

مذكرة رقم 10 هي درس متجهاته الفضاء
الأهداف و القدرات المنتظرة من الدرس :

توجيهات تربوية	القدرات المنتظرة	محتوى البرنامج
- يقدم مفهوم المتجهة والحساب المتجهي بنفس الكيفية التي قدم بها في المستوى. - يتم الاكتفاء بالتأويل الهندسي للاستقامية والاسطوانية.	- التمكن من قواعد الحساب المتجهي في الفضاء؛ - التعرف والتعبير عن استقامية متجهتين؛ - التعرف والتعبير عن استوائية ثلاث متجهات؛ - تطبيق الاستقامية والاسطوانية في حل مسائل هندسية.	- الحساب المتجهي في الفضاء، - المتجهات المستقيمة؛ التعريف المتجهي لمستقيم؛ التعريف المتجهي لمستوى؛ - المتجهات المستوائية.

I. تساوي متجهتين

عناصر متجهة: A و B نقطتان من الفضاء، إذا رمزنا للمتجهة \vec{AB} بالرمز \vec{u} فإن:

- اتجاه \vec{u} هو المستقيم (AB) .
- منحنى هو المنحنى من A نحو B
- منظم \vec{u} هي المسافة AB و نكتب: $\|\vec{u}\| = AB$

ملحوظة: لكل نقطة A من الفضاء، المتجهة \vec{AA} ليس لها اتجاه و منظما منعدم؛

$\vec{AA} = \vec{0}$ و نكتب $\vec{AA} = \vec{0}$ تسمى المتجهة المنعدمة، و نكتب

لكل متجهة \vec{u} من الفضاء، لكل نقطة A من الفضاء، توجد نقطة وحييدة M من الفضاء بحيث: $\vec{u} = \vec{AM}$

تعريف: نقول إن متجهتين متساويتان، إذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحنى و نفس المنظم.

خاصية: ليكن $ABCD$ رباعيا من الفضاء لدينا:

$ABCD$ متوازي الأضلاع إذا و فقط إذا كان $\vec{AB} = \vec{DC}$.

مثال: ليكن A و B و C و D أربع نقط غير مستقيمة

بين أنه إذا كان: $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$ لكل M من الفضاء فان: $ABCD$ متوازي الأضلاع.

الجواب: يكفي أن نبين مثلا أن: $\vec{AB} = \vec{DC}$ ؟؟؟؟ لدينا:

$$\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{MC} + \vec{CD} \text{ يعني } \vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$$

$$\text{يعني } \vec{0} = \vec{AB} + \vec{CD} \text{ يعني } \vec{AB} = \vec{DC}$$

II. مجموع متجهتين

تعريف: ليكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من الفضاء

مجموع المتجهتين \vec{u} و \vec{v} هي المتجهة \vec{w} بحيث: إذا وضعنا

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \text{ و } \vec{u} = \vec{AB} \text{ و } \vec{v} = \vec{BC} \text{ فان: } \vec{w} = \vec{AC} \text{ و نكتب: } \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

علاقة شال: لكل A و B و C نقط من الفضاء

$$\text{لدينا: } \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

مقابل متجهة: ليكن \vec{u} متجهة من الفضاء،

مقابل المتجهة \vec{u} هي المتجهة التي نرسم لها بالرمز $-\vec{u}$ و التي

لها نفس اتجاه \vec{u} و نفس منظم \vec{u} و ولكن منحاها هو

عكس منحنى \vec{u} و لدينا $\vec{BA} = -\vec{AB}$ لكل A و B من الفضاء.

ليكن A و B و C و D أربع نقط من الفضاء

مثال: نضع: $\vec{u} = 3\vec{MA} - 2\vec{MC} + 4\vec{MB} - 5\vec{MD}$ لكل M من الفضاء

بين أن: المتجهة \vec{u} غير مرتبطة بالنقطة M

الجواب: $\vec{u} = 3\vec{MA} - 2\vec{MA} - 2\vec{AC} + 4\vec{MA} + 4\vec{AB} - 5\vec{MA} - 5\vec{AD}$
يعني

$$\vec{u} = -2\vec{AC} + 4\vec{AB} - 5\vec{AD} \text{ ومنه المتجهة } \vec{u} \text{ غير مرتبطة بالنقطة } M$$

III. استقامية متجهتين و التعريف المتجهي لمستقيم و مستوى
1. استقامية متجهتين:

تعريف: ليكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين من الفضاء
نقول ان \vec{u} و \vec{v} مستقيمتان اذا وجد عدد حقيقي k

$$\text{بحيث: } \vec{v} = k\vec{u}$$

خاصية: ليكن A و B و C و D نقط من الفضاء بحيث
 $C \neq D$ و $A \neq B$

$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}; \vec{CD} = k\vec{AB}$$

تمرين: ليكن $ABCD$ رباعي الأوجه

نعتبر النقط M و N و P و Q أربع نقط بحيث:

$$\vec{AM} = 2\vec{AB} \text{ و } \vec{AN} = 2\vec{AD} \text{ و } \vec{CQ} = 3\vec{CB} \text{ و } \vec{CP} = 3\vec{CD}$$

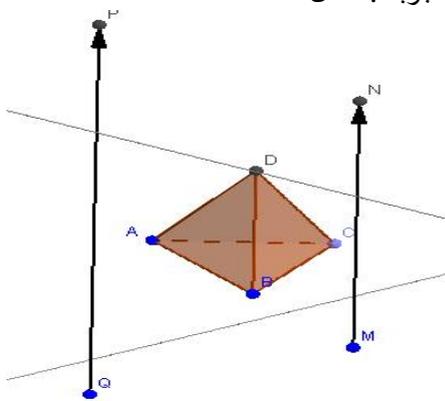
$$1. \text{ أنشئ الشكل.}$$

2. أكتب كلا من المتجهين \vec{MN} و \vec{PQ} بدلالة \vec{BD}

3. استنتج أن المتجهين \vec{MN} و \vec{PQ} مستقيمتان.

4. ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (MN) و (PQ) ؟

أجوبة: الشكل



$$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} = -\vec{AM} + \vec{AN} = -2\vec{AB} + 2\vec{AD} \quad (2)$$

$$\vec{MN} = 2\vec{BA} + 2\vec{AD} = 2(\vec{BA} + \vec{AD}) = 2\vec{BD}$$

$$\vec{PQ} = \vec{PC} + \vec{CQ} = -\vec{CP} + \vec{CQ} = -3\vec{CD} + 3\vec{CB} = -3(\vec{CD} - \vec{CB})$$

$$\overline{PQ} = -3(\overline{CD} + \overline{BC}) = -3(\overline{BC} + \overline{CD}) = -3\overline{BD}$$

$$\textcircled{1} \overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{MN} \text{ يعني } \overline{MN} = 2\overline{BD} \text{ وجدنا}$$

$$\textcircled{2} \overline{BD} = -\frac{1}{3}\overline{PQ} \text{ يعني } \overline{PQ} = -3\overline{BD} \text{ وجدنا}$$

$$\text{من } \textcircled{1} \text{ و } \textcircled{2} \text{ نستنتج أن : } \frac{1}{2}\overline{MN} = -\frac{1}{3}\overline{PQ} \text{ أي } \overline{MN} = -\frac{2}{3}\overline{PQ}$$

ومنه المتجهتين \overline{MN} و \overline{PQ} مستقيمتان .

$$\text{وجدنا } \overline{MN} = -\frac{2}{3}\overline{PQ} \text{ اذن المستقيمان } (MN) \text{ و } (PQ) \text{ متوازيان}$$

2. التعريف المتجهي لمستقيم في الفضاء :

لتكن نقطة A من الفضاء و \vec{u} متجهة غير منعدمة المستقيم (D) الذي يمر من A و \vec{u} متجهة موجهة له نرمز له بالرمز $D(A; \vec{u})$ ولدينا :

$$M \in D \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}; \overline{AM} = k\vec{u}$$

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}; \overline{AM} = k\overline{AB}$$

3. التعريف المتجهي لمستوى في الفضاء :

A و B و C ثلاث نقط من الفضاء غير مستقيمية \overline{AB} و \overline{AC} متجهتين غير مستقيمتين و A و B و C تكون لنا مستوى $(P) = ABC$

نقول $(P) = ABC$ مستوى يمر من النقطة A و \overline{AB} و \overline{AC} متجهتين موجهتين له

$$\text{ونكتب : } P(A; \vec{u}; \vec{v}) = ABC$$

$$M \in P(A; \vec{u}; \vec{v}) \Leftrightarrow \overline{AM} \text{ مستوائية } \vec{u} \text{ و } \vec{v}$$

$$M \in P(A; \vec{u}; \vec{v}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}; \overline{AM} = k\vec{u}$$

$$M \in P(A; \vec{u}; \vec{v}) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R}; \overline{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

$$M \in ABC \Leftrightarrow \overline{AM} \text{ و } \overline{AC} \text{ و } \overline{AB} \text{ مستوائية}$$

تمرين

ليكن $ABCD$ رباعي الأوجه و M نقطة من الفضاء بحيث :

$$\overline{AM} = \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{DC}$$

1. أكتب المتجهة \overline{AM} بدلالة \overline{AB} و \overline{AC}

2. استنتج أن النقطة M تنتمي إلى المستوى (ABC)

3. استنتج أن المتجهات \overline{IJ} و \overline{AB} و \overline{EC} مستوائية .
(أجوبة: 1)

$$\overline{AM} = \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{DC} = \overline{AB} + \overline{BD} + \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{DA} + \overline{AC}$$

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{BA} + \overline{AC} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AB} - \overline{AB} + \overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AB} + 1 \times \overline{AC}$$

$$\text{وجدنا } \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} + 1 \times \overline{AC} \text{ ومنه النقطة } M \text{ تنتمي إلى}$$

المستوى (ABC)

$$\text{وجدنا } \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} + 1 \times \overline{AC} \text{ ومنه المتجهات } \overline{AM} \text{ و } \overline{AB}$$

و \overline{AC} مستوائية

