مـادة الـريـاضـيـات

سلسلة محلولة رقم 1

المستوى : الجذع مشترك علمي
الأستاذ : عثماني نجيب

تمارين بحلول في درس مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية و مبادئ أولية في الحسابيات

الأهداف القدرات المنتظرة من التمارين :

- التعرف على المجموعة $\mathbb{N}$.
- التعرف على مضاعفات و قواسم عدد.
- التمييز بين الأعداد الزوجية و الأعداد الفردية.
- التعرف على مصاديق قابلية القسمة على 2 و 3 و 4 و 5 و 9.
- التعرف على عدد أولي.
- استعمال تقنيات تفكيك عدد صحيح طبيعي إلى جداء عوامل أولية.
- توظيف التفكيك في تحديد القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر.
- توظيف خوارزمية إقليدس في تحديد القاسم المشترك الأكبر.
- توظيف الزوجية و تفكيك عدد إلى جذاء عوامل أولية في حل بعض المسائل البسيطة حول الأعداد الصحيحة الطبيعية.

تمرين1: باستعمال الرموز: $\in;\notin;\subset;\not\subset$ املأ الفراغات التالية :

$-7\ldots\mathbb{N}$ و $\frac{2}{3}\ldots\ldots\mathbb{N}$ و $\sqrt{2}\ldots\ldots\mathbb{N}$ و $\frac{8}{2}\ldots\ldots\mathbb{N}$ و $-\frac{15}{3}\ldots\mathbb{N}$

و $12-32\ldots\mathbb{N}$ و $\sqrt{25}\ldots\mathbb{N}$ و $\frac{\sqrt{100}}{5}\ldots\ldots\mathbb{N}$ و $2,12\ldots\mathbb{N}$

$\pi\ldots\ldots\mathbb{N}$ و $0\ldots\ldots\mathbb{N}^*$ و $\{1;2;7\}\ldots\mathbb{N}$ و $\{4;-2;12\}\ldots\mathbb{N}$ و $\mathbb{N}^*\ldots\mathbb{N}$

الجواب: $-7\notin\mathbb{N}$ $\quad \frac{2}{3}\notin\mathbb{N}$ $\quad \sqrt{2}\notin\mathbb{N}$ $\quad \frac{8}{2}\in\mathbb{N}$ $\quad -\frac{15}{3}\notin\mathbb{N}$ $\quad 12-32\notin\mathbb{N}$

$\sqrt{25}\in\mathbb{N}$ $\quad \frac{\sqrt{100}}{5}\in\mathbb{N}$ $\quad 2.12\notin\mathbb{N}$ $\quad \pi\notin\mathbb{N}$

$0\notin\mathbb{N}^*$ $\quad \{1;2;7\}\subset\mathbb{N}$ $\quad \{4;-2;12\}\not\subset\mathbb{N}$ $\quad \mathbb{N}^*\subset\mathbb{N}$

تمرين2: $n\in\mathbb{N}$ أدرس زوجية الأعداد التالية:

$4516 \quad 4\times51+1 \quad 2n+4 \quad 4n^2+4n+1 \quad 4n+9$

$6n^2+12n \quad 2n^2+7 \quad 3n^3+n$

الجواب: $4516=2\times2258$ اذن $4516=2\times k$ حيث : $k=2258$

وبالتالي : 4516 عدد زوجي

$4\times571+1=2\times2\times571+1=2\times k+1$ اذن حيث : $k=2\times571$

وبالتالي : $4\times51+1$ عدد فردي

$2n+4=2(n+2)=2\times k$ حيث : $k=n+2$

وبالتالي : $2n+4$ عدد زوجي

$4n+9=2(2n+4)+1=2\times k+1$ حيث : $k=2n+4$

وبالتالي : $4n+9$ عدد فردي

$4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1=2\times k+1$ حيث : $k=2n^2+2n$

وبالتالي : $4n^2+4n+1$ عدد فردي

$6n^2+12n=2(3n^2+6n)=2\times k$ حيث : $k=3n^2+6n$

وبالتالي : $6n^2+12n$ عدد زوجي

$2n^2+7=2n^2+6+1=2(n^2+3)+1=2k+1=2\times k$ حيث : $k=n^2+3$

وبالتالي : $2n^2+7$ عدد فردي

دراسة زوجية العدد: $3n^3+n$ حيث $n\in\mathbb{N}$

<u>الحالة 1</u> : n عدد زوجي

$n^3=n\times n\times n$ هو أيضا عدد زوجي لأنه جداء أعداد زوجية

وبالتالي : $3n^3+n$ عدد زوجي لأنه مجموع عددين زوجيين

<u>الحالة 2</u> : n عدد فردي

$n^3=n\times n\times n$ هو أيضا عدد فردي لأنه جداء أعداد فردية

وكذلك : $3n^3$ عدد فردي لأنه جداء عددين فرديين

و منه : $3n^3+n$ عدد زوجي لأنه مجموع عددين فرديين

وبالتالي: $3n^3+n$ عدد زوجي كيفما كانت $n\in\mathbb{N}$

تمرين3: $a\in\mathbb{N}$ و $b\in\mathbb{N}$

1. بين أنه اذا كان a عددا زوجيا و b عددا زوجيا فان $a+b$ عدد زوجيا
2. بين أنه اذا كان a عددا فرديا و b عددا فرديا فان $a+b$ عدد فرديا
3. بين أنه اذا كان a عددا زوجيا فان a^2 عدد زوجي
4. بين أنه اذا كان a عددا فرديا فان a^2 عدد فرديا
5. استنتج أنه اذا كان a^2 عدد فرديا فان a عددا فردي

الجواب: 1) $a=2\times k$ حيث $k\in\mathbb{N}$

$b=2\times k'$ حيث $k'\in\mathbb{N}$

$a+b=2\times k+2\times k'=2\times(k+k')=2\times k''$ حيث $k''=k+k'$

وبالتالي : $a+b$ عدد زوجي

2) $a=2\times k+1$ حيث $k\in\mathbb{N}$

$b=2\times k'+1$ حيث $k'\in\mathbb{N}$

$a+b=2\times k+1+2\times k'+1=2\times(k+k'+1)=2\times k''$

حيث $k''=k+k'+1$ وبالتالي : $a+b$ عدد زوجي

3) $a=2\times k$ حيث $k\in\mathbb{N}$

$a^2=(2\times k)^2=4\times k^2=2\times2\times k^2=2\times k'$ حيث $k'=2k^2$

وبالتالي : a^2 عدد زوجي

4) $a=2\times k+1$ حيث $k\in\mathbb{N}$

$a^2=(2\times k+1)^2=(2\times k)^2+2\times2\times k\times1+1^2=4k^2+4k+1$

$a^2=2\times(2k^2+2k)+1=2\times k'+1$ حيث $k'=2k^2+2k$ وبالتالي : a^2 عدد فردي

5) معطيات a^2 عدد فردي

نبين أن a عدد فردي

نفترض أن a عدد زوجي اذن حسب النتيجة السابقة فان a^2 عدد زوجي

ولكن حسب المعطيات a^2 عدد فردي وبالتالي افتراضنا كان خاطئا أ
ي أنه a عدد فردي

تمرين4:

- حدد المضاعفات العشرة الأولى للعدد 6
- حدد المضاعفات العشرة الأولى للعدد 9
- حدد أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين6 و 9

الجواب: المضاعفات العشرة الأولى للعدد 6 هي 0 و 6 و 12 و 18 و 24 و 30 و 36 و 42 و 48 و54

المضاعفات العشرة الأولى للعدد 9هي 0 و9 و 18 و 27 و 36 و 45 و 54 و 63 و 72 و 81

18هو أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين6 و 9

ويسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين6 و 9 .و نرمز له بالرمز.

$PPCM(6;8)=18$

تمرين5: حدد مضاعفات العدد 9 المحصورة بين 23 و 59

الجواب: لدينا مضاعفات العدد 9 تكتب على الشكل $9n$ حيث n عنصر من $\mathbb{N}$.
مضاعفات 9 المحصورة بين 23 و 59 هي الأعداد التي تكتب على شكل $9n$ بحيث n من $\mathbb{N}$ و المحصورة بين 23 و 59 الحالات الممكنة هي: 9×3 و 9×4 و 9×5 و 9×6. أي القيم الممكنة للعدد n هي: 3 و 4 و 5 و 6.
و بالتالي المضاعفات التي نبحث عنها هي: 27 و 36 و 45 و 54.

تمرين6 : نضع: $x = 3\times 5\times 7\times 12$ و $y = 2\times 5\times 3\times 5$.
دون حساب x و y بين أن:
1. 75 قاسم للعدد y.
2. 105 قاسم للعدد x.

الجواب: لدينا $y = 2\times 5\times 3\times 5$ أي أن: $y = 2\times 75$
و منه فان 75 قاسم للعدد y.
لدينا $x = 3\times 5\times 7\times 12$ أي أن: $x = 105\times 12$
و منه فان 105 قاسم للعدد x.

تمرين7 : حدد الرقم x لكي يكون العدد $\overline{53x2}$: قابلا للقسمة على 9

الجواب : $0\leq x\leq 9$ العدد : $\overline{53x2}$ قابل للقسمة على 9 اذن : $x+2$ +3+5 مضاعف للعدد 9 يعني $x+10$ مضاعف للعدد 9 اذن : $x = 8$

تمرين8: ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$
نضع $x = 2n+7$ و $y = 4n+2$.
1. بين أن x عدد فردي و y عدد زوجي.
2. بين أن $(x+y)$ مضاعف للعدد 3.

الجواب: لدينا $x = 2n+7$ أي أن: $x = 2(n+3)+1$
و بالتالي x عدد فردي لأن: $x = 2k+1$ حيث: $k = n+3$
و لدينا $y = 4n+2$ أي أن $y = 2(2n+1)$
و بالتالي y عدد زوجي لأن: $y = 2k$ حيث: $k = 2n+1$
و لدينا $x+y = 2n+7+4n+2$ أي أن: $x+y = 6n+9$
و بالتالي $x+y = 3(2n+3)$ اذن $x+y$ مضاعف للغدد 3.

تمرين9: أدرس قابلية قسمة الأعداد التالية على 2 و 3 و 5 و 9.
28 , 4725 , 1628 ,

الجواب: العدد 4725 يقبل القسمة على 5 لأن رقم وحداته هو 5,
العدد 4725 يقبل القسمة على 3 و 9.لأن العدد (5+2+7+4)=18 مضاعف للعدد 3 و مضاعف للعدد 9.
العدد 1628 مضاعف للعدد 2 لأن رقم وحداته هو 8.
العدد 1628 مضاعف للعدد 4 لأن رقم وحداته و رقم عشراته يكونان في هذا الترتيب العدد 28 و هو مضاعف للعدد 4.

تمرين10: أدرس قابلية قسمة العدد 3611790 على 2 و 3 و 4 و 5 و 9.
أدرس قابلية قسمة الأعداد : 120052005 و1001001 و79541 و 19350 و 3140 و3752 و 3333426 و145610 و200070 على 3 و 9.

الجواب: بما أن رقم وحدات العدد 3611790 هو 0, فان 3611690 يقبل القسمة على 2 و 5.
العدد 90 لا يقبل القسمة على 4. وإذن العدد 3611790 لا يقبل القسمة على 4.
مجموع أرقام العدد 3611790 هو 27. (0+9+7+1+1+6+3=27)و 27 مضاعف للعدد 3, إذن 3611790 يقبل القسمة على 3.
و بما أن 27 مضاعف للعدد 9 فان 3611790 يقبل القسمة على 9.
هل العدد : 120052005 قابل للقسمة على 3 ؟ نعم مجموع أرقامه هو 15 اذن يقبل القسم على 3 بالمثل 1001001
هل الأعداد : 79541 و 3140 و 3752 قابلة للقسمة على 3 ؟ لا لأن مجموع الأرقام عدد لا يقبل القسم على 3

تمرين11: حدد كل الأعداد الأولية الأصغر من 30 .

الجواب : الأعداد الأولية الأصغر من 30 هي 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

تمرين 12: فكك العدد 1344 الى جداء عوامل أولية **الجواب :** $1344 = 2^6\times 3\times 7$

تمرين13: كك العدد 60 الى جداء عوامل أولية ثم استنتج جميع قواسم العدد 60

الجواب : $60 = 2^2\times 5\times 3$ اذن القواسم هم : 1و2و3و4و5و6و10و12و15و30و60

تمرين14 : هل العدد 1004001 عدد أولي؟

لدينا: مجموع أرقام العدد 1004001 هو 6, و العدد 6 مضاعف للعدد 3.
إذن العدد 1004001 يقبل القسمة على 3.
و بالتالي العدد 1004001 ليس عددا أوليا (لأنه يقبل أكثر من قاسمين).

تمرين15 : حدد الأعداد الأولية من بين الأعداد التالية : 0 و 1 و 2 و17 و 21 و 41 و 87 و 105 و 239 و 2787 و 191 و 1004001

الجواب : 0 ليس بعدد أولي لأن كل الأعداد تقسم 0 و **1** ليس بعدد أولي لأن له قاسم وحيد هو 1 و **2** عدد أولي لأن له قاسمين فقط
و **17** عدد أولي لأن له قاسمين فقط و **21** ليس بعدد أولي لأن : $21 = 7\times 3$ و
41 عدد أولي لأن له قاسمين فقط و **87** ليس بعدد أولي لأن : $87 = 29\times 3$ و **105** ليس بعدد أولي لأن : $105 = 5\times 21$
هل العدد **239** أولي ؟ نستعمل تقنية : نبحث عن الأعداد الأولية p التي تحقق : $p^2 < 239$ وهي : 2 و 3 و 5 و7 و11 و 13 ولا يوجد أي واحد منهم قاسم للعدد 239 اذن العدد 239 أولي
2787 ليس بعدد أولي لأنه يقبل القسمة على 3 (مجموع أرقامه 24)
لدينا: مجموع أرقام العدد 1004001 هو 6, و العدد 6 مضاعف للعدد 3.
إذن العدد 1004001 يقبل القسمة على 3.و بالتالي العدد 1004001 ليس عددا أوليا (لأنه يقبل أكثر من قاسمين).
هل العدد **191** أولي ؟ نستعمل تقنية : نبحث عن الأعداد الأولية p التي تحقق : $p^2 < 191$ وهي :
2 و 3 و 5 و7 و11 و 13 ولا يوجد أي واحد منهم قاسم للعدد 191 اذن العدد 191 أولي

تمرين16: فكك الأعداد : 220 و 798 و 5292 و 1650 الى جداء عوامل أولية
حدد : $PGCD(220;798)$ و $PPCM(220;798)$ و $PPCM(1650;5292)$

الجواب : $220 = 2^2\times 5\times 11$ $798 = 2\times 3\times 7\times 19$ اذن :
$PGCD(220;798) = 2^1 = 2$ و $PPCM(220;798) = 2^2\times 3\times 5\times 7\times 11\times 19 = 87780$
$1650 = 2^1\times 3^1\times 5^2\times 11^1$ $5292 = 2^2\times 3^3\times 7^2$
$PPCM(1650;5292) = 2^2\times 3^3\times 5^2\times 7^2\times 11 = 13097700$

تمرين17 : نضع $a = 1530$ و $b = 612$.
1. نضع $PPCM(612;1530)$ $PPCM(612;1530)$
2. بسط العدد $\frac{a}{b}$
3. أكتب العدد $\sqrt{ab}$ على الشكل $m\sqrt{n}$ حيث m و n عنصران من $\mathbb{N}$

الجواب : 1) $612 = 2^2\times 3^2\times 17$ $1530 = 2^1\times 3^2\times 5^1\times 17$
$PGCD(1530;612) = 2^1\times 3^2\times 17 = 153$
2) $\frac{a}{b} = \frac{2^1\times 3^2\times 5\times 17}{2^2\times 3^2\times 17} = \frac{5}{2}$
3) $\sqrt{ab} = \sqrt{2^1\times 3^2\times 5\times 2^2\times 3^2\times 17^2} = \sqrt{2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{17^2}$
$\sqrt{ab} = \sqrt{2}\times 3\times\sqrt{5}\times 2\times 3\times 17 = 306\times\sqrt{10}$ لأن: $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$ و $\sqrt{a^2} = a$

تمرين 18: ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا

1. تأكد من أن $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8 في الحالات التالية :
$n = 1$ و $n = 3$ و $n = 5$ و $n = 7$
2. بين أن $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 4 كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي الفردي n
3. بين أن $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8 كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي الفردي n
4. استنتج أن : $n^4 - 1$ مضاعف للعدد 16
5. بين أنه اذا كان n و m عددين فرديين فان : $n^2 + m^2 + 6$ مضاعف للعدد 8

الجواب : 1) $n = 1$ $1^2 - 1 = 0$ مضاعف للعدد 8

$n=3$: $3^2-1=8$ مضاعف للعدد 8 و $n=5$: $5^2-1=24$ مضاعف للعدد 8

$n=7$ $7^2-1=48$ مضاعف للعدد 8

2) n عدد فردي يعني : $n=2k+1$

$$n^2-1=(2k+1)^2-1=(2k)^2+2\times 2k\times 1+(1)^2-1$$

$$n^2-1=4k^2+4k+1-1=4k^2+4k=4\left(k^2+k\right)=4\times k' \quad k'=k^2+k$$

ومنه n^2-1 مضاعف للعدد 4 كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي الفردي n

3)وجدنا $n^2-1=4k(k+1)$

ولدينا $k(k+1)$ هو جذاء عددين متتابعين اذن هو عدد زوجي ومنه :

$$k(k+1)=2k'$$

ومنه $n^2-1=4k'$ أي : n^2-1 مضاعف للعدد 8

4)وجدنا $n^4-1=\left(n^2\right)^2-1^2=\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)$

ووجدنا $n^2-1=4k'$

ولدينا $n^2+1=4k^2+4k+1+1=4k^2+4k+2=4\left(k^2+k+1\right)=4\times k''$

اذن: $n^4-1=\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)=(4k')(4k'')=16k'''$

ومنه n^4-1 مضاعف للعدد 16

5) وجدنا أن: n^2-1 مضاعف للعدد 8 يعني : $n^2-1=8k$ أي :

$$n^2=8k+1$$

وبنفس الطريقة نبين : $m^2-1=8k'$ أي : $m^2=8k'+1$ ومنه

$$n^2+m^2+6=8k+1+8k'+1+6=8k+8k'+8=8(k+k'+1)=8k''$$

وبالتالي : n^2+m^2+6 مضاعف للعدد 8

تمرين19 : $n\in\mathbb{N}$

1) تأكد أن : $n^2+3n+3=(n+1)(n+2)+1$

2) استنتج زوجية العدد n^2+3n+3

الجواب: 1) $(n+1)(n+2)+1=n^2+2n+n+2+1=n^2+3n+3$

2) وجدنا $n^2+3n+3=(n+1)(n+2)+1$

ولدينا $(n+1)(n+2)$ هو جذاء عددين متتابعين اذن هو عدد زوجي

أي : $(n+1)(n+2)=2k$

ومنه $(n+1)(n+2)+1$ هو عدد فردي لأنه مجموع عدد زوجي وفردي

وبالتالي n^2+3n+3 عدد فردي

تمارين للبحث أخرى

تمرين1: أدرس زوجية الأعداد التالية حيث : $n\in\mathbb{N}$ $m\in\mathbb{N}$

375^2+648^2 و $2n+16$ و $10n+5$ و $18n+4m+24$

$8n^2+12nm+3$ و $26n+10m+7$ و $n^2+13n+17$ و

n^2+5n و $(n+1)^2+7n^2$ و n^2+8n و n^2+n و n^3-n

$n+(n+1)+(n+2)$

تمرين2: $n\in\mathbb{N}$

1) بين أن : $A=7n^2+21n+35$ **مضاعف للعدد 7**

2) بين أن : $B=(2n-6)^2+8n+n(n+1)$ **عدد زوجي**

3) بين أن : $C=(2n-6)^2+8n+(n(n+1))^2$ **يقبل القسمة على 4**

تمرين3 $x\in\mathbb{N}$

1. أنشر: $A=(x+1)^2-x^2$

2. استنتج أن كل عدد فردي هو فرق مربعين متتاليين

3. أكتب العددين 31 و 2015 على شكل فرق مربعين متتاليين

تمرين4: حدد الرقم x لكي يكون العدد : $4x23$ قابلا للقسمة على 3 ولا يقبل القسمة على 9

تمرين5: حدد الأرقام x و y لكي يكون العدد : $23x5y$ قابلا للقسمة على 3 وعلى 5

تمرين6: حدد الأعداد الأولية من بين الأعداد التالية : 0 و 1 و 2 و17 و 41 و 87 و 105 و 239 و 2787 و 191 و 1004001 و 503 و 290 و 401

تمرين7: نضع $a=18900$ و $b=945$.

1) فكك a و b الى جداء عوامل أولية و أحسب $PGCD(18900;945)$ و $PPCM(18900;945)$

2) بسط العدد $\frac{a}{b}$ و $\sqrt{a}$

تمرين8: أكتب $\sqrt{2^3\times 3^4}-\sqrt{242}+\sqrt{450}$ على الشكل $n\sqrt{2}$ حيث n عنصر من $\mathbb{N}$.

تمرين9: حدد جميع قواسم العدد 15

ثم استنتج جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية x و y التي تحقق :

$$(x+3)(y+2)=15$$

تمرين10: ليكن : $n\in\mathbb{N}$

1) بين أن العددين : n^2+3n+4 و n^2-3n+4 زوجيان

2) استنتج أن العدد n^4-n^2+16 يقبل القسمة على 4

تمرين11: يمكن توزيع تلاميذ إحدى المؤسسات التعليمية إلى أقسام تتضمن كلها نفس العدد من التلاميذ ويمكن أن يكون هذا العدد إما 28 تلميذا أو 36 تلميذا. حدد عدد تلاميذ هذه المؤسسة إذا علمت أنه محصور بين 1000 و 1020 تلميذا.

تمرين12: نعتبر العددان $x=198$ و $y=726$.

1) أحسب $PGDC(x,y)$ و $PPMC(x,y)$

2) استنتج تبسيطا للكسر $\frac{198}{726}$ و $\sqrt{726\times 198}$

تمرين13: ليكن x عدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 2 .

1) بين أن $x^4+4=\left((x-1)^2+1\right)\left((x+1)^2+1\right)$

2)بين أن العدد x^4+4 ليس أوليا .

تمرين14: نضع: $x=4752$ و $y=4500$

1) فكك العددين x و y الى جداء عوامل أولية

2) حدد $PPCM(980,1400)$ و $PGCD(980,1400)$

3) بسط $\frac{25x}{11y}$ و $\sqrt{5y\times 33x}$

تمرين15: ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ نضع: $x=8n+5$ و $y=2n+10$

1) بين أن x عدد فردي و y عدد زوجي.

2) بين أن $(x+y)$ مضاعف للعدد 5.