

مستوى: السنة الأولى من سلك البكالوريا
 • **شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
 • **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**
محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- نهايات الدوال $x \rightarrow x$ و $x \rightarrow x^2$ و $x \rightarrow x^3$ ونهايات مقلوباتها في الصفر و $+\infty$ و $-\infty$ ؛ - النهاية المنتهية والنهاية اللانتهية في نقطة وفي $+\infty$ و $-\infty$ ؛ - النهاية على اليمين؛ النهاية على اليسار. - العمليات على النهايات؛ - نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية.	- التمكن من حساب نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية في $+\infty$ و $-\infty$ و x_0	- يتم تقديم مفهوم النهاية بطريقة حدسية من خلال سلوك الدوال المرجعية المحددة في البرنامج ومقلوباتها بجوار الصفر و $+\infty$ و $-\infty$ ثم قبول هذه النهايات؛ - يتم قبول نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية في $+\infty$ و $-\infty$ وفي نقطة من مجموعة تعريفها؛ - يتم تحديد $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ في الحالة: $P(x)$ و $Q(x)$ حدويتان بحث $Q(a) = 0$ - تعتبر العمليات على النهايات المنتهية واللانتهية مقبولة وينبغي تعويد التلاميذ على الاستعمال الصحيح لها.

I. نهاية منتهية لدالة نقطة

مثال 1: لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كالتالي: $f(x) = 2x$
 الكتابة: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ تقرأ النهاية عندما يؤول x إلى 0 ل $f(x)$

ولدينا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$

نهايات اعتيادية: $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ • $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$ • $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

تمرين 1: أحسب النهايات التالية:

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} (3+x-3x^2)$ (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-1}{3x^2-x}$

أجوبة: (1) $\lim_{x \rightarrow 1} 3+x-3x^2 = 3+(-1)-3(-1)^2 = 3+(-1)-3 = -1 = l$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-1}{3x^2-x} = \frac{5 \times 1 - 1}{3(-1)^2 - (-1)} = \frac{4}{3+1} = 1 = l$

II. نهاية غير منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كالتالي: $f(x) = x^2$

املأ الجدول التالي:

x	10000	1000	10	1	0	1	10	100	1000	10000
$f(x)$										

نلاحظ أنه عندما تكبر x فإن $f(x)$ تكبر أيضا نكتب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

نلاحظ أنه عندما تصغر x فإن $f(x)$ تكبر ونكتب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

نهايات اعتيادية:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ إذا كان n زوجي

إذا كان n فردي

تمرين 2: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^6$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2014}$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2015}$ (4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -7x^9$

أجوبة: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 = +\infty$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2014} = +\infty$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2015} = -\infty$ (4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -7x^9 = +\infty$

III. نهاية منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كالتالي: $f(x) = \frac{1}{x}$

املأ الجدول التالي:

x	10000	1000	10	1	0	1	10	100	1000	10000
$f(x)$										

نلاحظ أنه عندما تكبر x فإن $f(x)$ تقترب من الصفر

ونكتب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$

نلاحظ أنه عندما تصغر x فإن $f(x)$ تقترب من الصفر

نكتب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x - 6 = 0^+$ و بالتالي : $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{2x-6} = +\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x+1}{2x-6} = -\infty$ و بالتالي : $\lim_{x \rightarrow 3^-} 2x - 6 = 0^-$

تمرين 5: أحسب النهايات التالية (1): $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x-8}{2x-4}$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-8}{2x-4}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-5x^2+1}{x+2}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-4}{-2x+6}$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-4}{-2x+6}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x-20}{-2x+4}$

أجوبة (1): $\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x - 4 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} 3x - 8 = -2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2x-4$	$-$	0	$+$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x - 4 = 0^+$ و بالتالي : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-8}{2x-4} = -\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-8}{2x-4} = +\infty$ و بالتالي : $\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x - 4 = 0^+$

(3) $\lim_{x \rightarrow 3^+} x - 4 = -1$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} -2x + 6 = 0$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-2x+6$	$+$	0	$-$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 3^+} -2x + 6 = 0^-$ و بالتالي : $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-4}{-2x+6} = +\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-4}{-2x+6} = -\infty$ و بالتالي : $\lim_{x \rightarrow 3^+} -2x + 6 = 0^+$

(3) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-5x^2+1}{x+2}$

لدينا $\lim_{x \rightarrow 2^+} x + 2 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} -5x^2 + 1 = -19$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-5x^2+1}{x+2} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-5x^2+1}{x+2} = -\infty$

(4) لدينا $\lim_{x \rightarrow 2^+} -2x + 4 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} 5x - 20 = -10$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2x+4$	$+$	0	$-$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x-20}{-2x+4} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x-20}{-2x+4} = +\infty$

تمرين 6: أحسب النهايات التالية:

(1) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{-2x+8}$ (3) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x+1}{3x-9}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x+1}{3x-9}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-4}{-2x+8}$

VI. العمليات على النهايات

في كل ما يلي a عدد حقيقي أو يساوي $+\infty$ أو $-\infty$ و l و l' عدنان حقيقيان وهذه العمليات تبقى صالحة على اليمين و اليسار

1. النهاية و الجمع:

نهايات اعتيادية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$

خاصية: لتكن f دالة عددية و l عددا حقيقيا

إذا كانت f تقبل نهاية l في $+\infty$ (أو في $-\infty$) فان هذه النهاية وحيدة.

تمرين 3: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3}$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^5}$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^7}$ (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x^5}$ (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{x^{2009}}$

الأجوبة: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0^+$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^5} = 0^-$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^7} = 0^-$ (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x^5} = 0^-$ (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{x^{2009}} = 0^+$

IV. النهاية اللانهائية لدالة في نقطة

نهايات اعتيادية:

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ و تقرأ النهاية عندما يؤول x إلى 0 على اليمين

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ و تقرأ النهاية عندما يؤول x إلى 0 على اليسار

تمرين 4: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{x^3}$ (3)

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{x^5}$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-12}{x^4}$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}}$ (7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

الأجوبة: (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{x^3} = -\infty$ (3)

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{x^5} = +\infty$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-12}{x^4} = -\infty$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty$

(7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 + 7 + \infty = +\infty$

V. النهاية على اليمين والنهاية على اليسار لدالة في نقطة

• إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليمين

فإننا نكتب: " $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ " أو " $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ "

• إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليسار

فإننا نكتب: " $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ " أو " $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ "

نهايات اعتيادية: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ • $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ • $\forall n \in \mathbb{N}^* \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$

• إذا كان n زوجي غير منعدم, فان $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$

• إذا كان n فردي غير منعدم, فان $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$

مثال: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{2x-6}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x+1}{2x-6}$

أجوبة: $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x - 6 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} 3x + 1 = 9 + 1 = 10$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$2x-6$	$-$	0	$+$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0^+ \quad (3)$$

4. النهاية و الخارج:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	$-\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

أمثلة: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x-5}{\sqrt{x}}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

أجوبة (1): لدينا $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 4} 4x-5 = 11$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x-5}{\sqrt{x}} = \frac{11}{2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 2} x-2 = 0$ لدينا

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x+2 = 4$

تمرين 7: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-6}{\sqrt{x+3}}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-9}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1}$

أجوبة (1): لدينا $\lim_{x \rightarrow 1} 2x-6 = -4$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+3} = 2$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-6}{\sqrt{x+3}} = \frac{-4}{2} = -2$

(2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-9} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 3} x-9 = 0$ لدينا

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3^2}{x-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-9} = \lim_{x \rightarrow 3} x+3 = 4$

(3) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 4x^2-1 = 0$ لدينا

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x)^2-1^2}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 2x+1 = 2$

5. نهاية الدالة الحدودية

نهاية دالة حدودية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

مثال: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 5x - 4$

الجواب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 5x - 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$

6. نهاية الدالة الجذرية

نهاية دالة جذرية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي خارج نهاية حدها الأكبر درجة.

مثال: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 - x^2 + 1}{x^4 + x - 4}$

الجواب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 - x^2 + 1}{x^4 + x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$

تمرين 8: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 5x - 9x^2$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x)$	$l'+l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	

مثال: أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

الجواب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} 7 = 7$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x = 0$ ومنه:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

2. النهاية و الضرب:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	0
$\lim_{x \rightarrow a} (f/g)(x)$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد		

أمثلة: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^4$ و (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1)^{2008} \times (x^3 + 1)^{2009}$ (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) \times \frac{1}{x}$ (5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})$

أجوبة (1): $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^4 = 5 \times (+\infty) = +\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x = +\infty - \infty$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $+\infty - \infty$

نرفع ال ش غ م مثلا بالتعميل:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-1)$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x = +\infty$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1)^{2008} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 1)^{2009} = -\infty$ ومنه:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1)^{2008} \times (x^3 + 1)^{2009} = -\infty$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل:

$0 \times \infty$

نرفع ال ش غ م مثلا بالنشر: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) \times \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x} = -\infty + 0 = -\infty$

(5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل:

$+\infty - \infty$

نرفع ال ش غ م مثلا بالتعميل: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = +\infty$

3. النهاية و المقلوب:

$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g}\right)(x)$	$\frac{1}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

أمثلة: أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+7} + \frac{1}{x^2}$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3x+7} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

أجوبة (1): لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3x+7} = \frac{1}{7}$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3x+7} + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+7} + \frac{1}{x^2} = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+7} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x^4} \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-8}{x^5} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{x^3} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -5x + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{\sqrt{x}} \quad (11)$$

تمرين 3: أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{x^2} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x^5} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9}{x^2} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x^2} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x^5} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x} \quad (10)$$

تمرين 4: أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^4 \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^2 \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^5 \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 8x^5 \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2}x^2 \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{3}x^3 \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^4 \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -6x^4 \quad (7)$$

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 + \frac{2}{x} - 3 \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -7x^9 \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^5 + \frac{-7}{x} + 1 \quad (13) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^3 + \frac{1}{x} + 2$$

تمرين 5: أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -6x^3 - 7x + 2 \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^2 + 3x + 4 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x + 9 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -6x^5 + 7x + 9 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2}{x^4 + x - 1} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 + 2}{4x^3 + 5x - 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x^7 + x}{5x - 1} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^7 + x^2 + 2}{x^3 + x - 3} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x + 2}{x^4 + 2x + 6} \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^8 - x}{9x^4 - 1} \quad (9)$$

تمرين 6: أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - 100}{x - 10} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x} \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 - 2x - 3} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x + 1}{2x - 4} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x + 1}{2x - 4} \quad (1) \quad \text{أحسب النهايات التالية:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-3x + 1}{2x - 2} \quad (4) \quad \text{و} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - 4}{-2x + 6} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 4}{-2x + 6} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^5 + 3x^2 + x}{-10x^5 - x - 1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 - 4x + 12) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{20x^3 - 7x^2 + x}{10x^4 - 3x - 6} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^6 + 2x^2 + 1}{x^3 + 3x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{(x-1)^2} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 + 4x^2 + 1}{x^8 - x + 3} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 5x - 9x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -9x^2 = -\infty \quad (1) \quad \text{أجوبة:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^3 - 4x + 12 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^3 = +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^5 + 3x^2 + x}{-10x^5 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^5}{-10x^5} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^6 + 2x^2 + 1}{x^3 + 3x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^6}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 = +\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{20x^3 - 7x^2 + x}{10x^4 - 3x - 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{20x^3}{10x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{20}{10x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0^- \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 + 4x^2 + 1}{x^8 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5}{x^8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3} = 0^+ \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \quad (7)$$

تمرين 9: أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -6x^3 - 7x + 2 \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^2 + 3x + 4 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^7 + x^2 + 2}{x^3 + x - 3} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 + 2}{4x^3 + 5x - 1} \quad (3)$$

7. نهاية الدوال اللابندرية

خاصية: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال على الشكل

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; +\infty[\quad \text{بحيث} \quad [a; +\infty[$$

$$\bullet \text{ إذا كان } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \text{و} \quad l \geq 0 \quad \text{فان} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$$

$$\bullet \text{ إذا كان } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad l \geq 0 \quad \text{فان} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$$

$$\text{أمثلة:} \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 + 4} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+7}$$

$$\text{أجوبة:} \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 + 4} = \sqrt{3 \times 2^2 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{تمرين 10:} \quad \text{أحسب النهايات التالية:} \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3x^2 + 22}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} |-x^2 + 2x - 7| \times \sqrt{x+1}$$

تمارين للبحث

$$\text{تمرين 1:} \quad \text{أحسب النهايات التالية:} \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow -1} 3 + x - 3x^2$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3x^2 + 4} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 1}{3x^2 - x}$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 3x + 6}{5x - 1} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 2} |-x^2 + 2x - 7| \times \sqrt{x+7}$$

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{5x - 1}{2x^2 - x}} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{3}{2}x^3 + 4} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 + 2x - 1}$$

تمرين 2: أحسب النهايات التالية :

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{x^5} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-12}{x^4}$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$