أكاديمية الجهة الشرقية

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا
- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية

شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

المادة: الرياضيات

الأستاذ: نجيب عثماني

تمارين بحلول في درس الاشتقاق ودراسة الدوال

تمرين1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0=1$.

الجواب: 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}2(x+1)=2(1+1)=4=f'(1)\in\mathbb{R}$

اذن : الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$.

2) $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ لدينا

$f'(1)=4$ و $f(1)=2$ اذن :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=4(x-1)+2=4x-4+2$

ومنه $y=4x-2$ و هي معادلة المماس

تمرين2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=3x^2$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0=2$.

الجواب: 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{3(x^2-4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2(x-2)(x+2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}3(x+2)=3(2+2)=12=f'(2)\in\mathbb{R}$ اذن : الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$.

2) $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ و $f'(2)=12$

$f(2)=12$ اذن :

$y=f'(2)(x-2)+f(2)=12(x-2)+12=12x-24+12$

$y=12x-12$ و هي معادلة المماس

قواعد مهمة في مشتقات الدوال الاعتيادية:

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
ax	a
x^2	$2x$
$x^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

تمرين3: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=2$ 2) $f(x)=3x-5$ 3) $f(x)=x^{10}$

الأجوبة :

1) $f'(x)=(2)'=0$ 2) $f'(x)=(3x-5)'=3$

3) $f'(x)=(x^{10})'=10x^{10-1}=10x^9$

قواعد مهمة في العمليات على الدوال المشتقة:

الدالة	مشتقتها
$u+v$	$u'+v'$
$k\cdot u$	$k\cdot u'$
$u\cdot v$	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v+uv'}{v^2}$
$u^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$	$nu^{n-1}u'$

تمرين4: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=2x^8$ 2) $f(x)=5x^4-1$

الأجوبة:

1) $f'(x)=(2x^8)'=2\times(x^8)'=2\times 8x^{8-1}=16x^7$

2) $f'(x)=(5x^4-1)'=5\times(x^4)'-(1)'=5\times 4x^{4-1}-0=20x^3$

تمرين5: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=3x^7$ 2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-1$

3) $f(x)=3x^3-4x^2+6$ 4) $f(x)=2x^5-3x^4-6x+1$

الأجوبة:

1) $f'(x)=(3x^7)'=3\times(x^7)'=3\times 7x^{7-1}=21x^6$

2) $f'(x)=\left(-\frac{1}{2}x^2-1\right)'=-\frac{1}{2}\times(x^2)'-(1)'=-\frac{1}{2}\times 2x^{2-1}-0=-x$

3) $f'(x)=(3x^3-4x^2+6)'=3\times(x^3)'-4\times(x^2)'+(6)'$

$f'(x)=3\times 3x^{3-1}-4\times 2x+0=9x^2-8xx$

4) $f'(x)=(2x^5-3x^4-6x+1)'=2\times(x^5)'-3\times(x^4)'-6\times(x)'+1'$

$f'(x)=10x^4-12x^3-6$

تمرين6: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية: 1) $f(x)=3x^3-\frac{1}{2}x^2-1$ 2) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6$

3) $f(x)=2x^5-4x^2+7$

الأجوبة: 1)

$$f'(x)=\left(3x^3-\frac{1}{2}x^2-1\right)'=3\times\left(x^3\right)'-\frac{1}{2}\left(x^2\right)'-(1)'=9x^2-x$$

2) $$f'(x)=\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6\right)'$$

$$f'(x)=\frac{1}{5}\times\left(x^5\right)'-\frac{1}{4}\times\left(x^4\right)'-4\times(x)'-(6)'=x^4-x^3-4$$

3)

$$f'(x)=\left(2x^5-4x^2+7\right)'=2\times\left(x^5\right)'-4\times\left(x^2\right)'+7'=10x^4-8x$$

تمرين7: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=(3x+5)\times(2x+6)$ 2) $f(x)=x^2\times(2x-1)$

الجواب:1)

$$f'(x)=\left((3x+5)\times(2x+6)\right)'=\left((3x+5)\right)'\times(2x+6)+(3x+5)\times(2x+6)'$$

$$f'(x)=\left((3x+5)\times(2x+6)\right)'=3\times(2x+6)+(3x+5)\times2$$

$$f'(x)=6x+18+6x+10=12x+28$$

2) $$f'(x)=\left(x^2\times(2x-1)\right)'=\left(x^2\right)'\times(2x-1)+x^2\times(2x-1)'$$

$$f'(x)=2x\times(2x-1)+x^2\times2=4x^2-2x+2x^2=6x^2-2x$$

تمرين8: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\frac{1}{2x+1}$ 2) $f(x)=\frac{1}{4x-3}$

الجواب:1) $$f'(x)=\left(\frac{1}{2x+1}\right)'=-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}=-\frac{2}{(2x+1)^2}$$

2) $$f'(x)=\left(\frac{1}{4x-3}\right)'=-\frac{(4x-3)'}{(4x-3)^2}=-\frac{4}{(4x-3)^2}$$

تمرين9: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$ 2) $f(x)=\frac{3x-1}{2x+5}$

الجواب:1)

$$f'(x)=\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)'=\frac{(2x+3)'\times(x+1)-(2x+3)\times(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2\times(x+1)-(2x+3)\times1}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x-3}{(x+1)^2}=\frac{-1}{(x+1)^2}$$

2) $$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)'=\frac{(3x-1)'\times(2x+5)-(3x-1)\times(2x+5)'}{(2x+5)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3\times(2x+5)-(3x-1)\times2}{(2x+5)^2}=\frac{6x+15-6x+2}{(2x+5)^2}=\frac{17}{(2x+5)^2}$$

تمرين10: حدد الدالة المشتقة للدالة f : $f(x)=(4x+3)^3$

الجواب: $$f'(x)=\left((4x+3)^3\right)'=3(4x+3)^2\times(4x+3)'$$

$$f'(x)=3(4x+3)^2\times4=12(4x+3)^2$$

تمرين11: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=3x^3-\frac{1}{2}x^2-1$ 2) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6$

3) $f(x)=x^2\times(2x-1)$ 4) $f(x)=\frac{1}{5x-4}$

5) $f(x)=\frac{4x-2}{2x+1}$

6) $f(x)=(2x-1)^7$

الجواب:1) $$f'(x)=\left(3x^3-\frac{1}{2}x^2-1\right)'=9x^2-x$$

2) $f(x)=x^4-x^3-4$

3) $$f'(x)=\left(x^2\times(2x-1)\right)'=\left(x^2\right)'\times(2x-1)+x^2\times(2x-1)'$$

$$f'(x)=2x\times(2x-1)+x^2\times2=4x^2-2x+2x^2=6x^2-2x$$

4) $$f'(x)=\left(\frac{1}{5x-4}\right)'=-\frac{(5x-4)'}{(5x-4)^2}=-\frac{5}{(5x-4)^2}$$

5) $$f'(x)=\left(\frac{4x-2}{2x+1}\right)'=\frac{(4x-2)'\times(2x+1)-(4x-2)\times(2x+1)'}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4\times(2x+1)-(4x-2)\times2}{(2x+1)^2}=\frac{(8x+4)-(8x-4)}{(2x+1)^2}=\frac{8}{(2x+1)^2}$$

6) $$f'(x)=\left((2x-1)^7\right)'=7(2x-1)^6\times(2x-1)'=7(2x-1)^6\times2=14(2x-1)^6$$

تمرين12: لتكن f دالة عددية معرفة ب: $f(x)=5x^3$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. أحسب الدالة المشتقة واستنتج رتابة الدالة f

الأجوبة:1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $f'(x)=\left(5x^3\right)'=5\left(x^3\right)'=5\times3x^2=15x^2\geq0$

ومنه الدالة f تزايدية على $D_f=\mathbb{R}$

تمرين13: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2+4x+3$

1) حدد D_f 2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3) أحسب مشتقة الدالة f و أدرس اشارتها

4) حدد جدول تغيرات f

5) حدد معادلة لمماس منحى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0=-1$

6) حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

7) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و المستقيم (D) الذي معادلته $(D): y=3$ في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

8) حدد نقط تقاطع (C_f) و (D).

9) حل مبيانيا في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2+4x\geq0$.

الأجوبة: $f(x)=x^2+4x+3$

1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2+4x+3=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2+4x+3=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$$

3) $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=\left(x^2+4x+3\right)'=2x+4$

$f'(x)=0$ يعني $2x+4=0$ يعني $x=-2$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$	

اذا كانت: $x\in[-2;+\infty[$ فان : $f'(x)\ge 0$ ومنه f تزايديه

اذا كانت: $x\in]-\infty;-2]$ فان : $f'(x)\le 0$ ومنه f تناقصية

4)نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

5) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ $\quad x_0=-1$

$y=2x+2\Leftrightarrow y=2(x+1)\Leftrightarrow y=f(-1)+f'(-1)(x+1)$

لأن: $f(1)=0$ و $f'(1)=2$

6)أ)تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل

نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني $x^2+4x+3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=1$ و $b=4$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times3\times1=16-12=4=(2)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-4+\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{-4+2}{2\times1}=-1$ و $x_2=\frac{-4-\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{-4-2}{2\times1}=-3$

ومنه نقط التقاطع هم: $A(-1;0)$ و $B(-3;0)$

ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

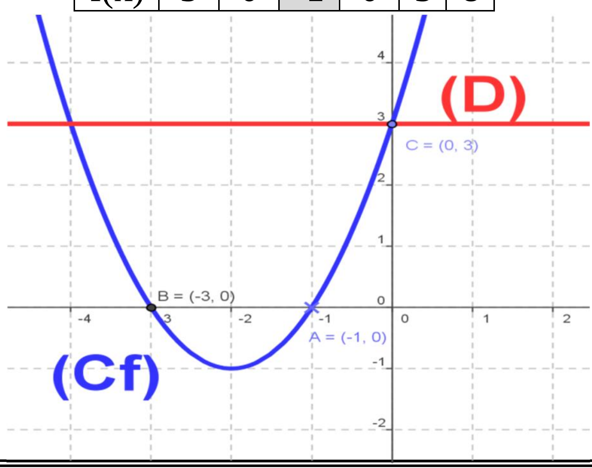
نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=3$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;3)$

7)رسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

و المستقيم $(D): y=3$

x	-4	-3	-2	-1	0	1
f(x)	3	0	-1	0	3	8



8) تحديد نقط تقاطع (C_f) و (D).

نحل المعادلة : $f(x)=y$ يعني $x^2+4x+3=3$

يعني $x^2+4x=0$ يعني $x(x+4)=0$ يعني $x=0$ أو $x+4=0$

يعني $x=0$ أو $x=-4$

ومنه نقط التقاطع هم: $E(0;3)$ و $F(-4;3)$

9) $x^2+4x\ge 0 \Leftrightarrow x^2+4x+3\ge 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)\ge y \Leftrightarrow$ منحنى الدالة (C_f)

يوجد فوق المستقيم (D) ومنه : $S=[-4;0]$

تمرين14: f دالة عددية معرفة ب : $f(x)=x^3-3x^2+4$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. أحسب الدالة المشتقة ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.
4. أنشئ منحنى الدالة f.

الأجوبة:

1. الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

3. $f'(x)=\left(x^3-3x^2+4\right)'=\left(x^3\right)'-\left(3x^2\right)'+(4)'$

$f'(x)=3x^2-3\times2x^1+0=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0$

$\Leftrightarrow 3x=0$ أو $x-2=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $x=2$

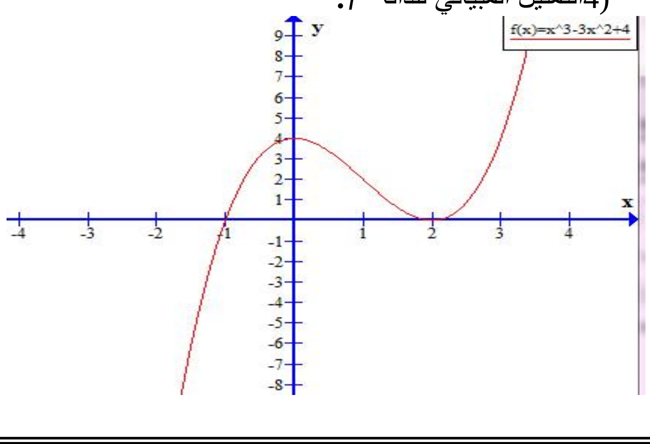
جدول إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4)التمثيل المبياني للدالة f.



تمرين15: f دالة عددية معرفة ب: $f(x)=x^3+3x^2-1$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. أحسب الدالة المشتقة وأدرس اشارتها
4. ضع جدول تغيرات الدالة f.
5. أنشئ منحنى الدالة f.

الأجوبة: 1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

3) $f'(x)=\left(x^3+3x^2-1\right)'=\left(x^3\right)'+\left(3x^2\right)'-(1)'$

$f'(x)=3x^2+3\times 2x^1+0=3x^2+6x=3x(x+2)$

$3x(x+2)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0$

$\Leftrightarrow 3x=0$ أو $x+2=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $x=-2$

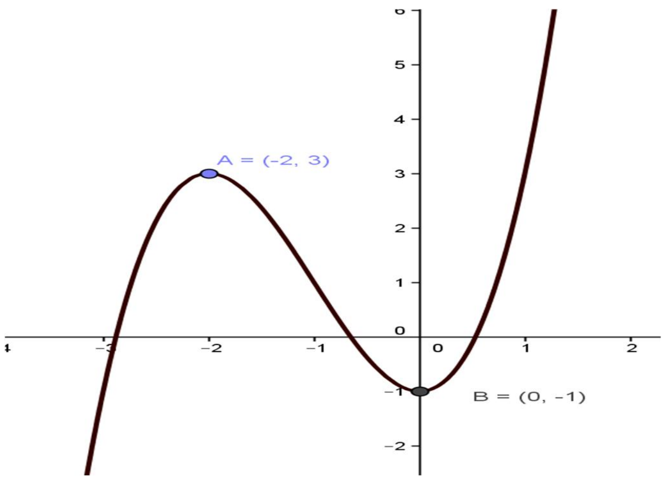
جدول إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4) جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

5) التمثيل المبياني للدالة f.



تمرين16: نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة g.
2. أحسب نهايات الدالة g في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
3. أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g.
4. املأ الجدول التالي :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$							

5. أنشئ منحنى الدالة g.

الأجوبة :

1. حيز تعريف الدالة g هو:

$D=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{1\}$

و منه $D=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x+1}{x-1}=+\infty$ و

$\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x+1}{x-1}=-\infty$

يعني المستقيم ذا العادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى.

3. لكل x من D لدينا: $g'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{(x-1)^2}=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$

يعني: $(\forall x\in D)\, g'(x)<0$

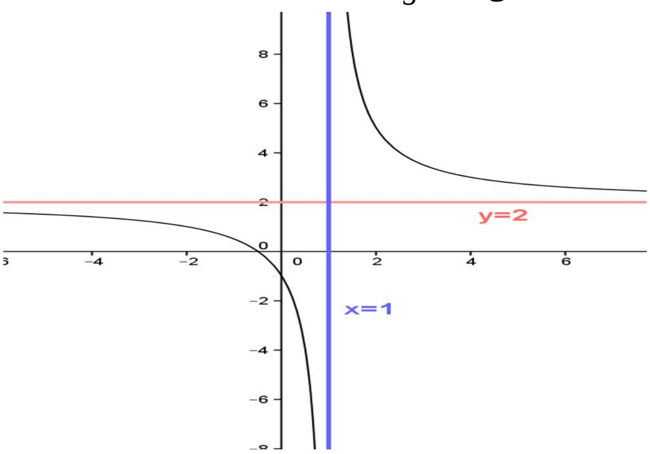
جدول تغيرات الدالة.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	||	$\searrow$	2

4.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	1	1/2	-1		5	7/2	3

5. منحنى الدالة g.



تمرين17: نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$

1. حدد حيز تعريف الدالة f.
2. أحسب نهايات الدالة f في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
3. أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.
4. املأ الجدول التالي :

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$							

5. أنشئ منحنى الدالة f.

الأجوبة:

1. حيز تعريف الدالة f هو:

$D=\{x\in\mathbb{R}/x-2\neq 0\}=\mathbb{R}-\{2\}$

و منه $D=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x}=3$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{x}=3$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=3$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x+1}{x-2}=+\infty$ و

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3x+1}{x-2}=-\infty$

يعني المستقيم ذا العادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحنى.

3. لكل x من D لدينا: $f'(x)=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}}{(x-2)^2}=\frac{-7}{(x-2)^2}$

يعني: $(\forall x\in D)\, f'(x)<0$

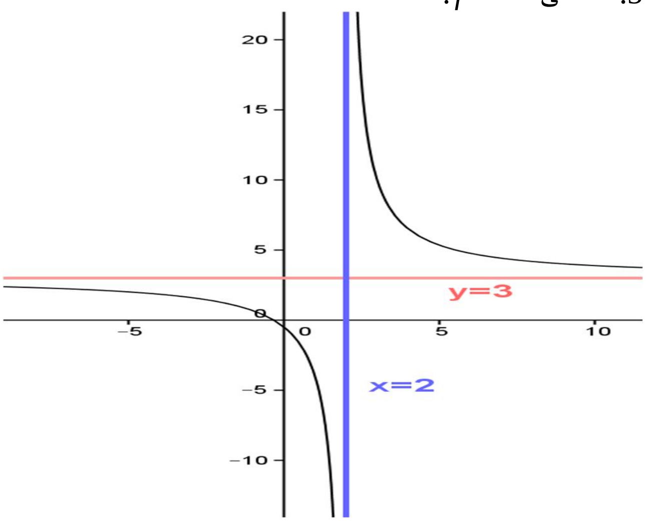
جدول تغيرات الدالة.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	3	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	3

4.

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2 /3	-1/2	-4		10	13/2	4

5. منحنى الدالة f.



تمرين18: نعتبر الدالة العددية f المعرفة العددية المعرفة ب:

$f(x)=\sqrt{3x-5}$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f.
2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. أحسب $f'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة f.
4. أحسب $f(2)$ و $f(3)$ و $f(7)$
5. مثل مبيانيا الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

الأجوبة:

1. $f(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $3x-5\geq 0$ يعني $3x\geq 5$ و منه $x\geq\frac{5}{3}$

يعني حيز تعريف الدالة f هو: $D=\left[\frac{5}{3},+\infty\right[$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sqrt{3-\frac{5}{x}}=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

3. لدينا: $\left(\forall x\in\left]\frac{5}{3},+\infty\right[\right)\ f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$

بما أن $\frac{3}{2}>0$ و $\sqrt{3x-5}>0$ فإن: $f'(x)>0$.

جدول التغيرات:

x	$5/3$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

4. لدينا: $f(2)=\sqrt{3\times2-5}=\sqrt{1}=1$

و $f(3)=\sqrt{3\times3-5}=\sqrt{4}=2$

و $f(7)=\sqrt{3\times7-5}=\sqrt{16}=4$

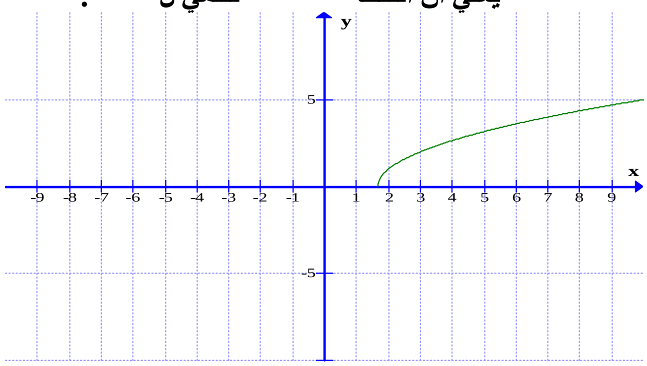
5. التمثيل المبياني:

$f\left(\frac{5}{3}\right)=0$ يعني أن النقطة $A\left(\frac{5}{3},0\right)$ تنتمي ل (C_f).

$f(2)=1$ يعني أن النقطة $B(2,1)$ تنتمي ل (C_f).

$f(3)=2$ يعني أن النقطة $B(3,2)$ تنتمي ل (C_f).

$f(7)=4$ يعني أن النقطة $B(7,4)$ تنتمي ل (C_f).



تمرين19: نعتبر الدالة العددية f المعرفة العددية المعرفة ب:

$f(x)=\sqrt{2x+4}$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f.
2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. أحسب $f'(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة f.

4. أحسب $f(-2)$ و $f(0)$ و $f(6)$

5. مثل مبيانيا الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

الأجوبة :(1 $f(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $2x+4\geq 0$ يعني $2x\geq -4$ و منه $x\geq -2$

يعني حيز تعريف الدالة f هو: $D=[-2,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sqrt{2+\frac{4}{x}}=+\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

لدينا: $(\forall x\in]-2,+\infty[)\ f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+4}}=\frac{1}{\sqrt{2x+4}}$

بما أن $\sqrt{2x+4}>0$ فان: $f'(x)>0$.

جدول التغيرات:

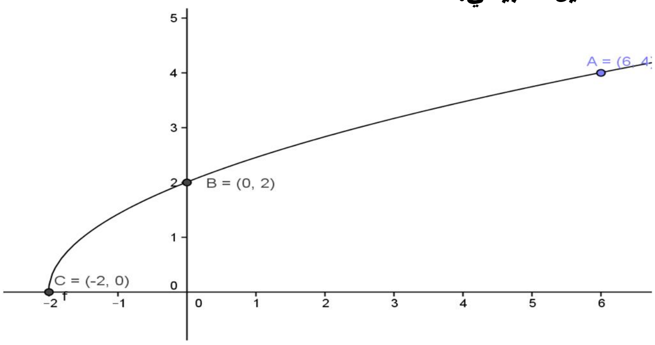
x	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

لدينا: $f(-2)=\sqrt{2\times(-2)+4}=\sqrt{0}=0$

و $f(0)=\sqrt{2\times 0+4}=\sqrt{4}=2$

و $f(6)=\sqrt{2\times 6+4}=\sqrt{16}=4$

التمثيل المبياني:



تمرين20: نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g(x)=\frac{2x+1}{x+1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة g.
2. أحسب نهايات الدالة g في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
3. أحسب الدلة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g.
4. أنشئ منحنى الدالة g.

الأجوبة :

1)حيز تعريف الدالة g هو:

$$D=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1\}$$

و منه

$$D=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$$

(2 $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2$ و

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

$$\lim_{x\to-1^+} g(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{2x+1}{x+1}=-\infty \text{ و}$$

$$\lim_{x\to-1^-} g(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{2x+1}{x+1}=+\infty$$

يعني المستقيم ذا العادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى.

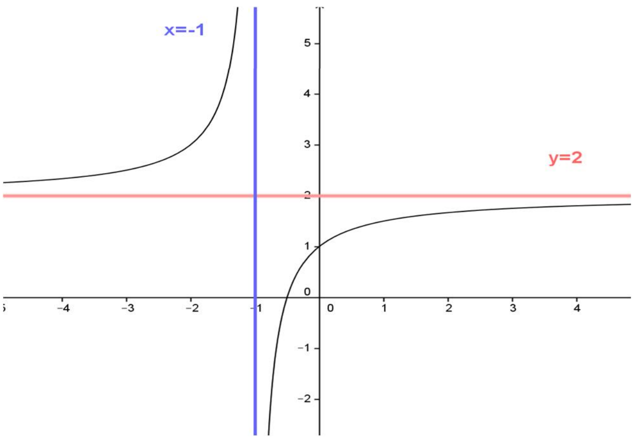
3)لكل x من D لدينا: $g'(x)=\frac{\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$ يعني:

$$(\forall x\in D)\ g'(x)>0$$

4)جدول تغيرات الدالة.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	2 ↗	‖	↗ 2

منحنى الدالة g.



تمرين21: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أدرس زوجية الدالة f
3. أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f
4. أدرس الفروع اللانهاية لمنحنى الدالة f
5. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها
6. حدد جدول تغيرات الدالة f
7. حدد معادلة لمماس المنحني (C_f) الممثل للدالة f في النقطة A التي أفصولها $x_0=-1$
8. حدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.
9. حدد مطا ريف الدالة f اذا وجدت
10. أرسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

أجوبة : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$ (1 $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2)أ) اذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان $-x\in\mathbb{R}$

ب) $f(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-4(-x)=-\frac{1}{3}x^3-4(-x)=-\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)=-f(x)$

ومنه f دالة فردية

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

لأن نهاية دالة حدودية عند مالانهايةهي نهاية حدها الأكبر درجة

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^2=+\infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{3}x^2=+\infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

5) $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)'=\frac{1}{3}3\times x^2-4=x^2-4$

$(x-2)(x+2)=0\Leftrightarrow x^2-2^2=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow f'(x)=0$

$x=-2$ أو $x=2\Leftrightarrow$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x2-4$	$+$	0	$-$	0	$+$

(6

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$16/3$	$\searrow$	$-16/3$	$\nearrow$	$+\infty$

7)معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0=-1$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $f(-1)=\frac{11}{3}$ و $f'(-1)=-3$

$y=-3x+\frac{2}{3}\Leftrightarrow y=\frac{11}{3}-3(x+1)\Leftrightarrow y=f(-1)+f'(-1)(x+1)$

8) أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\frac{1}{3}x^3-4x=0$

يعني $x\left(\frac{1}{3}x^2-4\right)=0$ يعني $x=0$ أو $\frac{1}{3}x^2-4=0$

يعني $x=0$ أو $x^2=12$ يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{12}$ أو $x=-\sqrt{12}$

يعني $x=0$ أو $x=2\sqrt{3}$ أو $x=-2\sqrt{3}$

ومنه نقط التقاطع هم : $A(2\sqrt{3};0)$ و $B(-2\sqrt{3};0)$ و $O(0;0)$

ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ لدينا $f(0)=0$ ومنه نقطة التقاطع هي: $O(0;0)$

9) $f(2)=-\frac{16}{3}$ هي قيمة دنيا للدالة f

$f(-2)=\frac{16}{3}$ هي قيمة قصوى للدالة f

9)التمثيل المبياني للدالة f