أكاديمية الجهة الشرقية

الدرس الثالث :

عموميات حول الدوال

الأستاذ: نجيب عثماني

مستوى: السنة الأولى من سلك الباكالوريا

- **شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
- **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
ـ الدالة الزوجية؛ الدالة الفردية؛ التأويل المبياني؛ ـ الدالة المكبورة، الدالة المصغورة؛ الدالة المحدودة؛ ـ مقارنة دالتين؛ التأويل المبياني؛ ـ رتابة دالة عددية؛ معدل التغير ؛ ـ مطاريف دالة	ـ مقارنة تعبيرين باستعمال مختلف التقنيات؛ ـ استنتاج تغيرات دالة أو القيم القصوية والدنوية لدالة انطلاقا من تمثيلها المبياني أو من جدول تغيراتها؛ ـ المزاوجة بين قراءة وتأويل بعض التمثيلات المبيانية وبين بعض خاصيات الدوال.	ـ ينبغي تعويد التلاميذ على استنتاج تغيرات دالة عددية انطلاقا من تمثيلها المبياني؛ كما ينبغي الاهتمام بإنشاء المنحنيات؛ ـ يمكن في حدود الإمكان استعمال الآلات الحاسبة والبرانم المعلوماتية المدمجة في الحاسوب التي تمكن من دراسة الدوال.

I. تذكير

تمرين 1:

حدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

1) $f\left(x\right)=3x^2-x+1$ 　 2) $g\left(x\right)=\dfrac{x^3}{2x-4}$

3) $h\left(x\right)=\dfrac{5x+10}{x^2-9}$ 　 4) $m\left(x\right)=\sqrt{2x-4}$

الجواب: 1) $f\left(x\right)=3x^2-x+1$

يعني $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $g\left(x\right)=\dfrac{x^3}{2x-4}$ يعني $D_g=\left\{x\in\mathbb{R}/2x-4\neq0\right\}$

$2x-4=0$ يعني $2x=4$ يعني $x=2$ ومنه $D_g=\mathbb{R}-\left\{2\right\}$

3) $g\left(x\right)=\dfrac{x^3}{2x-4}$ يعني $D_g=\left\{x\in\mathbb{R}/2x-4\neq0\right\}$

$2x-4=0$ يعني $2x=4$ يعني $x=2$

ومنه $D_g=\mathbb{R}-\left\{2\right\}$

تمرين 2: حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية:

1) $f\left(x\right)=x^3-3x^2-5x+10$ 　 2) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+x-1}{4x-12}$

3) $f\left(x\right)=\dfrac{x+10}{4x^2-1}$ 　 4) $f\left(x\right)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$

5) $f\left(x\right)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$ 　 6) $f\left(x\right)=\sqrt{-3x+6}$

الجواب: 1) $f\left(x\right)=x^3-3x^2-5x+10$

يعني $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+x-1}{4x-12}$ يعني $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/4x-12\neq0\right\}$

$4x-12=0$ يعني $4x=12$ يعني $x=3$ ومنه $D_f=\mathbb{R}-\left\{3\right\}$

3) $f\left(x\right)=\dfrac{x+10}{4x^2-1}$ يعني $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/4x^2-1\neq0\right\}$

$4x^2-1=0$ يعني $\left(2x\right)^2-1^2=0$ يعني $\left(2x-1\right)\left(2x+1\right)=0$

يعني $2x-1=0$ أو $2x+1=0$ يعني $x=\frac{1}{2}$ أو $x=-\frac{1}{2}$ ومنه

$D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$

4) $f\left(x\right)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$ يعني $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^3-2x\neq0\right\}$

$x^3-2x=0$ يعني $x\left(x^2-2\right)=0$ يعني $x^2-3=0$ أو $x=0$

يعني $x^2=3$ أو $x=0$ يعني $x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$ أو $x=0$

ومنه $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{3};0;\sqrt{3}\right\}$

5) $f\left(x\right)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$

يعني $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-5x-3\neq0\right\}$

$2x^2-5x-3=0$ نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=-5$ و $c=-3$

$$\Delta=b^2-4ac=\left(-5\right)^2-4\times2\times\left(-3\right)=25+24=49=\left(7\right)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-\left(-5\right)+\sqrt{49}}{2\times2}=\dfrac{7+5}{4}=\dfrac{12}{4}=3$ و $x_2=\dfrac{\left(-5\right)-\sqrt{49}}{2\times2}=\dfrac{5-7}{4}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

ومنه: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};3\right\}$

6) $f\left(x\right)=\sqrt{-3x+6}$ يعني $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/-3x+6\geq0\right\}$

$-3x+6\geq0$ يعني $-3x\geq-6$ يعني $x\leq\dfrac{-6}{-3}$ يعني $x\leq2$ ومنه $D_m=\left]-\infty;2\right]$

تمرين 3: أدرس زوجية الدالة f في الحالات التالية:

(1 $f(x)=3x^2$. (2 $f(x)=\frac{4}{x}$ (3 $f(x)=2x^5-3x$

(4 $f(x)=\frac{x^4-2}{2x^2-1}$ (5 $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

تمرين 4: نعتبر الدوال f و g المعرفة كالتالي:

$g(x)=\frac{3x}{9x^2-1}$

1) حدد (D_g) مجموعة تعريف الدالة g.

2) أدرس زوجية الدالة g. و أعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

الأجوبة : (1 $g(x)=\frac{x^4}{9x^2-1}$ $D_g=\{x\in\mathbb{R}/9x^2-1\neq0\}$

$9x^2-1=0$ يعني $x=-\frac{1}{3}$ أو $x=\frac{1}{3}$ ومنه:

$D_g=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}$

2) دراسة زوجية الدالة g :

2) أ) لكل x من $D_g=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $D_g=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}$.

ب) $g(-x)=\frac{3(-x)}{9(-x)^2-1}=-\frac{3x}{9x^2-1}=-g(x)$ ومنه g دالة فردية

التأويل المبياني: النقطة 0 مركز تماثل لمنحنى الدالة g.

التأويلات المبيانية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و C_f منحناها في معلم متعامد منظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

❖ تكون f دالة زوجية إذا و فقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل المنحنى C_f.

❖ تكون f دالة فردية إذا و فقط إذا كانت النقطة 0 مركز تماثل المنحنى C_f.

II. الدالة المكبورة و الدالة المصغورة و الدالة المحدودة

نشاط : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

1.حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2.بين أن: $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)\le1$

3.بين أن: $\forall x\in\mathbb{R}\quad 0\le f(x)$

4.ماذا تستنتج؟ماذا نقول عن الدالة f ؟

الأجوبة: (1 $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq0\}$

$x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=-1$ و هذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

$D_f=\mathbb{R}$

(2 نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ x^2\ge0$

اذن: $x^2+1\ge0+1$ يعني $x^2+1\ge1$

يعني $\frac{1}{x^2+1}\le1\Leftrightarrow f(x)\le1\ \forall x\in\mathbb{R}$

نقول f دالة مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 1

سؤال: هل الدالة f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 2؟ نعم

(3 نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ x^2\ge0$

اذن: $x^2+1\ge0+1$ يعني $x^2+1\ge1$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ 0\le f(x)$

نقول f دالة مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 0

سؤال: هل الدالة f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد -1؟ نعم

4)نستنتج أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 0\le f(x)\le1$

اذن : f مكبورة و مصغورة على $\mathbb{R}$ نقول f دالة محدودة على $\mathbb{R}$

1. تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

- نقول إن f دالة مكبورة على مجال I إذا وجد عدد حقيقي M بحيث : $\forall x\in I\quad f(x)\le M$
- نقول إن f دالة مصغورة على مجال I إذا وجد عدد حقيقي m بحيث : $\forall x\in I\quad f(x)\ge m$
- نقول إن f دالة محدودة على مجال I إذا كانت مكبورة و مصغورة على المجال I.

تمرين 5: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-2x+5$

بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 4

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 4\le f(x)$

اذن نحسب الفرق : $f(x)-4=x^2-2x+5-4=x^2-2x+1=(x-1)^2\ge0$

ومنه: $\forall x\in\mathbb{R}\ 4\le f(x)$

وبالتالي f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 4

تمرين 6: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=-2x^2+4x+1$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد 3

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le3$

اذن نحسب الفرق : $3-f(x)=3-(-2x^2+4x+1)=3+2x^2-4x-1$

$3-f(x)=2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2\ge0$

ومنه: $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le3$

وبالتالي f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 3

III. مطاريف دالة عددية

نشاط1: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^2+2$

1. أحسب : $f(0)$
2. أحسب : $f(x)-f(0)$ وماذا تستنتج؟

الأجوبة: (1 $D_f=\mathbb{R}$ و $f(0)=2$

(2 $f(x)-f(0)=x^2+2-2=x^2$

نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 0\le x^2$

اذن: $f(x)-f(0)\ge0$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ f(0)\le f(x)$

نقول $f(0)$ هي قيمة دنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

نشاط2: لتكن f دالة معرفة ب:. $f(x)=-x^2+2x+1$

1) أحسب $f(1)$ و $f(1)-f(x)$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

2) ماذا تستنتج؟

الأجوبة:(1 $D_f=\mathbb{R}$ و $f(1)=2$

$f(1)-f(x)=2-(-x^2+2x+1)=2+x^2-2x-1$

$f(1)-f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\ge 0$

اذن: $\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(1)\ge f(x)$

نقول $f(1)$ هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و a عنصرا من المجال I

■ نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال I, إذا كان: $\forall x\in I \quad f(x)\le f(a)$

■ نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال I, إذا كان: $\forall x\in I \quad f(x)\ge f(a)$

تمرين 7: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^2+4$

1) حدد D_f

2) أحسب: $f(0)$

3) بين أن $f(0)$ هي قيمة دنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين 8: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=-x^2+1$

1) حدد D_f

2) أحسب: $f(0)$

3) بين أن $f(0)$ هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

IV. مقارنة دالتين

نشاط1: لتكن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=2x-1$ و $g(x)=x^2$

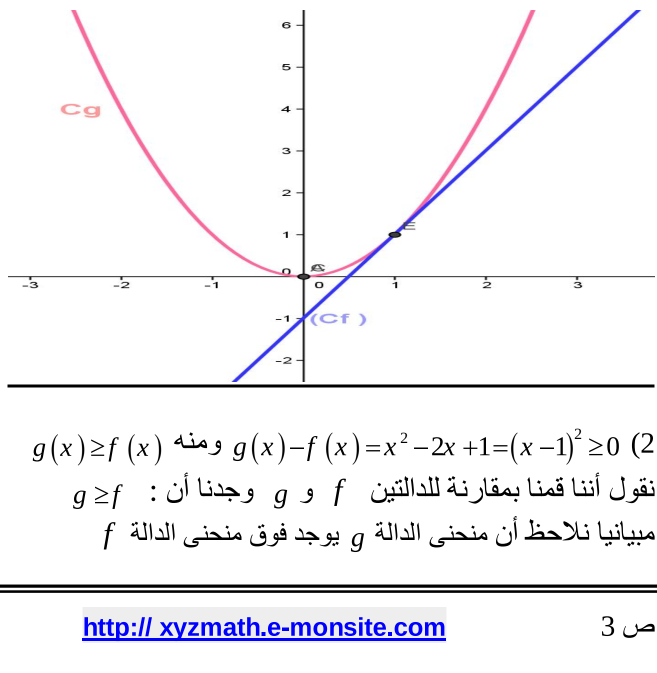
1. املأ الجدولين التاليين ومثل الدالتين f و g في نفس المعلم

x	0	1
$f(x)$	-1	1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	9	4	1	0	1	4	9

2. أدرس اشارة الفرق: $g(x)-f(x)$ وماذا تستنتج مبيانيا؟

الأجوبة:(1 $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية



(2 $g(x)-f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\ge 0$ ومنه $g(x)\ge f(x)$

نقول أننا قمنا بمقارنة للدالتين f و g وجدنا أن: $g\ge f$

مبيانيا نلاحظ أن منحنى الدالة g يوجد فوق منحنى الدالة f

1.تعريف :

لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي مجموعة تعريفهما.

نقول إن f تساوي g ونكتب $f=g$ إذا وفقط إذا كان:

$D_g=D_f$ و $(\forall x\in D_f)\ \ f(x)=g(x)$

2.**تعريف:** لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I . نقول إن f أصغر من أو يساوي g على مجال I ونكتب $f\le g$ إذا وفقط إذا كان:

$(\forall x\in I)\ \ f(x)\le g(x)$

3.**التأويل الهندسي :** $f\le g$ على مجال I يعني هندسيا أن منحنى الدالة f يوجد تحت منحنى الدالة g على المجال I .

ملحوظة :

- $f<g$ على المجال I إذا وفقط إذا كان: $(\forall x\in I)\ f(x)<g(x)$
- $f\ge 0$ على المجال I إذا وفقط إذا كان: $(\forall x\in I)\ f(x)\ge 0$

V.رتابة دالة عددية

- يمكن دراسة رتابة دالة f على مجال I بدراسة إشارة معدل التغير: $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ مع x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من I
- نقول إن f دالة رتيبة على I إذا كانت f تزايدية قطعا أو تناقصية قطعا على مجال I.

نشاط1: لتكن الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=4x-3$

(1 حدد D_f

(2 أدرس رتابة f

(3 حدد جدول تغيرات الدالة f

أجوبة :

(1 $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2ليكن: $x_1\in\mathbb{R}$ و $x_2\in\mathbb{R}$ بحيث $x_1\ne x_2$

نحسب معدل تغير الدالة f: $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(4x_2-3)-(4x_1-3)}{x_2-x_1}=\frac{4x_2-4x_1}{x_2-x_1}=\frac{4(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

ومنه : $T=4\ge 0$ وبالتالي الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

(3جدول التغيرات

x	$-\infty \quad\quad +\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

نشاط2: لتكن الدالة g المعرفة كالتالي: $g(x)=-3x+2$

(1 حدد D_g

(2 أدرس رتابة g

(3 حدد جدول تغيرات الدالة g

أجوبة :

1) $D_g=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) ليكن : $x_1\in\mathbb{R}$ و $x_2\in\mathbb{R}$ بحيث $x_1\neq x_2$

نحسب معدل تغير الدالة g : $\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	2	8	18

$$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(-3x_2+2)-(-3x_1+2)}{x_2-x_1}=\frac{-3x_2+3x_1}{x_2-x_1}=\frac{-3(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

ومنه : $T=-3\leq 0$ وبالتالي الدالة g تناقصية على $\mathbb{R}$

3) جدول التغيرات

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$g(x)$	↘

تمرين 9: لتكن الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=12x-7$

1) حدد D_f

2) أدرس رتابة f

3) حدد جدول تغيرات الدالة f

تمرين 10: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=2x^2$.

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2) أدرس زوجية الدالة f

3) أحسب معدل تغير الدالة f

4) أدرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0]$

5) وحدد جدول تغيرات الدالة f .

6) حدد مطاريف الدالة f

7) أرسم التمثيل المبياني للدالة f

أجوبة : 1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) أ) لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$.

ب) $f(-x)=2(-x)^2=2x^2=f(x)$

ومنه f دالة زوجية

3) حساب معدل تغير الدالة f

$$T=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{2x_2^2-2x_1^2}{x_2-x_1}=\frac{2(x_2^2-x_1^2)}{x_2-x_1}$$

$$T=\frac{2(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1}=2(x_2+x_1)$$

4) أ) دراسة رتابة الدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

ليكن : $x_1\in[0;+\infty[$ و $x_2\in[0;+\infty[$

اذن $T=2(x_2+x_1)\geq 0$

ومنه الدالة f تزايدية على $[0;+\infty[$

ب) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]-\infty;0]$:

ليكن : $x_1\in]-\infty;0]$ و $x_2\in]-\infty;0]$

اذن $T=2(x_2+x_1)\leq 0$

ومنه الدالة f تناقصية على $]-\infty;0]$

5) حدد جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

6) f تقبل قيمة دنيا عند $x_0=0$

7) رسم التمثيل المبياني للدالة f