مذكرة رقم 12 في درس تحليلية الفضاء

الأهداف و القدرات المنتظرة من الدرس :

توجيهات تربوية	القدرات المنتظرة	محتوى البرنامج
- يتم تحديد المعلم والأساس انطلاقا من أربع نقط غير مستوائية؛ - يتم استعمال الإسقاط عل مستوى بتواز مع مستقيم لتقديم إحداثيات نقطة (دون الإفراط في تناول الإسقاط)؛ - يتم التركيز على الأداة التحليلية في دراسة الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات في الفضاء.	- ترجمة مفاهيم وخاصيات الهندسة التآلفية والهندسة المتجهية بواسطة الإحداثيات؛ - البرهنة على استقامية متجهتين؛ - البرهنة على استوائية ثلاث متجهات؛ - اختيار التمثيل المناسب (ديكارتي أو بارامتري) لدراسة الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات وفي تأويل النتائج.	- إحداثيات نقطة بالنسبة لمعلم؛ إحداثيات متجهة بالنسبة لأساس؛ إحداثيات $\vec{u}+\vec{v}$ و $\lambda\vec{u}$ ؛ إحداثيات $\overrightarrow{AB}$ ؛ - محددة ثلاث متجهات؛ - تمثيل بارامتري لمستقيم؛ الأوضاع النسبية لمستقيمين؛ - تمثيل بارامتري لمستوى؛ - معادلة ديكارتية لمستوى؛ الأوضاع النسبية لمستويين - معادلتان ديكارتيتان لمستقيم؛ - الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى.

I.إحداثيات نقطة بالنسبة لمعلم ، إحداثيات متجهة بالنسبة لأساس

▪ الأساس و المعلم في الفضاء

اذا كان $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاثة متجهات غير مستوائية و O نقطة من الفضاء.

نقول إن المثلوث $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أساس للفضاء ، و أن المربوع $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم في الفضاء.

ملحوظة: أربع نقط O و A و B و C غير مستوائية تحدد لنا أساسا مثلا : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$

و معلما في الفضاء مثلا : $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$.

خاصية: ليكن $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلما في الفضاء

لكل نقطة M من الفضاء توجد ثلاث أعداد حقيقية x و y و z بحيث: $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

و لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء يوجد مثلوث وحيد $(x;y;z)$ بحيث : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

- o $(x;y;z)$ يسمى مثلوث إحداثيات النقطة M بالنسبة للمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و نكتب $M(x;y;z)$.
- o x يسمى أفصول النقطة M بالنسبة للمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
- o y يسمى أرتوب النقطة M بالنسبة للمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
- o z يسمى أنسوب النقطة M بالنسبة للمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
- o $(x;y;z)$ يسمى مثلوث إحداثيات المتجهة $\vec{u}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و نكتب $\vec{u}(x;y;z)$.

تمرين1: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط A و B و C و D بحيث :

$\overrightarrow{OA}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ و $\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$ و

$\overrightarrow{OC}=\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$ و $\overrightarrow{AD}=3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$

1) حدد إحداثيات A و B و C و D في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

2) حدد إحداثيات المتجهات $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ في الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

أجوبة 1: $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ يعني $A(1;2;-3)$

$\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$ يعني $B(2;5;3)$

$\overrightarrow{OC}=\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$ يعني $C(1;-4;2)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}$ يعني $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OA}$

يعني $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AO}=3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}+\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}=4\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$

يعني $D(4;4;2)$

2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-(\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k})+2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}=-\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}+2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}=\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$ ومنه $\overrightarrow{AB}(1;3;6)$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=-(\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k})+\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$

$\overrightarrow{AC}=-\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}+\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}=0\vec{i}-6\vec{j}+5\vec{k}$ ومنه $\overrightarrow{AC}(0;-6;5)$

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ يعني $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}-2(0\vec{i}-6\vec{j}+5\vec{k})$

يعني $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}-2(0\vec{i}-6\vec{j}+5\vec{k})=\vec{i}+15\vec{j}-4\vec{k}$ ومنه $\vec{u}(1;15;-4)$

▪إحداثيات منتصف قطعة و المسافة بين نقطتين

خاصية: لتكن $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتين من الفضاء المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و I منتصف القطعة $[AB]$

1) مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

2) مثلوث إحداثيات النقطة I هو $I\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2};\frac{z_B+z_A}{2}\right)$

3) المسافة: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

مثال : $A(-3;2;1)$ و $B(5;3;-1)$ حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$ و مثلوث إحداثيات I منتصف القطعة $[AB]$ و المسافة AB

الجواب : $\overrightarrow{AB}(5+3;3-2;-1-1)$ يعني $\overrightarrow{AB}(8;1;-2)$

$I\left(\frac{5+(-3)}{2};\frac{3+2}{2};\frac{-1+1}{2}\right)$ يعني $I\left(1;\frac{5}{2};0\right)$

$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(5+3)^2+(3-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{64+1+4}=\sqrt{69}$

في كل ما يلي الفضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

II. محددة ثلاث متجهات في الفضاء

1. شرط استقامية متجهتين

خاصية1: لتكن $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ متجهتين غير منعدمتين.

المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k بحيث : $x'=kx$ و $y'=ky$ و $z'=kz$

ملحوظة: إذا كانت جميع إحداثيات كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير منعدمة فان : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان إذا وفقط إذا كانت $\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}$

خاصية2: لتكن $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ متجهتين من الفضاء .

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان مستقيميتان إذا وفقط إذا كانت :

$\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=0$

مثال: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المتجهات

$\vec{u}(1;-1;2)$ و $\vec{v}(-2;2;-4)$ و $\vec{w}(1;1;2)$

1) أدرس استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

2) أدرس استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{w}$

الأجوبة : 1) نحسب المحددات المستخرجة :لدينا

$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=4-4=0$ و $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-4+4=0$ و $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2-2=0$

ومنه المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين

2) نحسب المحددات المستخرجة :لدينا $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-2-2=-4\neq0$

ومنه المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{w}$ غير مستقيميتين

تمرين2: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط

$A(1;2;1)$ و $B(2;1;3)$ و $C(-1;4;-3)$ و $D(2;3;3)$

1. أدرس استقامية النقط A و B و C
2. أدرس استقامية النقط A و B و D

الأجوبة : 1) $\overrightarrow{AB}(2-1;1-2;3-1)$ يعني $\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$

$\overrightarrow{AC}(-1-1;4-2;-3-1)$ يعني $\overrightarrow{AC}(-2;2;-4)$

نحسب المحددات المستخرجة :لدينا

$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=4-4=0$ و $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-4+4=0$ و $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2-2=0$

ومنه المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتين وبالتالي النقط : A و B و C مستقيمية

2) $\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$ و $\overrightarrow{AD}(1;1;2)$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-2-2=-4\neq0$ ومنه المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مستقيميتين

وبالتالي النقط : A و B و D غير مستقيمية

2. متجهات مستوائية:

تعريف: لتكن $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ و $\vec{w}(x'';y'';z'')$ ثلاث متجهات من الفضاء .

العدد الحقيقي: $x(y'z''-z'y'')-y(x'z''-z'x'')+z(x'y''-y'x'')$

يسمى محددة المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ونرمز له

بأحد الرمزين : $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$ أو $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$

ومنه لدينا :

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

مثال: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المتجهات

$\vec{u}(-1;1;1)$ و $\vec{v}(0;-4;4)$ و $\vec{w}(-2;0;4)$

أحسب محددة المتجهات : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}=-1\times-16-1\times8+1\times(-8)=16-16=0$$

خاصية: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من الفضاء.

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهات مستوائية إذا وفقط إذا كانت $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$

ملاحظة : في المثال السابق المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية

نتيجة: المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية إذا وفقط إذا كانت $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\neq0$

تمرين3: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المتجهات

$\vec{u}(1;1;1)$ و $\vec{v}(-2;1;1)$ و $\vec{w}(0;1;2)$ و $\vec{x}(0;3;3)$

و $\vec{y}(1;m;2)$ حيث m بارا متر حقيقي.

1. بين أن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{x}$ مستوائية
2. بين أن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية
3. حدد العدد m بحيث تكون المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{y}$ مستوائية

أجوبة : 1)

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{x})=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{x})=3-3+6-6=0$

ومنه : المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{x}$ مستوائية

2)

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=1+4-2=3\neq0$

ومنه : المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية

3) $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{y}$ مستوائية يعني

يعني $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{y}\right)=0$ يعني $\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & m\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$ يعني

$1\begin{vmatrix}1 & m\\ 1 & 2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & m\end{vmatrix}=0$ يعني $6-3m=0$ يعني $m=2$

<u>تمرين4</u>: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ النقط : $A(1;1;-2)$ و $B(0;2;-1)$ و $C(1;-3;2)$ و $D(-1;1;2)$ و $E(1;1;3)$

1. بين أن النقط A و B و C وD مستوائية
2. بين أن النقط A و B و C وE مستوائية؟

<u>أجوبة :</u> 1) $\overrightarrow{AB}(-1;1;1)$ و $\overrightarrow{AC}(0;-4;4)$ و $\overrightarrow{AD}(-2;0;4)$ و

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & -4 & 0\\ 1 & 4 & 4\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 4 & 4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0 & -2\\ 4 & 4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0 & -2\\ -4 & 0\end{vmatrix}=0$$

ومنه : $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مستوائية و بالتالي النقط A و B و Cو D مستوائية

2) $\overrightarrow{AE}(0;0;5)$

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right)=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -4 & 0\\ 1 & 4 & 5\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 4 & 5\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0 & 0\\ 4 & 5\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0 & 0\\ -4 & 0\end{vmatrix}=20\neq 0$$

ومنه : $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}$ غير مستوائية و بالتالي النقط A و B و Cو E غير مستوائية

III. تمثيل بارامتري لمستقيم في الفضاء:

تعريف: لتكن $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(a;b;c)$ متجهة غير منعدمة من الفضاء.

النظمة: $\begin{cases}x=x_A+at\\ y=y_A+bt\\ z=z_A+ct\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$ تسمى تمثيلا بارا متريا للمستقيم $D\left(A;\vec{u}\right)$ المار من A و $\vec{u}$ متجهة موجهة له.

<u>تمرين5</u>: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ النقط : $A(1;3;1)$ و $B(2;1;2)$ و $C(3;-3;1)$ و $D(2;-1;0)$ المتجهة $\vec{u}(-1;4;1)$

1) حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (D) المار من A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}$
2) هل النقط $B(2;1;2)$ $C(3;-3;1)$ و $D(2;-1;0)$ تنتمي للمستقيم (D)؟
3) حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (BC)
4) أدرس الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (BC)

<u>أجوبة :</u> 1) $(D)\begin{cases}x=1-t\\ y=3+4t\\ z=1+t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

2) $\begin{cases}2=1-t\\ 1=3+4t\\ 2=1+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\ t=-\frac{1}{2}\\ t=-1\end{cases}$ ومنه $B\notin(D)$

$\begin{cases}3=1-t\\ -3=3+4t\\ 1=1+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\ t=-\frac{3}{2}\\ t=0\end{cases}$ ومنه $C\notin(D)$ و $\begin{cases}2=1-t\\ -1=3+4t\\ 0=1+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\ t=-1\\ t=-1\end{cases}$ ومنه $D\in(D)$

3) المستقيم (BC) يمر من النقطة $B(2;1;2)$ و $\overrightarrow{BC}(1;-4;-1)$

متجهة موجهة له اذن $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=2+1t\\ y=1-4t\\ z=2-t\end{cases}$ (BC)

4) $\overrightarrow{BC}(1;-4;-1)$ و $\vec{u}(-1;4;1)$

نلاحظ أن : $\overrightarrow{BC}=-\vec{u}$ ومنه $\overrightarrow{BC}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين وبالتالي المستقيمين (D) و (BC) متوازيين

<u>تمرين6</u>: ليكن (D) و (Δ) مستقيمين من الفضاء معرفان على التوالي بتمثيليهما البرامتريان : $(D)\begin{cases}x=1+t\\ y=1-t\\ z=1+t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

$(\Delta)\begin{cases}x=3+k\\ y=-1+2k\\ z=3-k\end{cases}\quad(k\in\mathbb{R})$

بين أن المستقيمين (D) و (Δ) غير متوازيين

<u>الجواب :</u> $\vec{u}(1;-1;1)$ متجهة موجهة لـ (D)

و $\vec{v}(1;2;-1)$ متجهة موجهة لـ (Δ)

نلاحظ أن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين

وبالتالي المستقيمين (D) و (Δ) غير متوازيين

IV. تمثيل بارامتري لمستوى في الفضاء – معادلة ديكارتية لمستوى

1. تمثيل بارامتري لمستوى في الفضاء

تعريف: لتكن $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ متجهتين غير مستقيمتين.

النظمة التالية : $(P):\begin{cases}x=x_A+at+a't'\\ y=y_A+bt+b't'\\ z=z_A+ct+c't'\end{cases}$

حيث $(t\in\mathbb{R})$ و$(t'\in\mathbb{R})$ تسمى تمثيلا بارامتريا للمستوى $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ المار من A و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

مثال : حدد تمثيلا بارا متريا للمستوى $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ حيث: $A(1;-3;1)$ و $\vec{u}(-2;4;1)$ و $\vec{v}(-1;0;2)$

<u>الجواب :</u> $(P):\begin{cases}x=1-2t-t'\\ y=-3+4t\\ z=1+t+2t'\end{cases}$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ و $(t'\in\mathbb{R})$ هو تمثيل بارا متريا للمستوى $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$

2. معادلة ديكارتية لمستوى

مثال: حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من $A(1;-3;1)$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}(-2;4;1)$ و $\vec{v}(-1;0;2)$

<u>الجواب :</u> نلاحظ أن $\vec{u}(-2;4;1)$ و $\vec{v}(-1;0;2)$ غير مستقيميتين

$M(x;y;z)\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية

يعني : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$ يعني : $\det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y+3;z-1)$ يعني : $\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1\\ y+3 & 4 & 0\\ z-1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}4&0\\1&2\end{vmatrix}-(y+3)\begin{vmatrix}-2&-1\\1&2\end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix}-2&-1\\4&0\end{vmatrix}=0$

يعني : $8(x-1)+3(y+3)+4(z-1)=0$ يعني : $8x-8+3y+9+4z-4=0$

يعني : $(P)\ :8x+3y+4z-3=0$

تعريف: لتكن $A(x_A;y_A;z_A)$ نقطة من الفضاء و $\vec u$ و $\vec v$ متجهتين غير مستقيميتين.

معادلة ديكارتيه للمستوى (P) المار من A و الموجه بالمتجهتين $\vec u$ و $\vec v$ تكتب على الشكل : $ax+by+cz+d=0$ حيث a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث : $(a;b;c)\neq(0;0;0)$.

خاصية: مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق العلاقة : $ax+by+cz+d=0$ بحيث : $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ هي مستوى

تمرين7: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $(o;\vec i;\vec j;\vec k)$

النقط $A(1;2;3)$ و $B(1;1;2)$ و $C(-1;2;-1)$

1) بين أن النقط A و B و C غير مستقيمية

2) أعط تمثيلا بارامتريا للمستوى (ABC)

3) أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

أجوبة : 1) $\overrightarrow{AB}(0;-1;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;0;-4)$

نحسب المحددات المستخرجة :لدينا $d_1=\begin{vmatrix}-1&0\\-1&-4\end{vmatrix}=4\neq0$

ومنه المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيميتين وبالتالي النقط : A و B و C غير مستقيمية

2) لدينا المستوى (ABC) يمر من النقطة A و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين موجهتين له اذن : $(P):\begin{cases}x=1+0t-2t'\\y=2-1t+0t'\\z=3-1t-4t'\end{cases}$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ و $(t'\in\mathbb{R})$

هو تمثيل بارامتري للمستوى (ABC)

3) $M(x;y;z)\in(ABC)$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستوائية

يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y-2;z-3)$ يعني : $\begin{vmatrix}x-1&0&-2\\y-2&-1&0\\z-3&-1&-4\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}-1&0\\-1&-4\end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix}0&-2\\-1&-4\end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix}0&-2\\-1&0\end{vmatrix}=0$

يعني : $4(x-1)+2(y-2)-2(z-3)=0$ يعني : $4x-4+2y-4-2z+6=0$

يعني : $4x+2y-2z-2=0$ يعني : $(P)\ :2x+y-z-1=0$

3. الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

خاصية: ليكن $(P)=P(A;\vec u;\vec v)$ و $(Q)=P(B;\vec u';\vec v')$ مستويين من الفضاء لدينا :

1. إذا كان : $\det(\vec u;\vec v;\vec u')=0$ و $\det(\vec u;\vec v;\vec v')=0$
فان : (P) و (Q) منطبقان أو متوازيان قطعا.
2. إذا كان : $\det(\vec u;\vec v;\vec u')\neq0$ أو $\det(\vec u;\vec v;\vec v')\neq0$
فان : (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم.

ملحوظة: ليكن (P) و (P') مستويين من الفضاء معرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$(P):ax+by+cz+d=0$ مع $(a;b;c)\neq(0;0;0)$

و $(P'):a'x+b'y+c'z+d'=0$ مع $(a';b';c')\neq(0;0;0)$

1. يكون المستويان (P) و (P') متقاطعين إذا وفقط إذا كان : $ab'-ba'\neq0$ أو $ac'-ca'\neq0$ أو $bc'-cb'\neq0$.
2. يكون المستويان (P) و (P') متوازيين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم k بحيث : $a'=ka$ و $b'=kb$ و $c'=kc$.
3. يكون المستويان (P) و (P') منطبقين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم k بحيث : $a'=ka$ و $b'=kb$ و $c'=kc$ و $d'=kd$

مثال : $(Q)\ :x-y-2z-3=0$ و $(P)\ :3x-3y-6z-2=0$

الجواب: المستويان (P) و (P') متوازيين قطعا $k=3$

تمرين8: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم $(o;\vec i;\vec j;\vec k)$ النقطة $A(1;1;0)$ و المتجهتين $\vec u(1;1;1)$ و $\vec v(1;-1;2)$

و المستوى (Q) الذي معادلة الديكارتية : $x+y-z+1=0$ (Q)

1) أعط معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من A و الموجه بالمتجهتين $\vec u$ و $\vec v$

2) أدرس الوضع النسبي للمستويين (Q) و (P).

الجواب : 1) نلاحظ أن $\vec u(1;1;1)$ و $\vec v(1;-1;2)$ غير مستقيميتين

$M(x;y;z)\in P(A;\vec u;\vec v)$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\vec u$ و $\vec v$ مستوائية

يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec u;\vec v)=0$ يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec u;\vec v)=0$

$\overrightarrow{AM}(x-1;y-1;z)$ يعني : $\begin{vmatrix}x-1&1&1\\y-1&1&-1\\z&1&2\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=0$

يعني : $3(x-1)-(y-1)-2z=0$ يعني : $(P)\ :3x-y-2z-2=0$

2) $(Q)\ :x+y-z+1=0$ و $(P)\ :3x-y-2z-2=0$

$3\times1-1\times(-1)=4\neq0$ اذن (P) و (Q) متقاطعين

V. معادلتان ديكارتيتان لمستقيم

تعريف وخاصية: ليكن $D(A;\vec u)$ المستقيم المار من $A(x_A;y_A;z_A)$ و $\vec u(a;b;c)$ متجهة موجهة له.

- إذا كانت: $a\neq0$ و $b\neq0$ و $c\neq0$ فان النظمة: $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$
تسمى : معادلتان ديكارتيتان للمستقيم D
- إذا كان أحد الأعداد a أو b أو c منعدما (مثلا $a=0$ و $b\neq0$ و $c\neq0$) فان النظمة: $x=x_A$ و $\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$ تسمى : معادلتان ديكارتيتان للمستقيم D
- إذا كان عددان من الأعداد a أو b أو c منعدمان (مثلا $a=0$ و $b=0$ و $c\neq0$) فان النظمة: $x=x_A$ و $y=y_A$ تسمى : معادلتان ديكارتيتان للمستقيم D .

مثال1 : حدد معادلتان ديكارتيتان للمستقيم $(D)=D(A;\vec{u})$.

حيث : $A(1;-1;2)$ و $\vec{u}(1;2;3)$ متجهة موجهة له.

الجواب : $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$ يعني $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$

$$\begin{cases}\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}\\ \frac{x-1}{1}=\frac{z-2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-1)=y+1\\ 3(x-1)=z-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y-3=0\\ 3x-z-1=0\end{cases}$$

مثال2 : حدد معادلتان ديكارتيتان للمستقيم $(D)=D(A;\vec{u})$.

حيث : $A(1;-1;3)$ و $\vec{u}(0;1;2)$ متجهة موجهة له.

الجواب : $\begin{cases}x=1\\ \frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 2(y+1)=z-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 2y-z+5=0\end{cases}$

VI. الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى في الفضاء- دراسة تحليلية:

مثال1: $(P): 3x-y-2z-2=0$ و $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\\ z=3+2t\end{cases}(D)$

أدرس الوضع النسبي للمستوى (P) و المستقيم (D)

الجواب : $(P): x+y-z+1=0$

اذن : $(1+t)+(2-t)-(3+2t)t+1=0$ يعني $t=\frac{1}{2}$ اذن : (D) يقطع المستوى (P) في النقطة :

$$\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\\ y=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\\ z=3+2\frac{1}{2}=4\end{cases}$$

$A\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};4\right)$ هي نقطة التقاطع

مثال2: $(P): 3x-y-2z-2=0$ و $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+t\\ z=-2+4t\end{cases}(D)$

أدرس الوضع النسبي للمستوى (P) و المستقيم (D)

الجواب : $(P): 5x+2y-3z-10=0$

اذن : $5(1+2t)+2(-1+t)-3(-2+4t)t-10=0$ يعني $-1=0$ غير ممكن

اذن : (D) و (P) متوازيان قطعا

خاصية: ليكن $(D)=D(A;\vec{w})$ و $(P)=P(B;\vec{u};\vec{v})$

- إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$ و $A\in(P)$ فان $(D)\subset(P)$
- إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$ و $A\notin(P)$ فان (D) يوازي قطعا (P)
- إذا كان $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\neq 0$ فان (D) يخترق (P).

مثال1 و $(D)=D(A;\vec{w})$ و $(P)=P(B;\vec{u};\vec{v})$ حيث $\vec{u}(1;-1;1)$ و $\vec{v}(0;1;0)$ و $\vec{v}(0;2;0)$ و $A(0;0;-1)$ و $B(1;0;0)$

1)حدد معادلة ديكارتية للمستوى $(P)=P(B;\vec{u};\vec{v})$

2)أدرس الوضع النسبي للمستوى (P) و المستقيم (D)

الجواب : 1)نلاحظ أن $\vec{u}(1;-1;1)$ و $\vec{v}(0;1;0)$ غير مستقيميتين

$M(x;y;z)\in P(B;\vec{u};\vec{v})$ يعني $\overrightarrow{BM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستوائية

يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$ يعني : $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$

$\overrightarrow{BM}(x-1;y;z)$ يعني : $\begin{vmatrix}x-1&1&0\\ y&-1&1\\ z&1&0\end{vmatrix}=0$

يعني : $(x-1)\begin{vmatrix}-1&1\\ 1&0\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}1&0\\ 1&0\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}1&0\\ -1&1\end{vmatrix}=0$

يعني : $-(x-1)-0+z=0$ يعني : $(P): -x+z+1=0$

(2 $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix}1&0&0\\ -1&1&2\\ 1&0&0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&2\\ 0&0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&0\\ 0&0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&0\\ 1&2\end{vmatrix}=0$

ولدينا $A\in(P)$ لأن:

$(P): -0-1+1=0$ ومنه $(D)\subset(P)$