

مذكرة رقم 3 في درس المرجح
الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- مرجح n نقطة ($2 \leq n \leq 4$)؛ مركز النقل؛ - الخاصية المميزة للمرجح؛ الصمود؛ التجميعية؛ - إحدائتا المرجح في معلم معلوم.	- استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي؛ - إنشاء مرجح n نقطة ($2 \leq n \leq 4$)؛ - استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى؛ - استعمال المرجح في إثبات تقاطع المستقيمت؛ - استعمال المرجح في حل مسائل هندسية وفيزيائية.	- قبل تعريف المرجح يستحسن التحسيس بالارتباط الموجود بين مفهوم المرجح في الرياضيات ومفاهيم أخرى من بعض مواد التخصص؛ - ينبغي إبراز الدور الذي يلعبه المرجح في حل بعض المسائل الهندسية.

I. مرجح نقطتين متزنيتين

نشاط 1: لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى

(1) بين أنه توجد نقطة G بحيث: $4\overline{GA} - 5\overline{GB} = \overline{0}$ (E)

(2) أنشئ النقطة G

الأجوبة: (1) نلاحظ أن: $4 + (-5) \neq 0$

$4\overline{GA} - 5\overline{GB} = \overline{0}$ يعني $4\overline{GA} - 5(\overline{GA} + \overline{AB}) = \overline{0}$ (استعمال علاقة شال)

يعني $4\overline{GA} - 5\overline{GA} - 5\overline{AB} = \overline{0}$ يعني $-\overline{GA} - 5\overline{AB} = \overline{0}$ يعني $\overline{AG} = 5\overline{AB}$

اذن توجد نقطة وحيدة G على المستقيم (AB) تحقق (E)

(2)



نشاط 2: لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى

هل توجد توجد نقطة G بحيث: $2\overline{GA} - 2\overline{GB} = \overline{0}$

الجواب: نلاحظ أن: $2 - 2 = 0$

$2\overline{GA} - 2\overline{GB} = \overline{0}$ يعني $2\overline{GA} - 2(\overline{GA} + \overline{AB}) = \overline{0}$ (استعمال علاقة شال)

يعني $2\overline{GA} - 2\overline{GA} - 2\overline{AB} = \overline{0}$ يعني $2\overline{AB} = \overline{0}$ وهذا غير ممكن

اذن لا توجد نقطة G تحقق (E)

1.1 نقطة متزنة

لتكن A نقطة من المستوى و a عددا حقيقيا

الزوج $(A; a)$ يسمى نقطة متزنة و العدد a يسمى وزن النقطة A

(نقول كذلك أن النقطة A معينة بالمعامل a).

1.2 خاصية و تعريف

لتكن $(A; a)$ و $(B; b)$ نقطتين متزنيتين من المستوى بحيث $a + b \neq 0$

توجد نقطة وحيدة G من المستوى بحيث: $a\overline{GA} + b\overline{GB} = \overline{0}$

النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنيتين $(A; a)$ و $(B; b)$

ملاحظة 1: إذا كانت $a + b = 0$ فان النقطتين المتزنيتين $(A; a)$ و $(B; b)$

ليس لهم مرجح

ملاحظة 2: إذا كانت النقطة G مرجح النقطتين المتزنيتين $(A; a)$ و $(B; b)$

فان: $\overline{AG} = \frac{b}{a+b} \overline{AB}$ (استعمال علاقة شال) وهذه الكتابة تستعمل لرسم

النقطة G

تمرين 1:

1. أنشئ G مرجح النقطتين $(A; -2)$ و $(B; 3)$ ثم أنشئ G' مرجح

النقطتين $(A; 2)$ و $(B; 1)$

2. أحسب $\overline{GG'}$ بدلالة \overline{AB}

الأجوبة: (1) لدينا G مرجح النقطتين $(A; -2)$ و $(B; 3)$ باستعمال العلاقة

① نجد:

② $\overline{AG} = 3\overline{AB}$ يعني $\overline{AG} = \frac{3}{(-2)+3} \overline{AB}$

ولدينا G' مرجح النقطتين $(A; 2)$ و $(B; 1)$ وباستعمال العلاقة ① نجد

③ $\overline{AG'} = \frac{1}{1+2} \overline{AB}$ يعني $\overline{AG'} = \frac{1}{3} \overline{AB}$



(2) اذن: $\overline{GG'} = \overline{GA} + \overline{AG'} = -\overline{AG} + \overline{AG'} = -3\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AB} = \left(-3 + \frac{1}{3}\right)\overline{AB} = -\frac{8}{3}\overline{AB}$

1.3 خاصيات مرجح نقطتين متزنيتين

نشاط أو تمرين 2: أنشئ G مرجح النقطتين المتزنيتين $(A; -0,003)$

و $(B; -0,001)$ حيث $A \neq B$

الجواب: G مرجح النقطتين المتزنيتين $(A; -0,003)$ و $(B; -0,001)$

يعني $0,003\overline{GA} - 0,001\overline{GB} = \overline{0}$ نضرب طرفي المتساوية في نفس العدد:

$k = 1000$

يعني $3\overline{GA} - \overline{GB} = \overline{0}$ يعني G مرجح النقطتين المتزنيتين $(A; -3)$

و $(B; -1)$

وباستعمال العلاقة ① نجد: $\overline{AG} = \frac{-1}{(-1)+(-3)} \overline{AB}$ يعني $\overline{AG} = \frac{1}{4} \overline{AB}$ ومنه

الرسم:



1.3.1 الصمود

مرجح نقطتين متزنيتين لا يتغير بضرب معامليهما في عدد حقيقي غير منعدم:

إذا كان G مرجح النقطتين المتزنيتين $(A; a)$ و $(B; b)$ فان لكل k من \mathbb{R}^* ,

G هو كذلك مرجح النقطتين المتزنيتين $(A; ka)$ و $(B; kb)$

تمرين 3: ليكن G مرجح النقطتين المتزنيتين $(A; \sqrt{8})$ و $(B; -\sqrt{2})$

بين أن G مرجح النقطتين: $(A; -2)$ و $(B; 1)$

الجواب: حسب خاصية الصمود نضرب وزني النقطتين في نفس العدد

الحقيقي و المرجح لا يتغير نأخذ: $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ اذن: G مرجح النقطتين:

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ نلاحظ أن: $(A; -2)$ و $(B; 1)$ أي: $\left(B; -\sqrt{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ و $\left(A; -\sqrt{8} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

1.3.2. الخاصية المميزة

لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ نقطتين مترنيتين من المستوى بحيث $a+b \neq 0$ ولتكن G نقطة من المستوى

G مرجح النقطتين المترنيتين $(A;a)$ و $(B;b)$ إذا وفقط إذا لكل نقطة M

$$a\overline{MA} + b\overline{MB} = (a+b)\overline{MG}$$

البرهان : لتكن M نقطة من المستوى

$$a\overline{MA} + b\overline{MB} = a(\overline{MG} + \overline{GA}) + b(\overline{MG} + \overline{GB})$$

$$a\overline{MA} + b\overline{MB} = (a+b)\overline{MG} + a\overline{GA} + b\overline{GB}$$

G مرجح النقطتين المترنيتين $(A;a)$ و $(B;b)$ يعني $a\overline{GA} + b\overline{GB} = \overline{0}$

$$a\overline{MA} + b\overline{MB} = (a+b)\overline{MG}$$

استنتاج : بوضع : $M = A$ (على التوالي $M = B$) في الخاصية

$$\overline{AG} = \frac{b}{a+b} \overline{AB}$$

(على التوالي $\overline{BG} = \frac{a}{a+b} \overline{BA}$) وهذه الكتابات تمكننا من رسم النقطة G

وتبين لنا أن : A و B و G نقط مستقيمة.

تمرين 4: ليكن E و F نقطتين من المستوى بحيث: $\overline{EG} = 2\overline{EF}$ و $E \notin (AB)$

(1) بين أن : G مرجح النقطتين المترنيتين $(E;-1)$ و $(F;2)$

(2) استنتج أن المستقيمين (EF) و (AB) يتقاطعان محددًا نقطة تقاطعها.

الأجوبة:

$$(1) \overline{EG} = 2\overline{EF} \text{ يعني } \overline{EG} = 2(\overline{EG} + \overline{GF}) \text{ (استعمال علاقة شال)}$$

$$\text{يعني } \overline{EG} = 2\overline{EG} + 2\overline{GF}$$

$$\text{يعني } -\overline{EG} - 2\overline{GF} = \overline{0}$$

يعني $\overline{EG} + 2\overline{GF} = \overline{0}$ يعني $-\overline{GE} + 2\overline{GF} = \overline{0}$ يعني G مرجح النقطتين المترنيتين $(E;-1)$ و $(F;2)$

(2) لدينا G مرجح النقطتين المترنيتين $(A;2)$ و $(B;-3)$ اذن : $G \in (AB)$

ولدينا G مرجح النقطتين المترنيتين $(E;-1)$ و $(F;2)$ اذن : $G \in (EF)$ اذن المستقيمين (AB) و (EF) لديهم نقطة مشتركة وغير منطقيين (لأن : $E \notin (AB)$)

وبالتالي : المستقيمين (EF) و (AB) يتقاطعان و G هي نقطة تقاطعها.

تمرين 5: لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى.

ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$ و G مرجح النقطتين $(A;3)$ و $(B;-5)$

حدد مجموعة النقط G من المستوى P بحيث :

$$\|3\overline{MA} - 5\overline{MB}\| = \|\overline{MA} + \overline{MB}\|$$

$$\|3\overline{MA} - 5\overline{MB}\| = \|\overline{MA} + \overline{MB}\|$$

G مرجح النقطتين $(A;3)$ و $(B;-5)$ اذن حسب الخاصية المميزة للمرجح فان :

$$3\overline{MA} - 5\overline{MB} = (3 + (-5))\overline{MG} = -2\overline{MG}$$

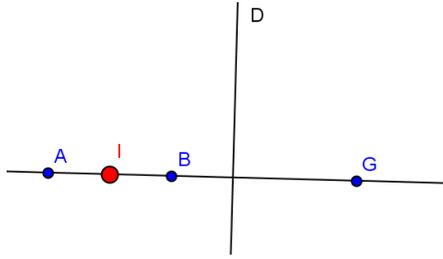
ولدينا $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MI} + \overline{IA} + \overline{MI} + \overline{IB} = 2\overline{MI} + \overline{IA} + \overline{IB}$ و I منتصف القطعة $[AB]$

$$\text{فان : } \overline{IA} + \overline{IB} = \overline{0} \text{ منه : } \overline{MA} + \overline{MB} = 2\overline{MI}$$

$$\| -2\overline{MG} \| = \| 2\overline{MI} \| \text{ يعني } \| \overline{MG} \| = \| \overline{MI} \|$$

$$\| 3\overline{MA} - 5\overline{MB} \| = \| \overline{MA} + \overline{MB} \|$$

يعني $2MG = 2MI$ يعني $MG = MI$ ومنه مجموعة النقط هي واسط القطعة $[GI]$



II. إحدائتي المرجح:

المستوى منسوب إلى معلم (o, \vec{i}, \vec{j}) و لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ نقطتين مترنيتين من المستوى

إذا كان G مرجح النقطتين المترنيتين $(A;a)$ و $(B;b)$ فان إحدائتي

$$G \text{ هما : } \begin{cases} x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a+b} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B}{a+b} \end{cases}$$

ملاحظة : I منتصف القطعة $[AB]$ يعني I مرجح النقطتين المترنيتين $(A;1)$ و $(B;1)$

مثال: نعتبر النقطتين : $A(1;2)$ و $B(-4;6)$ وليكن G مرجح

النقطتين المترنيتين $(A;2)$ و $(B;-1)$

أحسب إحدائتي G

$$\text{الجواب: اذن : } G(6;-2) \begin{cases} x_G = \frac{2 \times 1 + (-1) \times (-4)}{2 + (-1)} = \frac{6}{1} = 6 \\ y_G = \frac{2 \times 2 + (-1) \times 6}{2 + (-1)} = \frac{-2}{1} = -2 \end{cases}$$

تمرين 6: في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر النقطتين : $A(-2;5)$ و $B(2;1)$ وليكن G مرجح النقطتين المترنيتين $(A;1)$ و $(B;3)$

(1) أحسب إحدائتي G

(2) حدد إحدائتي النقطة H بحيث G مرجح النقطتين المترنيتين

$(O;3)$ و $(H;1)$

(3) بين أن : المستقيمين (AH) و (OB) متوازيان.

$$\text{الأجوبة: (1) اذن : } G(1;2) \begin{cases} x_G = \frac{1 \times (-2) + 3 \times 2}{3 + 1} = \frac{4}{4} = 1 \\ y_G = \frac{1 \times 5 + 3 \times 1}{3 + 1} = \frac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

(2) طريقة 1: G مرجح النقطتين المترنيتين $(H;1)$ و $(O;3)$ يعني :

$$\begin{cases} x_G = \frac{1 \times x_H + 3 \times x_O}{3 + 1} = 1 \\ y_G = \frac{1 \times y_H + 3 \times y_O}{3 + 1} = 2 \end{cases}$$

لدينا $O(0;0)$ يعني : $\begin{cases} x_H = 4 \\ y_H = 8 \end{cases}$ اذن : $H(4;8)$

طريقة 2: G مرجح النقطتين المترنيتين $(H;1)$ و $(O;3)$ يعني : $\overline{OG} = \frac{1}{4} \overline{OH}$

G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ إذا و فقط إذا لكل

نقطة M من المستوى

$$a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC} = (a+b+c)\overline{MG} :$$

استنتاج: بوضع $M = A$ في الخاصية المميزة نحصل على :

$$\overline{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overline{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overline{AC}$$

تمكننا من رسم النقطة G

مثال أو تمرين 8: ليكن ABC مثلثا و G نقطة بحيث $2\overline{AC} = 3\overline{AG} - \overline{GB}$

بين أن G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$

و أنشئ النقطة G

$$\overline{2AC} - 3\overline{AG} + \overline{GB} = \overline{0} \text{ يعني } \overline{2AC} = 3\overline{AG} - \overline{GB}$$

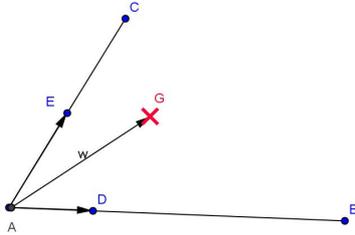
$$\overline{-AG} + \overline{GB} + 2\overline{GC} = \overline{0} \text{ يعني } 2(\overline{AG} + \overline{GC}) - 3\overline{AG} + \overline{GB} = \overline{0}$$

$$\overline{GA} + \overline{GB} + 2\overline{GC} = \overline{0}$$

ومنه G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$

$$\overline{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overline{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overline{AC} \text{ فان } \textcircled{R}$$

أي $\overline{AG} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{2}{4}\overline{AC}$ يعني $\overline{AG} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{2}{4}\overline{AC}$ ومنه رسم G



تمرين 9: لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى. و G مرجح

النقط المتزنة $(A;2)$ و $(B;-1)$ و $(C;1)$

$$\text{حدد المجموعة: } E = \left\{ M \in P / \left\| 2\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC} \right\| = 6 \text{ cm} \right\}$$

حيث P هو المستوى.

$$\overline{2MA} - \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0} \text{ يعني } \left\| 2\overline{MG} \right\| = 6 \text{ cm} \text{ حسب}$$

الخاصية المميزة للمرجح

$$\overline{2MG} = 6 \text{ cm} \text{ يعني } \left\| 2\overline{MG} \right\| = 6 \text{ cm} \text{ يعني } \left\| \overline{MG} \right\| = 3 \text{ cm}$$

ومنه مجموعة النقط هي الدائرة (C) التي مركزها G وشعاعها $r=3\text{cm}$

(ج) تجميعية المرجح:

تكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ ثلاث نقط من المستوى بحيث

$$a+b \neq 0 \text{ و } a+b+c \neq 0$$

إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ وكانت H

مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$

فان G مرجح $(H;a+b)$ و $(C;c)$

تمرين 10: ليكن G مركز ثقل المثلث ABC و I منتصف القطعة $[BC]$

بين أن G مرجح النقطتين $(A;1)$ و $(I;2)$

الجواب: G مركز ثقل المثلث ABC يعني G مرجح النقط

المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$

I منتصف القطعة $[BC]$ يعني I مرجح النقطتين $(B;1)$ و $(C;1)$

وحسب خاصية تجميعية المرجح فان G هو مرجح النقطتين $(A;1)$ و

$$(I;1+1)$$

$$\overline{OG}(1;2) \text{ و } \frac{1}{4}\overline{OH}\left(\frac{1}{4}x_H; \frac{1}{4}y_H\right)$$

$$H(4;8) \text{ اذن } \begin{cases} x_H = 4 \\ y_H = 8 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \frac{x_H}{4} = 1 \\ \frac{y_H}{4} = 2 \end{cases} \text{ يعني } \overline{OG} = \frac{1}{4}\overline{OH}$$

$$\overline{AH}(6;2) \text{ و } \overline{OB}(6;2) \text{ اذن: نلاحظ أن } \overline{AH} = 3\overline{OB}$$

ومنه المستقيمين (AH) و (OB) متوازيان لأن المتجهتين :

\overline{AH} و \overline{OB} مستقيمتان

تمرين 7: في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر

النقطتين $A(0;5)$ و $B(3;2)$ و ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين

$(A;1)$ و $(B;2)$

(1) أحسب إحداثيتي G

(2) حدد و أرسم مجموعة النقط M من المستوى P بحيث :

$$\left\| \overline{MA} + 2\overline{MB} \right\| = 6$$

$$G(2;3) \text{ اذن } \begin{cases} x_G = \frac{0+6}{3} = 2 \\ y_G = \frac{5+4}{3} = 3 \end{cases} \text{ (الأجوبة: 1)}$$

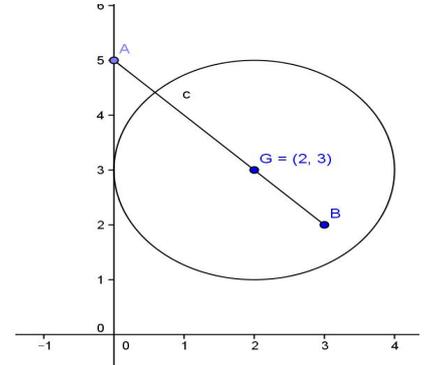
$$\left\| \overline{MA} + 2\overline{MB} \right\| = 6 \text{ cm} \text{ يعني } \left\| 3\overline{MG} \right\| = 6 \text{ cm} \text{ حسب الخاصية}$$

المميزة للمرجح

$$\left\| \overline{MG} \right\| = 2 \text{ cm} \text{ يعني } \left\| 3\overline{MG} \right\| = 6 \text{ cm} \text{ يعني } 3MG = 6 \text{ cm} \text{ يعني } MG = 2 \text{ cm}$$

ومنه مجموعة النقط هي الدائرة (C) التي مركزها G وشعاعها

$$r = 2 \text{ cm}$$



III. مرجح ثلاث نقط متزنة:

1.1. خاصية و تعريف

لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ ثلاث نقط متزنة من المستوى بحيث

$$a+b+c \neq 0$$

توجد نقطة وحيدة G من المستوى بحيث $a\overline{GA} + b\overline{GB} + c\overline{GC} = \overline{0}$

النقطة G تسمى مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$.

حالة خاصة: إذا كان $a=b=c$ فان مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و

$(B;b)$ و $(C;c)$ يسمى كذلك مركز ثقل المثلث ABC

1.2. خاصيات مرجح ثلاث نقط متزنة

(أ) الصمود: إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و

$(C;c)$ فان لكل k من \mathbb{R}^* هي كذلك مرجح النقط المتزنة

$$(A;ka) \text{ و } (B;kb) \text{ و } (C;kc)$$

(ب) الخاصية المميزة: لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ ثلاث نقط

من المستوى بحيث $a+b+c \neq 0$ و لتكن G نقطة من المستوى

تمرين 11: لتكن A و B و C و D ثلاث نقط من المستوى. حدد مجموعة النقط من المستوى بحيث :

$$\|2\overline{MA} - \overline{MB} + 3\overline{MC} - 5\overline{MD}\| = 5\text{cm}$$

1.3. إحدائيتا مرجح ثلاث نقط

إذا كان G مرجح النقط المترزنة $(A; a)$ و $(B; b)$ و $(C; c)$ فإن

$$\begin{cases} x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} \end{cases} \text{ هما } G \text{ إحدائيتي}$$

تمرين 12: في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر النقط: $A(-1; 1)$ و $B(0; 2)$ و $C(1; -1)$ و $D(1; 0)$

(1) حدد إحدائيتي K مرجح النقطين المترزتين $(A; 2)$ و $(B; 3)$

(2) حدد إحدائيتي L مركز ثقل المثلث ABC

(3) حدد إحدائيتي G مرجح النقط: $(A; 2)$ و $(B; 3)$ و $(C; 1)$ و $(D; -1)$

الأجوبة: (1) $K\left(-\frac{2}{5}; \frac{8}{5}\right)$: اذن $\begin{cases} x_K = \frac{-2+0}{5} = -\frac{2}{5} \\ y_K = \frac{2+6}{5} = \frac{8}{5} \end{cases}$

(2) L مركز ثقل المثلث ABC يعني L مرجح النقط المترزنة $(A; 1)$

و $(B; 1)$ و $(C; 1)$

ومنه: $L\left(0; \frac{2}{3}\right)$: اذن $\begin{cases} x_L = \frac{1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1}{1+1+1} = 0 \\ y_L = \frac{1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times (-1)}{1+1+1} = \frac{2}{3} \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x_L = \frac{1x_A + 1x_B + 1x_C}{1+1+1} \\ y_L = \frac{1y_A + 1y_B + 1y_C}{1+1+1} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C + dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C + dy_D}{a+b+c+d} \end{cases} \quad (3)$$

$G\left(-\frac{2}{5}; \frac{7}{5}\right)$: اذن $\begin{cases} x_G = \frac{2 \times x_A + 3 \times x_B + 1 \times x_C + (-1) \times x_D}{5} = -\frac{2}{5} \\ y_G = \frac{2 \times y_A + 3 \times y_B + 1 \times y_C + (-1) \times y_D}{5} = \frac{7}{5} \end{cases}$ يعني

تمرين 13: لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى.

و M من المستوى P بحيث: $\vec{V} = 2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC}$

(1) بين أن \vec{V} متجهة غير مرتبطة بالنقطة M

(2) لتكن: K مرجح النقطين المترزتين $(B; 1)$ و $(C; -3)$ بين أن:

$$\vec{V} = 2\overline{KA}$$

(3) ليكن: G مرجح النقط المترزنة $(A; 2)$ و $(B; -1)$ و $(C; -3)$

(أ) بين أن: $2\overline{MA} - \overline{MB} - 3\overline{MC} = 2\overline{GM}$ لكل نقطة M من المستوى

(ب) استنتج مجموعة النقط M من المستوى بحيث:

$$\|2\overline{MA} - \overline{MB} - 3\overline{MC}\| = \|2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC}\|$$

الأجوبة: (1) $\vec{V} = 2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC} = 2\overline{MA} + \overline{MA} + \overline{AB} - 3(\overline{MA} + \overline{AC})$

$\vec{V} = \overline{AB} - 3\overline{AC}$ ومنه \vec{V} متجهة غير مرتبطة بالنقطة M

(2) وجدنا: $2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC} = \overline{AB} - 3\overline{AC}$ مهما تكن M من المستوى

يمكننا مثلا وضع: $M = K$ ونجد: $2\overline{KA} + \overline{KB} - 3\overline{KC} = \overline{AB} - 3\overline{AC}$

ونعلم أن: K مرجح النقطين المترزتين $(B; 1)$ و $(C; -3)$: اذن

$$\overline{KB} - 3\overline{KC} = \overline{0}$$

ومنه نجد: $2\overline{KA} = \overline{AB} - 3\overline{AC}$ أي: $2\overline{KA} = \vec{V}$

(3) حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$2\overline{MA} - \overline{MB} - 3\overline{MC} = (2 + (-1) + (-3))\overline{MG} = -2\overline{MG} = 2\overline{GM}$$

(3) $\|2\overline{GM}\| = \|2\overline{KA}\|$ يعني $\|2\overline{MA} - \overline{MB} - 3\overline{MC}\| = \|2\overline{MA} + \overline{MB} - 3\overline{MC}\|$

تعني $2GM = 2KA$ تعني $GM = KA$

ومنه مجموعة النقط هي الدائرة (C) التي مركزها G وشعاعها

$$r = KA$$

تمرين 14: ليكن ABC مثلثا و B' مرجح النقطتين $(A; -2)$ و $(C; 1)$ ثم

A' مرجح النقطتين $(A; 2)$ و $(B; -3)$ و C' مرجح النقطتين $(C; -1)$

و $(B; 3)$

(1) بين أن: $\overline{AA'} = 3\overline{AB}$ و $\overline{AB'} = -\overline{AC}$ و $\overline{BC'} = -\frac{1}{2}\overline{BC}$

(2) بين أن: $\overline{B'A'} + 2\overline{A'C'} = \overline{0}$

(3) استنتج أنه مهما تكن M نقطة من المستوى فإن:

$$-\overline{MA'} - \overline{MB'} + 2\overline{MC'} = \overline{0}$$

(4) استنتج أن النقط A' و B' و C' مستقيمية.

الأجوبة: (1) B' مرجح النقطتين $(A; -2)$ و $(C; 1)$

اذن: $\overline{AB} = \frac{1}{1+(-2)}\overline{AC} = -\overline{AC}$

A' مرجح النقطتين $(A; 2)$ و $(B; -3)$: اذن $\overline{AA'} = \frac{-3}{-3+2}\overline{AB} = 3\overline{AB}$

C' مرجح النقطتين $(C; -1)$ و $(B; 3)$ يعني $\overline{BC'} = \frac{-1}{3+(-1)}\overline{BC} = -\frac{1}{2}\overline{BC}$

(2)

$$\overline{B'A'} + 2\overline{A'C'} = \overline{BA} + \overline{AA'} + 2(\overline{AB} + \overline{BC'}) = \overline{AA'} - \overline{AB} + 2\overline{BC} - 2\overline{BA'}$$

$$\overline{B'A'} + 2\overline{A'C'} = 3\overline{AB} + \overline{AC} - 2 \times \frac{1}{2}\overline{BC} - 2(\overline{BA} + \overline{AA'})$$

$$\overline{B'A'} + 2\overline{A'C'} = 3\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC} + 2\overline{AB} - 6\overline{AB} = -\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}$$

$$\overline{B'A'} + 2\overline{A'C'} = \overline{BA} + \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{BB} = \overline{0}$$

(3) $-\overline{MA'} - \overline{MB'} + 2\overline{MC'} = -\overline{MA'} - (\overline{MA'} + \overline{A'B'}) + 2(\overline{MA'} + \overline{A'C'})$

$$-\overline{MA'} - \overline{MB'} + 2\overline{MC'} = -\overline{A'B'} + 2\overline{A'C'} = \overline{B'A'} + 2\overline{A'C'} = \overline{0}$$

(4) وجدنا أن: مهما تكن M نقطة من المستوى

$$-\overline{MA'} - \overline{MB'} + 2\overline{MC'} = \overline{0}$$

بوضع مثلا: $M = A'$

نجد: $2\overline{A'C'} = \overline{A'B'}$ يعني $-\overline{A'A'} - \overline{A'B'} + 2\overline{A'C'} = \overline{0}$

وهذا يعني أن: النقط A' و B' و C' مستقيمية.

تمرين 15:

(1) ليكن I مرجح النقطتين $(A; 2)$ و $(C; 1)$ و J مرجح النقطتين $(A; 1)$

و $(B; -4)$ و $(C; 1)$ و K مرجح النقطتين $(B; -4)$ و $(C; 1)$

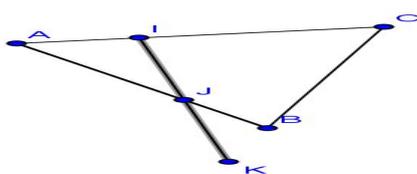
أنشئ النقط I و J و K

(2) أثبت أن B مرجح النقطتين $(K; 3)$ و $(C; 1)$

(3) بين أن J منتصف $[KI]$

الأجوبة: (1) I مرجح النقطتين $(A; 2)$ و $(C; 1)$: اذن $\overline{AI} = \frac{1}{3}\overline{AC}$

J مرجح النقطتين $(A; 1)$ و $(B; -4)$: اذن $\overline{AJ} = \frac{2}{3}\overline{AB}$



K مرجح النقطتين $(C; 1)$ و $(B; -4)$: اذن $\overline{BK} = -\frac{1}{3}\overline{BC}$

(2) يكفي أن نبين أن: $3\overline{BK} + \overline{BC} = \overline{0}$ ؟؟؟؟

بما أن لدينا: $\overline{BK} = -\frac{1}{3}\overline{BC}$ يعني $3\overline{BK} = -\overline{BC}$

يعني $3\overline{BK} + \overline{BC} = \overline{0}$
(3) يكفي أن نبين أن $\overline{JK} = \overline{IJ}$ ؟؟؟؟

لدينا: $\overline{AI} = \frac{2}{3}\overline{AB}$ و $\overline{AI} = \frac{1}{3}\overline{AC}$

اذن: $\overline{IJ} = \overline{AJ} - \overline{AI} = \frac{2}{3}\overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{AC} = \frac{1}{3}(2\overline{AB} - \overline{AC})$ ①

لدينا: $\overline{JK} = \overline{JA} + \overline{AB} + \overline{BK} = \frac{2}{3}\overline{AB} + \overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{BC} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{CB})$

② $\overline{JK} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{CA} + \overline{AB}) = \frac{1}{3}(2\overline{AB} - \overline{AC})$

من: ① و ② نجد أن $\overline{IJ} = \overline{JK}$ ومنه: J منتصف $[KI]$

ملاحظات عامة حول درس المرجح:

