x+5)-(3x-1)\times2}{(2x+5)^2}=\dfrac{6x+15-6x+2}{(2x+5)^2}=\dfrac{17}{(2x+5)^2}$

مثال5: حدد الدالة المشتقة للدالة f : $f(x)=(4x+3)^3$

الحل: $f'(x)=\left((4x+3)^3\right)'=3(4x+3)^2\times(4x+3)'=3(4x+3)^2\times4=12(4x+3)^2$

تمرين 7: (1 $f(x)=3x^3-\frac{1}{2}x^2-1$ (2 $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6$

(3 $f(x)=x^2\times(2x-1)$ (4 $f(x)=\dfrac{1}{5x-4}$ (5 $f(x)=\dfrac{4x-2}{2x+1}$

(6 $f(x)=(2x-1)^7$

الحل: (1 $f'(x)=\left(3x^3-\frac{1}{2}x^2-1\right)'=9x^2-x$ (2 $f(x)=x^4-x^3-4$ (3 $f'(x)=\left(x^2\times(2x-1)\right)'=\left(x^2\right)'\times(2x-1)+x^2\times(2x-1)'$

$f'(x)=2x\times(2x-1)+x^2\times2=4x^2-2x+2x^2=6x^2-2x$

(4 $f'(x)=\left(\dfrac{1}{5x-4}\right)'=-\dfrac{(5x-4)'}{(5x-4)^2}=-\dfrac{5}{(5x-4)^2}$ (5 $f'(x)=\left(\dfrac{4x-2}{2x+1}\right)'=\dfrac{(4x-2)'\times(2x+1)-(4x-2)\times(2x+1)'}{(2x+1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{4\times(2x+1)-(4x-2)\times2}{(2x+1)^2}=\dfrac{(8x+4)-(8x-4)}{(2x+1)^2}=\dfrac{8}{(2x+1)^2}$

(6 $f'(x)=\left((2x-1)^7\right)'=7(2x-1)^6\times(2x-1)'=7(2x-1)^6\times2=14(2x-1)^6$

III. رتابة دالة و إشارة مشتقتها:

خاصية: I مجال من $\mathbb{R}$ و f دالة قابلة للاشتقاق على I.

- f ثابتة على I $\Leftrightarrow f'(x)=0$ لكل x من I.
- f تزايدية على I $\Leftrightarrow f'(x)\geq0$ لكل x من I.
- f تناقصية على I $\Leftrightarrow f'(x)\leq0$ لكل x من I.

مثال 1 : لتكن f دالة عددية معرفة ب: $f(x)=5x^3$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. أحسب الدالة المشتقة و استنتج رتابة الدالة f

الحل:

1)الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$ (2 $f'(x)=\left(5x^3\right)'=5\left(x^3\right)'=5\times3x^2=15x^2\geq0$ ومنه الدالة f تزايدية على $D_f=\mathbb{R}$

مثال 2 : دراسة دالة حدودية:

f دالة عددية معرفة ب: $f(x)=x^3-3x^2+4$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$
3. أحسب الدالة المشتقة ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.
4. أنشئ منحنى الدالة f.

الحل:

1. الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

.3 $f'(x)=(x^3-3x^2+4)'=(x^3)'-(3x^2)'+(4)'$

$f'(x)=3x^2-3\times 2x^1+0=3x^2-6x=3x(x-2)$

$3x(x-2)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0$

$\Leftrightarrow 3x=0$ أو $x-2=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $x=2$

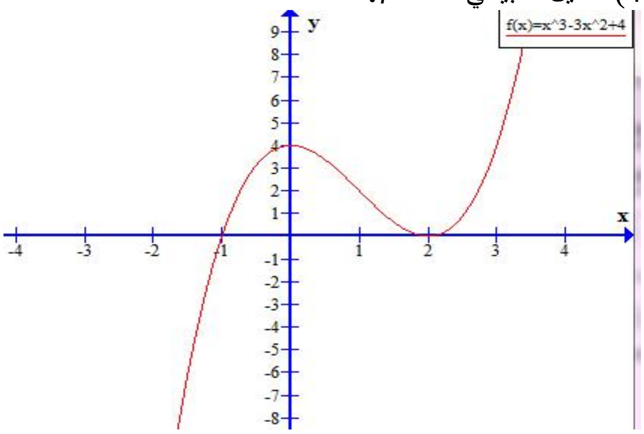
جدول إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4)التمثيل المبياني للدالة f.



تمرين8 : دراسة دالة حدودية:

f دالة عددية معرفة ب : $f(x)=x^3+3x^2-1$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. أحسب النهايات التالية: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
3. أحسب الدالة المشتقة ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.
4. أنشئ منحنى الدالة f.

الحل:

1. الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

.2 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

.3 $f'(x)=(x^3+3x^2-1)'=(x^3)'+(3x^2)'-(1)'$

$f'(x)=3x^2+3\times 2x^1+0=3x^2+6x=3x(x+2)$

$3x(x+2)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0$

$\Leftrightarrow 3x=0$ أو $x+2=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $x=-2$

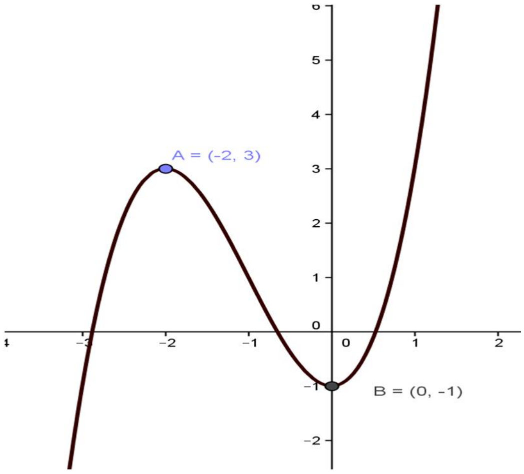
جدول إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$3x$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$3x(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

التمثيل المبياني للدالة f.



مثال 3 : دراسة دالة متخاطة: نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة g.
2. أحسب نهايات الدالة g في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
3. أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g.
4. املأ الجدول التالي :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$							

5. أنشئ منحنى الدالة g.

الحل:

1. حيز تعريف الدالة g هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{1\}$

و منه $D=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x+1}{x-1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x+1}{x-1}=-\infty$

يعني المستقيم ذا العادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى.

3. لكل x من D لدينا: $g'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{(x-1)^2}=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$

يعني: $(\forall x\in D)\ g'(x)<0$

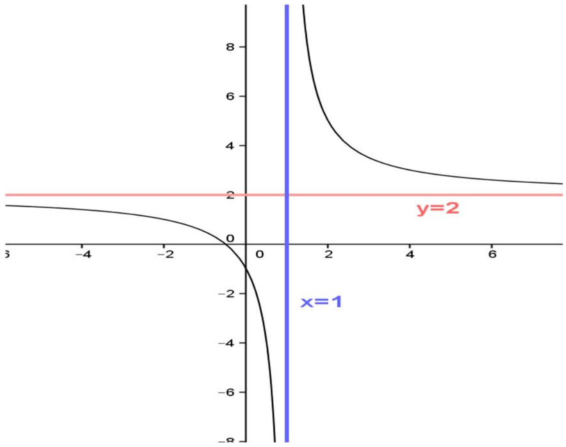
جدول تغيرات الدالة.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$2 \searrow$	‖	$\searrow 2$

.4

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	1	1/2	-1		5	7/2	3

.5 منحنى الدالة g .



تمرين9 : نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

1. حدد حيز تعريف الدالة f.
2. أحسب نهايات الدالة f في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
3. أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.
4. املأ الجدول التالي :

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$							

5. أنشئ منحنى الدالة f.

الحل:

.1 حيز تعريف الدالة f هو: $D = \{x \in \mathbb{R} / x-2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$

و منه $D =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

.2 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x+1}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{x} = 3$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x+1}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x} = 3$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y = 3$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{3x+1}{x-2} = +\infty$ و $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{3x+1}{x-2} = -\infty$

يعني المستقيم ذا العادلة $x = 2$ مقارب عمودي للمنحنى.

.3 لكل x من D لدينا: $f'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{(x-2)^2} = \dfrac{-7}{(x-2)^2}$

يعني: $(\forall x \in D) f'(x) < 0$

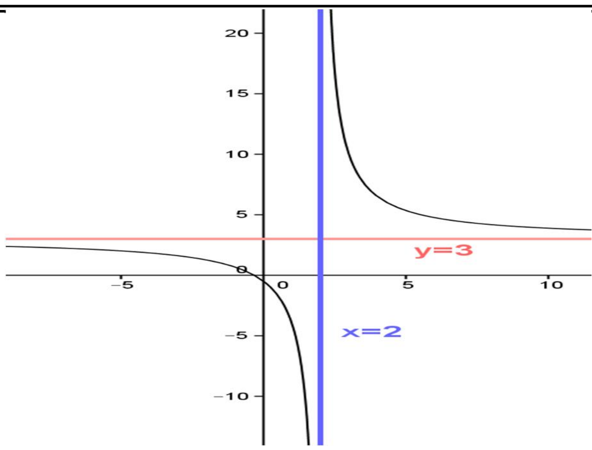
<u>جدول تغيرات الدالة</u>

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$3 \searrow$	‖	$\searrow 3$

.4

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2 /3	-1/2	-4		10	13/2	4

.5 منحنى الدالة f.



IV. دراسة الدالة $x \mapsto \sqrt{ax+b}\ (a \neq 0)$:

مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x)=\sqrt{3x-5}$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f.
2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. أحسب $f'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة f.
4. أحسب $f(2)$ و $f(3)$ و $f(7)$.
5. مثل مبيانيا الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

الحل:

1. $f(x)$ **معرفة إذا وفقط إذا كان** $3x-5 \geq 0$ **يعني** $3x \geq 5$ **و منه** $x \geq \frac{5}{3}$

يعني حيز تعريف الدالة f **هو:** $D=\left[\frac{5}{3},+\infty\right[$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sqrt{3-\frac{5}{x}}=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=0$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

3. **لدينا:** $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}\ \left(\forall x \in \left]\frac{5}{3},+\infty\right[\right)$

بما أن $\frac{3}{2}>0$ **و** $\sqrt{3x-5}>0$ **فإن:** $f'(x)>0$.

جدول التغيرات:

x	$5/3$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

4. **لدينا:** $f(2)=\sqrt{3\times2-5}=\sqrt{1}=1$

و $f(3)=\sqrt{3\times3-5}=\sqrt{4}=2$

و $f(7)=\sqrt{3\times7-5}=\sqrt{16}=4$

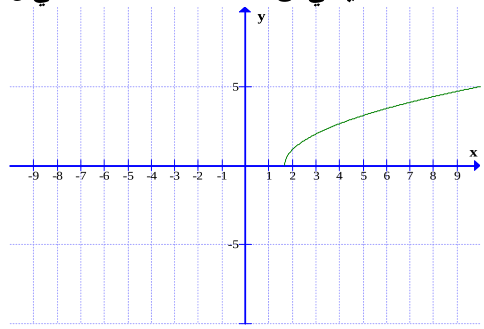
5. **التمثيل المبياني:**

$f\left(\frac{5}{3}\right)=0$ **يعني أن النقطة** $A\left(\frac{5}{3},0\right)$ **تنتمي ل** (C_f).

$f(2)=1$ **يعني أن النقطة** $B(2,1)$ **تنتمي ل** (C_f).

$f(3)=2$ يعني أن النقطة $B(3,2)$ تنتمي ل (C_f).

$f(7)=4$ يعني أن النقطة $B(7,4)$ تنتمي ل (C_f).



تمرين10: نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x)=\sqrt{2x+4}$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f.
2. أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. أحسب $f'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة f.
4. أحسب $f(-2)$ و $f(0)$ و $f(6)$.
5. مثل مبيانيا الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

الحل:(1 $f(x)$ **معرفة إذا وفقط إذا كان** $2x+4\geq 0$ **يعني** $2x\geq -4$ **و منه** $x\geq -2$

يعني حيز تعريف الدالة f **هو:** $D=[-2,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sqrt{2+\frac{4}{x}}=+\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$ **و** $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

لدينا: $(\forall x\in]-2,+\infty[)\ f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+4}}=\frac{1}{\sqrt{2x+4}}$

بما أن $\sqrt{2x+4}>0$ **فان:** $f'(x)>0$.

جدول التغيرات:

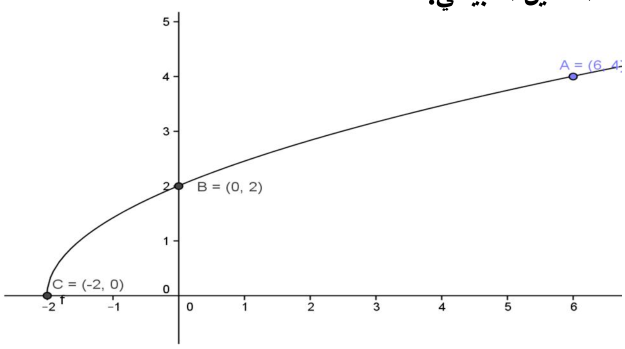
x	-2 $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

لدينا: $f(-2)=\sqrt{2\times(-2)+4}=\sqrt{0}=0$

و $f(0)=\sqrt{2\times 0+4}=\sqrt{4}=2$

و $f(6)=\sqrt{2\times 6+4}=\sqrt{16}=4$

التمثيل المبياني:



تمرين11: نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة g.
2. أحسب نهايات الدالة g في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
3. أحسب الدلة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g.
4. أنشئ منحنى الدالة g.

الحل:

1)حيز تعريف الدالة g هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1\}$

و منه $D=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى $\left(C_f\right)$.

$\lim\limits_{x\to-1^+} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x+1}{x+1}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-1^-} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2x+1}{x+1}=+\infty$

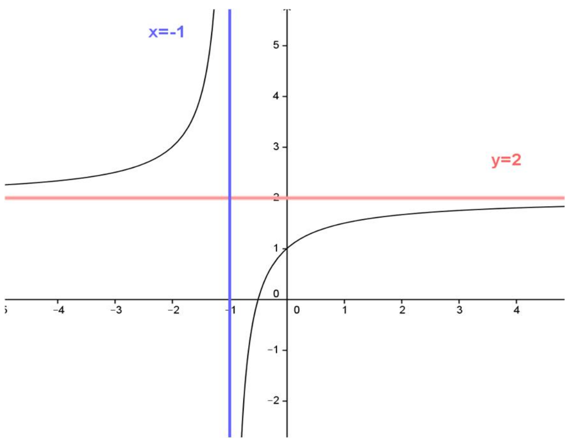
يعني المستقيم ذا العادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى.

3)لكل x من D لدينا: $g'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ يعني: $\left(\forall x\in D\right)g'\left(x\right)>0$

4)<u>جدول تغيرات الدالة.</u>

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	||	$\nearrow$	2

منحنى الدالة g.



مذكرة رقم5 في درس الدوال اللوغاريتمية

مذكرة رقم : 5
الأستاذ : عثماني نجيب

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
1. دالة اللوغاريتم النبيري - الرمز $\ln$؛ - صيغ: $\ln ab$ ؛ $\ln\frac{1}{b}$ ؛ $\ln\frac{a}{b}$ ؛ $\ln\sqrt{a}$ ؛ $\ln a^n \quad (n\in Z)$ ؛ - دراسة وتمثيل الدالة $x\to\ln x$ ؛ **2. اللوغاريتم العشري**	- التمكن من الحساب على اللوغاريتمات النبيرية والعشرية؛ - التمكن من حل معادلات ومتراجحات لوغاريتمية بسيطة؛ - استعمال الآلة الحاسبة لتحديد قيم مقربة للوغاريتم عدد حقيقي موجب قطعا أو تحديد قيمة مقربة لعدد لوغاريتمه معلوم؛ - التمكن من نهايتي دالة اللوغاريتم النبيري عند محدات حيز تعريفه؛ - التمكن من دراسة وتمثيل دوال بسيطة تحتوي صيغها على دالة اللوغاريتم النبيري	- دالة اللوغاريتم هي الدالة الأصلية للدالة $x\to\frac{1}{x}$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم في 1؛ - نقبل في هذا المستوى أن $\lim_{+\infty}\ln x=+\infty$ وأن $\lim_{0^+}\ln x=-\infty$ وتعتبران نهايتين أساسيتين؛ كما تقبل صيغة الدالة المشتقة لدالة اللوغاريتم النبيري.

I. تعريف:

▪ توجد دالة تسمى دالة اللوغاريتم النبيري يرمز لها ب ln و هي دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا: $(\forall x\in]0,+\infty[):ln'(x)=\frac{1}{x}$

▪ دالة اللوغاريتم النبيري تنعدم في 1 أي $ln(1)=0$.

II. خاصيات جبرية:

$$(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0)\ ln(ab)=ln(a)+ln(b)\qquad ln\left(\frac{1}{b}\right)=-ln(b)\qquad ln\left(\frac{a}{b}\right)=ln(a)-ln(b)\qquad ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}ln(a)$$

$$(\forall n\in\mathbb{Z})\ ln\left(a^n\right)=n\,ln(a)$$

مثال : إذا علمت أن $ln(2)\simeq 0,7$ و $ln(3)\simeq 1,1$ فاحسب ما يلي: $ln(6)$ $ln(4)$ $ln(8)$ $ln(72)$ $ln\left(\frac{1}{2}\right)$ $ln\left(\frac{3}{2}\right)$ $ln\left(\sqrt{2}\right)$ $ln\left(\sqrt{6}\right)$ $ln\left(3\sqrt{2}\right)$

الحل $ln(6)=ln(2\times3)=ln(2)+ln(3)\simeq 0,7+1,1\simeq 1,8$

$ln(4)=ln(2\times2)=ln\left(2^2\right)=2ln(2)\simeq 2\times0,7\simeq 1,4$

$ln(8)=ln(2\times2\times2)=ln\left(2^3\right)=3ln(2)\simeq 3\times0,7\simeq 2,1$

$\ln(72)=\ln(9\times8)=\ln(9)+\ln(8)=\ln\left(3^2\right)+\ln\left(2^3\right)$

$ln(72)=ln\left(3^2\times2^3\right)=ln\left(3^2\right)+ln\left(2^3\right)=2ln(3)+3ln(2)$ $\qquad ln\left(\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}ln(2)\simeq\frac{1}{2}\times0,7\simeq 0,35$

$ln(72)\simeq 2\times1,1+3\times0,7\simeq 2,2+2,1\simeq 4,3$ و $ln\left(\frac{3}{2}\right)=ln(3)-ln(2)\simeq 1,1-0,7\simeq 0,4$ $\qquad ln\left(\frac{1}{2}\right)=-ln(2)\simeq -0,7$

$ln\left(\sqrt{6}\right)=\frac{1}{2}ln(6)\simeq\frac{1}{2}\times1,8\simeq 0,9$ $\qquad \ln\left(3\sqrt{2}\right)=\ln(3)+\ln\left(\sqrt{2}\right)\simeq 1,1+\frac{1}{2}\ln(2)\simeq 1,1+\frac{0,7}{2}\simeq 1,1+0,35\simeq 1,45$

تمرين1:1) إذا علمت أن $\ln(2)\simeq 0,7$ و $\ln(5)\simeq 1,6$ فاحسب ما يلي: $ln(10)$ $ln(25)$ $ln(16)$ $ln(125)$ $ln\left(\frac{1}{5}\right)$ $ln\left(\frac{2}{5}\right)$ $ln\left(\sqrt{5}\right)$ $ln\left(2\sqrt{5}\right)$

2)تحقق أن : $2\ln 4+\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln(8)=0$

الحل:1) $ln(10)=ln(2\times5)=ln(2)+ln(5)$

$\simeq 0,7+1,6\simeq 2,3$

$ln(25)=ln(5\times5)=ln\left(5^2\right)\simeq 2ln(5)\simeq 2\times1,6\simeq 3,2$

$ln(16)=ln(2\times2\times2\times2)=ln\left(2^4\right)=4ln(2)\simeq 4\times0,7\simeq 2,8$

$ln(125)=ln(5\times5\times5)=ln\left(5^3\right)=3ln(5)\simeq 4\times1,6\simeq 6,4$

$ln\left(\frac{1}{5}\right)=-ln(5)\simeq -1,6$ $\qquad ln\left(\frac{2}{5}\right)=ln(2)-ln(5)\simeq 0,7-1,6\simeq -0,9$

$= 0,7+\frac{1}{2}(1,6)$ $\ln\left(\sqrt{5}\right)=\frac{1}{2}\ln(5)\simeq\frac{1}{2}\times 1,6\simeq 0,8$

$\ln\left(2\sqrt{5}\right)=\ln(2)+\ln\left(\sqrt{5}\right)=\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(5)=0,7+0,8=1,5$

(2 $2\ln 4+\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln(8)=0\ ????$

$2\ln 4+\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln(8)=2\ln 2^2-\ln(2)-\ln\left(2^3\right)$

$=2\times 2\ln 2-\ln(2)-3\ln(2)=4\ln 2-\ln(2)-3\ln(2)=0$

تمرين2: بسط

1. $A=\ln(3)-\ln(5)+\ln(15)$
2. $B=\ln(0,01)-\ln(1000)+\ln\left(10^6\right)$

الجواب: (1 $A=\ln(3)-\ln(5)+\ln(15)=\ln(3)-\ln(5)+\ln(3\times 5)$

$A=\ln(3)-\ln(5)+\ln 3+\ln 5=2\ln(3)=\ln\left(3^2\right)=\ln(9)$

$B=\ln\left(10^{-2}\right)-\ln\left(10^3\right)+\ln\left(10^6\right)=-2\ln(10)-3\ln(10)+6\ln(10)$

$B=\ln(10)=\ln(2\times 5)=\ln 2+\ln 5$

تمرين3: إذا علمت أن $\ln(2)\simeq 0,7$ و $\ln(11)\simeq 2,4$ فاحسب ما يلي:

$\ln(22)$ $\ln(121)$ $\ln(32)$ $\ln(44)$ $\ln\left(\frac{11}{2}\right)$

الحل $\ln(22)=\ln(2\times 11)=\ln(2)+\ln(11)\simeq 0,7+2,4\simeq 3,1$

$\ln(121)=\ln(11\times 11)=\ln\left(11^2\right)=2\ln(11)\simeq 2\times 2,4\simeq 4,8$

$\ln(32)=\ln(2\times 2\times 2\times 2\times 2)=\ln\left(2^5\right)=5\ln(2)\simeq 5\times 0,7\simeq 3,5$

$=\ln\left(3^2\right)+\ln\left(2^3\right)$

$\ln(44)=\ln(4\times 11)=\ln(4)+\ln(11)=2\ln(2)+\ln(11)$

$\ln(44)\simeq 2\times 0,7+2,4\simeq 1,4+2,4\simeq 3,8$

$\ln\left(\frac{11}{2}\right)=\ln(11)-\ln(2)\simeq 2,4-0,7\simeq 1,7$

III. النهايات:

تقبل النهايات التالية:

الخاصية 1: $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ **الخاصية 2:** $\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$

مثال : أحسب النهايات التالية : (1 $\lim_{x\to+\infty}2\ln(x)+1$ (2 $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)+1}{\ln x}$ (3 $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}$

الجواب: (1 $\lim_{x\to+\infty}2\ln(x)+1=2\times(+\infty)+1=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)+1}{\ln x}=\frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد لأن : $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$

(2 $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+1}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\left(2+\frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}2+\frac{1}{\ln x}=2+0=2$

(3 $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{-\infty}=0^-$ لأن : $\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$

IV. جدول تغيرات الدالة $x\to\ln(x)$:

لدينا: $(\forall x\in]0,+\infty[):\ln'(x)=\frac{1}{x}$

بما أن $x>0$ فان $(\forall x\in]0,+\infty[):\ln'(x)=\frac{1}{x}>0$

و بالتالي الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

و منه الجدول:

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

$\ln(a)=\ln(b)\Leftrightarrow a=b\ (\forall a>0)(\forall b>0)$ و $\ln(a)>\ln(b)\Leftrightarrow a>b\ (\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0)$ لأن الدالة $\ln$ تزايدية قطعا.

العدد : e : $e \simeq 2,71828\cdots$ و e هو العدد الحقيقي الذي يحقق $\ln(e)=1$.

ولدينا: $(\forall n \in \mathbb{Z})\ \ln(e^n) = n\ln(e) = n$

أمثلة: 1) $\ln(e^3)=3$ و $7=\ln(e^7)$

2)حل المعادلة $\ln(x)=7$ يعني $x=e^7$

<u>تمرين 4:</u>أحسب وبسط :

$A=\ln(e^2)+\ln(e^4)-\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ $\quad B=2\ln(\sqrt{e})+\ln(e\sqrt{e})-\frac{1}{3}\ln(e^9)$

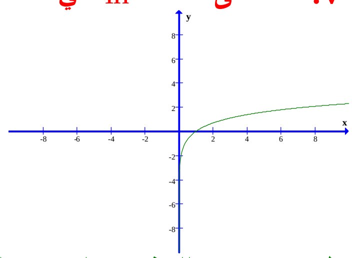
الجواب:1) $A=\ln(e^2)+\ln(e^4)-\ln\left(\frac{1}{e}\right)=2\ln(e)+4\ln(e)--\ln(e)$

$A=2\times1+4\times1--1=7$

$B=2\ln(\sqrt{e})+\ln(e\sqrt{e})-\frac{1}{3}\ln(e^9)=2\times\frac{1}{2}\ln(e)+\ln e+\ln(\sqrt{e})-\frac{1}{3}9\ln(e)$

$B=1\ln(e)+\ln e+\frac{1}{2}\ln(e)-3\ln(e)=1+1+\frac{1}{2}-3=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

V. منحنى الدالة $\ln$ في معلم متعامد ممنظم



تطبيق خاصيات اللوغاريتم النيبري: المعادلات:

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\ln(x)=0$ 2) $\ln(x)=1$ 3) $\ln(x)=7$ 4) $\ln(x+1)=\ln(3)$ 5) $\ln(x)(\ln(x)-1)=0$ 6) $(\ln x+1)(\ln x-1)=0$

الحل: الكتابة $\ln(x)$ لها معنى إذا كان $x>0$.

1) يجب أن يكون $x \succ 0$ في المعادلة $\ln(x)=0$

و منه مجموعة تعريف هذه المعادلة هي $]0,+\infty[$

المعادلة $\ln(x)=0$ تكافئ $\ln(x)=\ln(1)$ و منه $x=1$ و بما أن $1\in]0,+\infty[$

فان مجموعة حلول المعادلة هي: $S=\{1\}$

2) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x)=1$ هي $]0,+\infty[$

و هي تكافئ $\ln(x)=\ln(e)$ أي $x=e$ و بما أن $e\in]0,+\infty[$ فان $S=\{e\}$

3) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x)=7$ هي $]0,+\infty[$

و هي تكافئ $\ln(x)=\ln(e^7)$ أي $x=e^7$ و بما أن $e^7\in]0,+\infty[$ فان $S=\{e^7\}$.

4) يجب أن يكون $x+1>0$ أي $x>-1$

و منه مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x+1)=\ln(3)$ هي $]-1,+\infty[$

المعادلة تكافئ $x+1=3$ أي $x=2$ و بما أن $2\in]-1,+\infty[$ فان $S=\{2\}$

5) مجموعة تعريف المعادلة هي $]0,+\infty[$

$\ln(x)(\ln(x)-1)=0 \Leftrightarrow \ln(x)-1=0$ أو $\ln(x)=0$

يعني $\ln(x)=1$ أو $\ln(x)=0$ يعني $\ln(x)=\ln(e)$ أو $\ln(x)=\ln(1)$ يعني $x=e$ أو $x=1$ ومنه فان $S=\{1,e\}$

6) مجموعة تعريف المعادلة هي $]0,+\infty[$

$(\ln x+1)(\ln x-1)=0 \Leftrightarrow \ln x-1=0$ أو $\ln x+1=0$ يعني $\ln(x)=1$ أو $\ln x=-1$ يعني $\ln(x)=\ln(e)$ أو $\ln(x)=-\ln(e)$

يعني $x=e$ أو $\ln(x)=\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ يعني $x=e$ أو $x=\frac{1}{e}$ ومنه فان $S=\left\{\frac{1}{e},e\right\}$

تطبيق خاصيات اللوغاريتم النيبري:

دراسة دالة تحتوي صيغتها على اللوغاريتم النيبري:

مثال1: نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=\ln x+1$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f

2. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(e^2)$ و $f\left(\frac{1}{e}\right)$

3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$
و ادرس اشارة المشتقة

4. أحسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

5. أعط جدول تغيرات الدالة f.

الحل:

1. مجموعة تعريف الدالة f هي $]0,+\infty[$

2. $f(1)=\ln(1)+1=1$

$f(e)=\ln(e)+1=1+1=2$

$f(e^2)=\ln e^2+1=2\ln e+1=2\times1+1=3$

$f\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\left(\frac{1}{e}\right)+1=-\ln e+1=-1+1=0$

3. حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=(\ln(x)+1)' =(\ln(x))'+(1)'=\frac{1}{x}>0$$

لأن x موجب قطعا.

4. حساب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$:

لدينا $\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ اذن $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

حساب $\lim_{x\to +\infty} f(x)$:لدينا $\lim_{x\to +\infty}\ln(x)=+\infty$ اذن $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

5. ومنه جدول تغيرات f هو كما يلي:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

مثال2 :نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=2\ln x-x$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f

2. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(e^2)$

3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$

4. ادرس اشارة مشتقة الدالة

5. أحسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

الحل:

1. مجموعة تعريف الدالة f هي $]0,+\infty[$

2. $f(1)=2\ln(1)-1=0-1=-1$

$f(e)=2\ln(e)-e=2-e$

$f(e^2)=2\ln e^2-e^2=4\ln e-e^2=4\times1-e^2=4-e^2$

3. حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$$

4. اشارة $f'(x)$ هي اشارة $(2-x)$ لأن x موجب قطعا.

5. لدينا $\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} x=0$ اذن $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

تمرين5:نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=\ln x+x$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f

2. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(e^2)$

3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$

4. أحسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

أجوبة :1)مجموعة تعريف الدالة f هي $]0,+\infty[$

2) $f(1)=\ln(1)+1=0+1=1$ و $f(e)=\ln(e)+e=1+e$

$f(e^2)=\ln e^2+e^2=2\ln e+e^2=2\times 1+e^2=2+e^2$

3)حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{1}{x}+1=\frac{1+x}{x}$$

4) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln x+x=-\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln x+x=+\infty$

VI.اللوغاريتم العشري :

تعريف:يرمز لدالة اللوغاريتم العشري ب: $\log$ و هي معرفة على $]0,+\infty[$

كما يلي: $(\forall x\in]0,+\infty[):\log(x)\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

ويحقق $\log(10)=1$

مثال: علما أن $\log(2)\simeq 0,3$ أحسب $\log(20)$

$$\log(20)=\log(2\times 10)=\log(2)+\log(10)$$
$$\simeq 0,3+1\simeq 1,3$$

خاصيات هامة لدالة اللوغاريتم العشري:

1. $\log(1)=0$ و $\log(10)=1$
2. $(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0):\log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$
3. $(\forall a\succ 0):\log\left(\frac{1}{b}\right)=-\log(b)$
4. $(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0):\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$
5. $(\forall a\succ 0)(\forall n\in\mathbb{Z}):\log(a^n)=n\log(a)$
6. $(\forall n\in\mathbb{Z}):\log(10^n)=n$
7. $(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0):\log(a)=\log(b)\Leftrightarrow a=b$
8. $(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0):\log(a)\succ\log(b)\Leftrightarrow a\succ b$

تمرين6:بسط و أحسب :

$A=\log(0,01)-\log(1000)+\log(10^6)$

$B=\log(10)+2\log(100)+\log(10^4)$

$C=\log(4)+\log(25)$

$D=1+2\log 2-\log(40)$

$E=\log(900)+2\log\left(\frac{1}{3}\right)-2$

الجواب: $A=\log(10^{-2})-\log(10^3)+\log(10^6)$

$A=-2\log(10)-3\log(10)+6\log(10)$

$A=-2-3+6=1$

$B=\log(10)+2\log(100)+\log(10^4)$

$B=1+2\log(10^2)+\log(10^4)=1+2\times 2+4\log(10)=1+4+4$ ومنه $B=9$

$C=\log(4)+\log(25)=\log(4\times 25)=\log(100)$

$C=\log(10^2)=2\log(10)=2\times 1=2$

$D=1+2\log 2-\log(40)=1+\log 2^2-(\log(4\times 10))$

$D=1+l\,og\,2^2-(l\,og\,4+l\,og10)=1+l\,og\,4-l\,og\,4-l\,og10$

$D=1+l\,og\,4-l\,og\,4-1=0$

$E=\log(900)+2\log\left(\frac{1}{3}\right)-2=\log(9\times 100)-2\log(3)-2$

$E=\log 9+\log 100-2\log(3)-2$

$E=\log 3^2+\log 10^2-2\log(3)-2=2\log 3+2\log 10-2\log(3)-2$ ومنه $E=2\log 10-2=2\times 1-2=0$

تمرين7: علما أن $\log(3) \simeq 0,47$ و $\log(5) \simeq 0,7$

أحسب $\log(15)$ و $\log(\sqrt{5})$ و $\log\left(\frac{1}{3}\right)$ و $\log(50)$ و $\log(300)$

أجوبة : $\log(15) = \log(5\times3) = \log(5)+\log(3) \simeq 0,7+0,47 \simeq 1,17$

$$\log(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\log(5) \simeq \frac{1}{2}\times 0,7 \simeq 0,35$$

$$\log\left(\frac{1}{3}\right) = -\log(3) \simeq -0,47$$

$$\log(50) = \log(5\times10) = \log(5)+\log(10) \simeq 0,7+1 \simeq 1,7$$

$$\log(300) = \log(3\times100) = \log(3)+\log(100) \simeq 0,47+2 \simeq 2,47$$

مذكرة رقم6 في درس الدوال الأسية

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- الدالة الأسية النبيرية؛ الرمز exp؛ العدد e والكتابة e^x؛ - الصيغ e^{-a} ؛ e^{a-b} ؛ e^{a+b} ؛ $(e^a)^n \quad (n\in Z)$؛ - دراسة وتمثيل الدالة $x \to e^x$؛	- حل معادلات ومتراجحات ونظمات أسية نبيرية لا يكتسي حلها صعوبة؛ - استعمال الآلة الحاسبة لتحديد قيم مقربة للعدد e^a حيث عدد حقيقي a أو تحديد قيمة مقربة لعدد a بحيث e^a عدد معلوم؛ - دراسة وتمثيل دوال بسيطة تحتوي صيغها على الدالة الأسية النبيرية؛	- نقبل في هذا المستوى أن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ وتعتبران نهايتين أساسيتين؛ - إبراز العلاقة: $\begin{cases} a = \ln b \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow e^a = b$؛ واستعمالها في حل معادلات ومتراجحات ونظمات.

1) تعريف الدالة الأسية النبيرية

الدالة الأسية النبيرية يرمز لها ب exp وهي معرفة على $\mathbb{R}$ ب :

$$(\forall x \in\mathbb{R}); \exp x = e^x$$

2) خاصية مقبولة

$$(\forall y \in\mathbb{R})(\forall x \in]0;+\infty[) \text{ ، } (x = e^y \Leftrightarrow \ln(x) = y)$$

الدالة exp تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ يعني $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$

$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ لكل x و y من $\mathbb{R}$

ولدينا: $e^0 = 1$ و $e^1 = e$

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: 1) $e^x = 1$ 2) $e^{x-2} = e$ 3) $e^x = 2$

الحل : 1) $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ومنه : $S = \{0\}$

2) $e^{x-2} = e \Leftrightarrow e^{x-2} = e^1$

$\Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$ ومنه : $S = \{3\}$

3) $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$ ومنه : $S = \{\ln 2\}$

خاصيات جبرية

$(\forall x \in \mathbb{R}); \ln(e^x) = x$ $(\forall x \in\mathbb{R})(\forall y \in\mathbb{R})$

$(\forall x \in\mathbb{R}) e^x \succ 0$ و $e^x \times e^y = e^{x+y}$ و $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ و $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ و $e^{rx} = (e^x)^r$

مثال : ليكن a و b عددين حقيقيين, أحسب وبسط ما يلي : $A = e^3 \times e^5$ و $B = (e^{-4} \times e^6)^3$ و $C = \dfrac{e^7}{e^4}$

الحل : $A = e^3 \times e^5 = e^{3+5} = e^8$ و $B = (e^{-4} \times e^6)^3 = (e^{-4+6})^3 = (e^2)^3 = e^{2\times3} = e^6$ و $C = \dfrac{e^7}{e^4} = e^{7-4} = e^3$

تمرين1: بسط ما يلي: $A = e^{-x} \times e^{2x}$ ، $B = (e^{2-x})^2 \times e^{3x-4}$ $C = \dfrac{e^{2x} \times e^{3x}}{(e^x)^4}$

الحل : $A = e^{-x} \times e^{2x} = e^{-x+2x} = e^x$ و $B = (e^{2-x})^2 \times e^{3x-4} = e^{2\times(2-x)} \times e^{3x-4} = e^{2\times(2-x)+3x-4} = e^{4-2x+3x-4} = e^x$

$$C = \frac{e^{2x} \times e^{3x}}{(e^x)^4} = \frac{e^{2x+3x}}{e^{4x}} = \frac{e^{5x}}{e^{4x}} = e^{5x-4x} = e^x$$

تمرين2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: 1) $e^{x+1} = 4$

2) $e^{1-x} \times e^{2x} = e$ 3) $e^{1+x} = \dfrac{1}{e^{2x-3}}$ 4) $\dfrac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1}$ 5) $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e$ 6) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

الحل : 1) $e^{1-x} \times e^{2x} = e \Leftrightarrow e^{1-x+2x} = e^1$

$\Leftrightarrow e^{1+x} = e^1 \Leftrightarrow 1 + x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ومنه : $S = \{0\}$

2) $e^{x-2} = e \Leftrightarrow e^{x-2} = e^1$

$\Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$ ومنه : $S = \{3\}$

3) $e^{1+x} = \dfrac{1}{e^{2x-3}} \Leftrightarrow e^{1+x} = e^{-(2x-3)}$

$\Leftrightarrow e^{1+x} = e^{-2x+3} \Leftrightarrow 1 + x = -2x + 3 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ ومنه : $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

4) $e^{(2-x)-(1+2x)} = e^{x-1} \Leftrightarrow \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1}$

$2-x-1-2x = x-1 \Leftrightarrow (2-x)-(1+2x) = x-1 \Leftrightarrow$

$x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2}{-4} \Leftrightarrow -4x = -2 \Leftrightarrow -x-2x-x = -1+1-2 \Leftrightarrow$ ومنه : $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

5) $e^{2x+1-x+3} = e^1 \Leftrightarrow e^{(2x+1)-(x-3)} = e^1 \Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e$

$x = -3 \Leftrightarrow x+4=1 \Leftrightarrow 2x+1-x+3=1 \Leftrightarrow$ ومنه : $S=\{-3\}$

تمرين3: حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات الآتية :

1. $f(x) = xe^x + 2x$
2. $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$

الحل: 1) $D_f = \mathbb{R}$

2) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x - 1 \neq 0\}$

$x = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$ ومنه : $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

تمرين4: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $e^{2x-1} \geq 1$ 2) $e^{7x-1} \geq e^{2x-3} \times e^{x-2}$

الحل: 1) $2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x-1} \geq e^0 \Leftrightarrow e^{2x-1} \geq 1$

$x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow$ ومنه : $S = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

2) $e^{7x-1} \geq e^{2x-3+x-2} \Leftrightarrow e^{7x-1} \geq e^{2x-3} \times e^{x-2}$

$4x \geq -4 \Leftrightarrow 7x-1 \geq 2x-3+x-2 \Leftrightarrow$

$x \geq -1 \Leftrightarrow$ ومنه : $S = [-1; +\infty[$

3) النهايات :

نقبل النهايتين التاليتين

خاصية1 : $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ و **خاصية2 :** $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

تمرين5: أحسب النهايات الآتية:

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(2x - \frac{1}{e^x}\right)$ 2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x-1}{e^x+2}$ 3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+3}$ 4) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2e^x-1}{e^x+1}$

الحل: 1) لدينا $\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ ولدينا: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ لأن: $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ اذن : $\lim_{x\to+\infty}\left(2x - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x-1}{e^x+2} = \frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x-1}{e^x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(2-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{2}{e^x}} = \frac{2-0}{1+0} = 2$ لأن: $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

3) $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+3} = \frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{3}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{e^x}} = \frac{1}{1+0} = 1$ لأن: $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

4) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2e^x-1}{e^x+1} = \frac{2\times 0-1}{0+1} = -1$

4) مشتقة الدالة. $x \mapsto e^x$

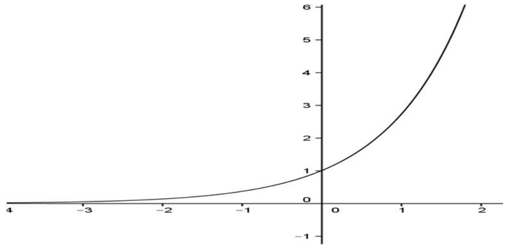
نقبل أن الدالة exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا: $(e^x)' = e^x$: $(\forall x \in \mathbb{R})$

5) جدول تغيرات الدالة $x \to e^x$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

6) منحنى الدالة $\exp$:



تمرين6: أحسب $f'(x)$ في الحالات الآتية :

1) $f(x)=e^x+2$ 2) $f(x)=xe^x+3x$ 3) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

الحل: 1) $f'(x)=\left(e^x+2\right)'=\left(e^x\right)'+\left(2\right)'=e^x+0=e^x$

2) $f'(x)=\left(xe^x+3x\right)'=\left(xe^x\right)'+\left(3x\right)'=\left(x\right)'e^x+x\left(e^x\right)'+3=e^x+xe^x+3$

3) $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=\dfrac{\left(e^x-1\right)'\times\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)\times\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}$

$f'(x)=\dfrac{e^x\times\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)\times e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{e^x\times e^x+e^x-e^x\times e^x+e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

تمرين7: نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=e^x+3x$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2) أحسب $f(0)$ و $f(1)$ (أعط قيمة مقربة للنتائج)

3) أحسب $f'(x)$ و وبين أن الدالة f تزايدية قطعا على D_f

4) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

5) حددجدول تغيرات الدالة f

الحل: 1) $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(0)=e^0+3\times0=1-0=1$

$f(1)=e^1+3\times1=e+3\simeq2,7+3\simeq5,7$

3) $f'(x)=\left(e^x+3x\right)'=\left(e^x\right)'+\left(3x\right)'=e^x+3>0$

لأن: $(\forall x\in\mathbb{R})\,e^x>0$ ومنه f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

4) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+3x=0+3(-\infty)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+3x=+\infty+3(+\infty)=+\infty$

5) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$