ملخصي وقواعدي في الرياضيات

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا

- **شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
- **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

ملخص درس الاشتقاق ودراسة الدوال

1) اشتقاق دالة في نقطة:

تعريف: نقول ان دالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 إذا وجد عدد حقيقي ℓ بحيث $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$ والعدد ℓ يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0. و نكتب $\ell=f'(x_0)$

ملاحظة: إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فان معادلة مماس المنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها x_0 هي:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0=1$.

الجواب: 1) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}2(x+1)=2(1+1)=4=f'(1)\in\mathbb{R}$$

اذن : الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$.

2) $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ و $f'(1)=4$

اذن : $f(1)=2$

ومنه $y=f'(1)(x-1)+f(1)=4(x-1)+2=4x-4+2$

$y=4x-2$ وهي معادلة المماس

2) مشتقات الدوال الاعتيادية و العمليات على الدوال المشتقة:

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
ax	a
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

الدالة	مشتقتها
$u+v$	$u'+v'$
$k\cdot u$	$k\cdot u'$
$u\cdot v$	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v+uv'}{v^2}$
$u^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$	$nu^{n-1}u'$

أمثلة: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات

1) $f(x)=2$ 2) $f(x)=3x-5$ 3) $f(x)=x^{10}$

الأجوبة: 1) $f'(x)=(2)'=0$ 2) $f'(x)=(3x-5)'=3$

3) $f'(x)=(x^{10})'=10x^{10-1}=10x^9$

مثال: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=3x^3-4x^2+6$ 2) $f(x)=(3x+5)\times(2x+6)$

3) $f(x)=\frac{1}{2x+1}$ 4) $f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$ 5) $f(x)=(4x+3)^3$

الحل: 1) $f'(x)=(3x^3-4x^2+6)'=9x^2-4x$

2) $f'(x)=((3x+5)\times(2x+6))'=((3x+5))'\times(2x+6)+(3x+5)\times(2x+6)'$

$f'(x)=((3x+5)\times(2x+6))'=3\times(2x+6)+(3x+5)\times 2$

$f'(x)=6x+18+6x+10=12x+28$

3) $f'(x)=\left(\frac{1}{2x+1}\right)'=-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}=-\frac{2}{(2x+1)^2}$

4) $f'(x)=\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)'=\frac{(2x+3)'\times(x+1)-(2x+3)\times(x+1)'}{(x+1)^2}$

$f'(x)=\frac{2\times(x+1)-(2x+3)\times 1}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x-3}{(x+1)^2}=\frac{-1}{(x+1)^2}$

5) $f'(x)=\left((4x+3)^3\right)'=3(4x+3)^2\times(4x+3)'=3(4x+3)^2\times 4=12(4x+3)^2$

3) رتابة دالة و إشارة مشتقتها و دراسة بعض الدوال

خاصية: I مجال من $\mathbb{R}$ و f دالة قابلة للاشتقاق على I.

- f ثابتة على I $\Leftrightarrow f'(x)=0$ لكل x من I.
- f تزايدية على I $\Leftrightarrow f'(x)\geq 0$ لكل x من I.
- f تناقصية على I $\Leftrightarrow f'(x)\leq 0$ لكل x من I.

دراسة دالة حدودية: مثال 1 :

f دالة عددية معرفة ب : $f(x)=x^3-3x^2+4$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2) أحسب النهايات التالية: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

3) أحسب الدالة المشتقة ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.

4) أنشئ منحنى الدالة f.

الحل:

1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

3) $f'(x)=(x^3-3x^2+4)'=(x^3)'-(3x^2)'+(4)'$

$f'(x)=3x^2-3\times 2x^1+0=3x^2-6x=3x(x-2)$

$3x(x-2)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0$

$\Leftrightarrow 3x=0$ أو $x-2=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $x=2$

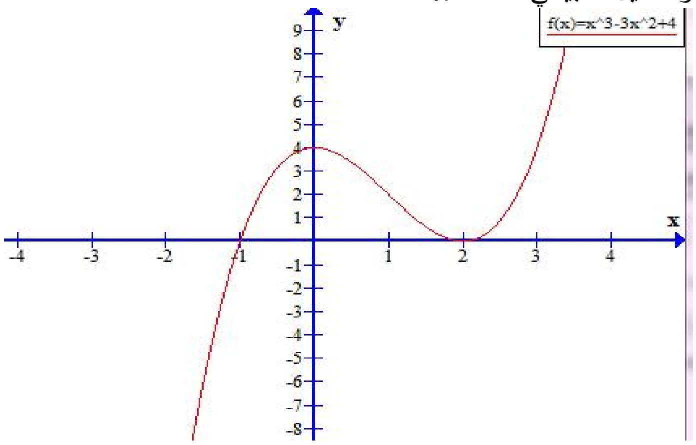
جدول إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

والتمثيل المبياني للدالة f.



دراسة دالة متخاطة: مثال: نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

1)حدد حيز تعريف الدالة g 2)أحسب نهايات الدالة g في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.

3)أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .

4)املأ الجدول التالي :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$							

5)أنشئ منحنى الدالة g .

الحل:

1)حيز تعريف الدالة g هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{1\}$

و منه $D=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x+1}{x-1}=+\infty$ و

$\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x+1}{x-1}=-\infty$

يعني المستقيم ذا العادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى.

3)لكل x من D لدينا: $g'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{(x-1)^2}=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$2 \searrow$	‖	$\searrow 2$

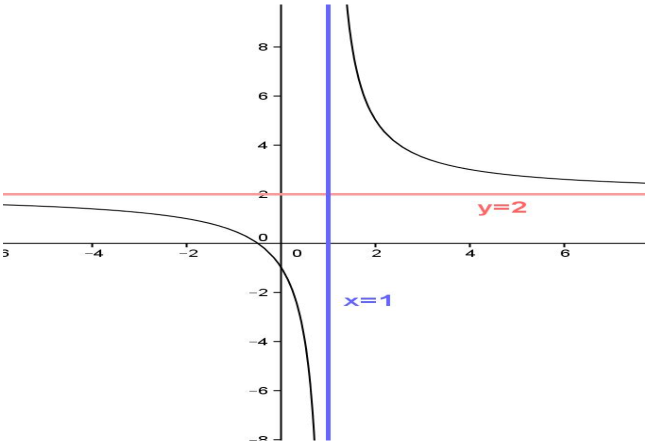
يعني: $(\forall x\in D)\, g'(x)<0$

جدول تغيرات الدالة.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	1	1/2	-1		5	7/2	3

(4

5)منحنى الدالة g .



دراسة الدالة $x\mapsto\sqrt{ax+b}$ $(a\neq 0)$**:**

مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x)=\sqrt{2x+4}$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f.
2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. أحسب $f'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة f.
4. أحسب $f(-2)$ و $f(0)$ و $f(6)$.
5. مثل مبيانيا الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

الحل:1) $f(x)$ **معرفة إذا وفقط إذا كان** $2x+4\geq 0$ **يعني**

$2x\geq -4$ **و منه** $x\geq -2$

يعني حيز تعريف الدالة f **هو:** $D=[-2,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x\left(2+\dfrac{4}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sqrt{2+\dfrac{4}{x}}=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

لدينا: $(\forall x\in]-2,+\infty[)\, f'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{2x+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}$

بما أن $\sqrt{2x+4}>0$ **فان:** $f'(x)>0$.

جدول التغيرات:

x	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

لدينا: $f(-2)=\sqrt{2\times(-2)+4}=\sqrt{0}=0$

و $f(0)=\sqrt{2\times 0+4}=\sqrt{4}=2$

و $f(6)=\sqrt{2\times 6+4}=\sqrt{16}=4$

التمثيل المبياني: