أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:الحساب المثلثي الجزء الأول

المستوى : الجذع مشترك علمي و الجذع مشترك تكنولوجي

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1:

1. لتكن زاوية قياسها بالدرجة 135° حدد قياسها بالراديان و حدد قياسها بالغراد
2. لتكن زاوية قياسها بالدرجة 120° حدد قياسها بالراديان و حدد قياسها بالغراد

أجوبة 1: أ)حساب القياس بالراديان: $\frac{\gamma}{\pi}=\frac{135}{180^\circ}$ يعني $135\times\pi=\gamma\times180$

يعني $\gamma=\frac{135\times\pi}{180}=\frac{27\times\pi}{36}=\frac{3\pi}{4}rad$

ب)حساب القياس بالغراد: $\frac{\beta}{200}=\frac{135}{180^\circ}$ يعني $135\times200=\beta\times180$

يعني $\beta=\frac{135\times200}{180}$ يعني $\beta=150grad$

2) أ)حساب القياس بالراديان: $\frac{\gamma}{\pi}=\frac{120}{180^\circ}$ يعني $120\times\pi=\gamma\times180$

يعني $\gamma=\frac{120\times\pi}{180}=\frac{12\times\pi}{18}=\frac{2\pi}{3}rad$

ب)حساب القياس بالغراد: $\frac{\beta}{200}=\frac{120}{180^\circ}$ يعني $120\times200=\beta\times180$

يعني $\beta=\frac{120\times200}{180}$ يعني $\beta=133,33grad$

تمرين2:

مثل على الدائرة المثلثية للنقط التالية : $A(0)$ و $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$ و $D\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$ و $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ و $G\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ و $H\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ و $M\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ و $N\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ و $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$

أجوبة: $\frac{7\pi}{2}=\frac{8\pi-\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=4\pi-\frac{\pi}{2}$ وبما أن : $-\pi<-\frac{\pi}{2}\le\pi$

فان : $-\frac{\pi}{2}$ هو أفصول منحنى رئيسي للنقطة M_0

الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$

طريقة1: نقسم العدد 2007 على 4 فنجد 501,75

ونأخذ أقرب عدد صحيح له أي 502

$\frac{2007\pi}{4}-502\pi=\frac{2007\pi}{4}-\frac{2008\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$

يعني $\frac{2007\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+502\pi=-\frac{\pi}{4}+2\times251\pi$

وبما أن : $-\pi<-\frac{\pi}{4}\le\pi$ فان : $-\frac{\pi}{4}$ هو الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة I

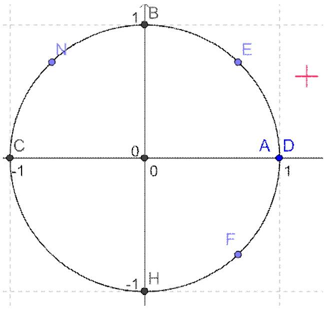
طريقة2: $-\pi<\frac{2007\pi}{4}+2k\pi\le\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ يعني $-1<\frac{2007}{4}+2k\le1$

يعني $-1-\frac{2007}{4}<2k\le1-\frac{2007}{4}$ يعني $-\frac{2011}{4}<2k\le-\frac{2003}{4}$

يعني $-\frac{2011}{8}<k\le-\frac{2003}{8}$ يعني $-251,3\approx-\frac{2011}{8}<k\le-\frac{2003}{8}\approx-250,3$

اذن : $k=-251$ ومنه $\alpha=\frac{2007\pi}{4}+2(-251)\pi=-\frac{\pi}{4}$

ومنه : $-\frac{\pi}{4}$ هو الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة I



تمرين3:

حدد الأفصول المنحني الرئيسي للنقط التالية ومثلهم على الدائرة المثلثية : $M_0\left(\frac{9\pi}{2}\right)$ و $M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right)$ و $M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right)$ و $M_3\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

أجوبة1: الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M_0

طريقة1: $\frac{9\pi}{2}=\frac{8\pi+\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=4\pi+\frac{\pi}{2}=2\times2\pi+\frac{\pi}{2}$ وبما أن : $-\pi<\frac{\pi}{2}\le\pi$

فان : $\frac{\pi}{2}$ هو الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M_0

طريقة2: $-\pi<\frac{9\pi}{2}+2k\pi\le\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ يعني $-1<\frac{9}{2}+2k\le1$

يعني $-1-\frac{9}{2}<-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+2k\le1-\frac{9}{2}$ يعني $-\frac{11}{2}<2k\le-\frac{7}{2}$

يعني $-\frac{11}{2}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le-\frac{7}{2}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{11}{4}<k\le-\frac{7}{4}$ يعني $-2,7\approx-\frac{11}{4}<k\le-\frac{7}{4}\approx-1,7$

اذن : $k=-2$ ومنه $\alpha=\frac{9\pi}{2}+2(-2)\pi=\frac{9\pi}{2}-4\pi=\frac{9\pi-8\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

ومنه : $\frac{\pi}{2}$ هو الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M_0

2) الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M_1

طريقة1: $\frac{67\pi}{4}=\frac{64\pi+3\pi}{4}=\frac{64\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=16\pi+\frac{3\pi}{4}=2\times8\pi+\frac{3\pi}{4}$ وبما أن :

$-\pi<-\frac{\pi}{3}\le\pi$ فان : $-\frac{\pi}{3}$ هو الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M_1

طريقة2: $-\pi<\frac{11\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ يعني $-1<\frac{11}{3}+2k\le1$

يعني $-1-\frac{11}{3}<-\frac{11}{3}+\frac{11}{3}+2k\le1-\frac{11}{3}$ يعني $-\frac{14}{3}<2k\le-\frac{8}{3}$

يعني $-\frac{14}{3}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le-\frac{8}{3}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{7}{3}<k\le-\frac{4}{3}$ يعني $-2,3\approx-\frac{7}{3}<k\le-\frac{4}{3}\approx-1,3$

اذن : $k=-2$ ومنه $\alpha=\frac{11\pi}{3}+2(-2)\pi=\frac{11\pi}{3}-4\pi=\frac{11\pi-12\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$

ومنه : $-\frac{\pi}{3}$ هو الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M_1

3) الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M_2

طريقة1: $\frac{67\pi}{3}=\frac{64\pi+3\pi}{4}=\frac{64\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=16\pi+\frac{3\pi}{4}=2\times8\pi+\frac{3\pi}{4}$ وبما أن : $-\pi<\frac{3\pi}{4}\le\pi$

فان : $\frac{3\pi}{4}$ هو الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M_2

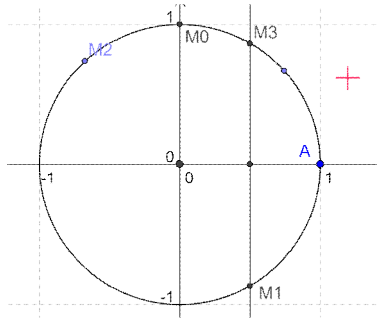
طريقة2: $-\pi<\frac{67\pi}{4}+2k\pi\le\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ يعني $-1<\frac{67}{4}+2k\le1$

يعني $-1-\frac{67}{4}<-\frac{67}{4}+\frac{67}{4}+2k\le1-\frac{67}{4}$ يعني $-\frac{71}{4}<2k\le-\frac{63}{4}$

يعني $-\frac{71}{4}\times\frac{1}{2}<2k\times\frac{1}{2}\le-\frac{63}{4}\times\frac{1}{2}$ يعني $-\frac{71}{8}<k\le-\frac{63}{8}$ يعني $-8,8\approx-\frac{71}{8}<k\le-\frac{63}{8}\approx-7,8$

اذن : $k=-8$ ومنه $\alpha=\frac{67\pi}{4}+2(-8)\pi=\frac{67\pi}{4}-16\pi=\frac{67\pi-64\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

ومنه : $\frac{3\pi}{4}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_2 الأفصول المنحني الرئيسي



للنقطة M_3 $\frac{19\pi}{3}=\frac{18\pi+\pi}{3}=\frac{18\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=6\pi+\frac{\pi}{3}=2\times3\pi+\frac{\pi}{3}$

وبما أن : $-\pi<\frac{\pi}{3}\leq\pi$

فان : $\frac{\pi}{3}$ هو الأفصول المنحنى الرئيسي للنقطة M_3

تمرين4: بين أن : لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

الجواب: $1+(\tan x)^2=1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2=1+\frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2}=\frac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2}$

ونعلم أن: $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ اذن①

$1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$

وتكتب على شكل مبرهنة

تمرين5: علما أن : $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ و $\sin x=-\frac{4}{5}$

أحسب $\cos x$ و $\tan x$

أجوبة:1) حساب $\cos x$

نعلم أن: $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ يعني $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$

يعني $(\cos x)^2+\frac{16}{25}=1$ يعني $(\cos x)^2=1-\frac{16}{25}$ يعني $(\cos x)^2=\frac{9}{25}$

يعني $\cos x=\sqrt{\frac{9}{25}}$ أو $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{25}}$ يعني $\cos x=\frac{3}{5}$ أو $\cos x=-\frac{3}{5}$

ونعلم أن: $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ يعني $\cos x\geq0$ ومنه نأخذ: $\cos x=\frac{3}{5}$

1) حساب $\tan x$ **لدينا:** $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

يعني $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4}{5}\times\frac{5}{3}=-\frac{4}{3}$

تمرين6: علما أن : $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ و $\tan x=\frac{1}{3}$ أحسب 1) $\cos x$

2) $\sin x$

أجوبة:1) نعلم أن: $1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$

يعني أن : $1+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 x}$ يعني $1+\frac{1}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$

يعني $\frac{10}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$ يعني $10\cos^2 x=9$ يعني $\cos^2 x=\frac{9}{10}$

يعني $\cos x=\sqrt{\frac{9}{10}}$ أو $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}$

ونعلم أن: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ يعني $\cos x\leq0$ ومنه نأخذ: $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2) نعلم أن: $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ يعني: $\sin x=\tan x\times\cos x$ يعني: $\sin x=-\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

	$-x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$
$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
$\tan x$	$-\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{-1}{\tan x}$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	*0*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	*1*
$\cos x$	*1*	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	*0*

تمرين7: بسط و أحسب التعابير التالية :

$\cos\frac{3\pi}{4}$ و $\sin\frac{3\pi}{4}$ و $\cos\frac{7\pi}{6}$ و $\sin\frac{7\pi}{6}$ و $\cos\frac{10\pi}{3}$

$\cos\frac{13\pi}{6}$ و $\sin\frac{53\pi}{6}$ و $\cos\frac{34\pi}{3}$ و $\tan\frac{3\pi}{4}$ و $\tan\frac{37\pi}{4}$

أجوبة: $\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\frac{4\pi-\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\frac{4\pi-\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\frac{6\pi+\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\frac{6\pi+\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

$\cos\frac{10\pi}{3}=\cos\left(\frac{9\pi+\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{9\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$\cos\frac{10\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$\cos\frac{13\pi}{6}=\cos\left(\frac{12\pi+\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{12\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{53\pi}{6}=\sin\left(\frac{54\pi-\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{54\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(9\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(8\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin\frac{53\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$\cos\frac{34\pi}{3}=\cos\left(\frac{33\pi+\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{33\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(11\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(10\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{34\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$\tan\frac{3\pi}{4}=\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$

$\tan\frac{37\pi}{4}=\tan\left(\frac{36\pi+\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{36\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(9\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

تمرين8: بسط التعابير التالية :

1. $A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$
2. $B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}$
3. $C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
4. $D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$
5. $E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)$

.6 $F = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

.7 $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

.8 $H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

أجوبة 1:

$A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$

$A=\sin(x)\times\sin(x)-\cos x\times(-\cos x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$

(2 $B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}=\frac{\sin x+\sin x}{-\cos x}=-\frac{2\sin x}{\cos x}=-2\tan x$

(3 $C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)$

$C=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$C=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{3\sqrt{3}}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2\sqrt{3}}{6}$

$C=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$

(4 $D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$

$D=\sin(10\pi+\pi-x)+\cos(4\pi+\pi+x)+\cos(2\times7\pi-x)$

$D=\sin(\pi-x)+\cos(\pi+x)+\cos(-x)$

$D=\sin(x)-\cos(x)+\cos(x)=\sin(x)$

(5 $E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)=-\tan(x)+\tan(x)=0$

(6 $F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

نلاحظ أنُ: $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{2\pi}{10}+\frac{3\pi}{10}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ يعني $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$

ومنه: $F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$

(7 $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

نلاحظ أنُ: $\frac{\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}=\pi$ يعني: $\frac{\pi}{7}=\pi-\frac{6\pi}{7}$

و أن: $\frac{2\pi}{7}+\frac{5\pi}{7}=\pi$ يعني: $\frac{5\pi}{7}=\pi-\frac{2\pi}{7}$

و أن: $\frac{3\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}=\pi$ يعني: $\frac{4\pi}{7}=\pi-\frac{3\pi}{7}$

ومنه: $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)$

يعني: $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)=0$

(8 $H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

نلاحظ أنُ: $\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi$ يعني: $\frac{7\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$

و أن: $\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi$ يعني: $\frac{5\pi}{8}=\pi-\frac{3\pi}{8}$

ومنه: $H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$

يعني: $H=+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

نلاحظ أيضا أن: $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ يعني: $\frac{3\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$

ومنه: $H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$

يعني: $H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\times1=2$

تمرين9: بسط التعابير التالية :

(1 $A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}-2\sin\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{10}$

(2 $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}$

(3 $C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{9\pi}{12}+\sin^2\frac{11\pi}{12}$

الأجوبة :

(1 $A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}-2\sin\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{10}$

نلاحظ أنُ: $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ يعني: $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$

$\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}=\pi$ يعني: $\frac{4\pi}{5}=\pi-\frac{\pi}{5}$

$A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)-2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)$

$A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=0$

(2 $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

نلاحظ أنُ: $\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi$ يعني: $\frac{7\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$

و أن: $\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi$ يعني: $\frac{5\pi}{8}=\pi-\frac{3\pi}{8}$

ومنه: $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$

يعني: $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left(-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$

$B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\cos^2\frac{3\pi}{8}$

$B=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$

ونلاحظ أيضا أن: $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ يعني: $\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

ومنه: $B=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\times1=2$

(3 $C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{9\pi}{12}+\sin^2\frac{11\pi}{12}$

نلاحظ أنُ: $\frac{\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}=\pi$ يعني: $\frac{11\pi}{12}=\pi-\frac{\pi}{12}$

و أن: $\frac{3\pi}{12}+\frac{9\pi}{12}=\pi$ يعني: $\frac{9\pi}{12}=\pi-\frac{3\pi}{12}$

و أن: $\frac{5\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}=\pi$ يعني: $\frac{7\pi}{12}=\pi-\frac{5\pi}{12}$

ومنه: $C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\left(\pi-\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)$

$C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$C=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{3\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}+2\sin^2\frac{\pi}{4}$

$C=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{3\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}\right)+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

ونلاحظ أيضا أن: $\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$ يعني: $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$

ومنه: $C=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right)+1=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)+1=2\times1+1=3$

تمرين10: أحسب وبسط:

$A=\sin(\pi+x)-\cos(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$B=\sin(6\pi+x)-\cos(3\pi-x)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$

$C=\sin(x-7\pi)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\sin(x+11\pi)+\cos\left(\frac{-3\pi}{2}-x\right)$

أجوبة:

$A=\sin(\pi+x)-\cos(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x+\cos x-\cos x+\sin x=0$

$B=\sin(6\pi+x)-\cos(3\pi-x)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$

$B=\sin(2\times3\pi+x)-\cos(2\pi+\pi-x)+\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)-\cos\left(\frac{4\pi-\pi}{2}+x\right)$

$B=\sin(x)+\cos(x)-\cos(x)-\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin(x)-\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$

$B=\sin(x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)-\sin(x)=0$

$C=\sin(x-7\pi)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\sin(x+11\pi)+\cos\left(\frac{-3\pi}{2}-x\right)$

$C=\sin(x-\pi-6\pi)-\cos\left(\frac{4\pi+\pi}{2}+x\right)+\sin(x+1\pi+10\pi)+\cos\left(\frac{-4\pi+\pi}{2}-x\right)$

$C=\sin(x-\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x+\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$C=\sin(-(\pi-x))-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x+\pi)+\sin x$

$C=-\sin(\pi-x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x+\pi)+\sin x$

$C=-\sin(x)+\sin(x)-\sin(x)+\sin(x)=0$

تمرين11: بين أن :

1. $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2$
2. $\cos^4 x-\cos^2 x+\sin^2 x-\sin^4 x=0$
3. $\cos^4 x+\sin^4 x=1-2\cos^2 x\times\sin^2 x$
4. $\cos^4 x-\sin^4 x+2\times\sin^2 x=1$
5. $\cos^6 x+\sin^6 x+3\cos^2 x\times\sin^2 x=1$,

أجوبة 1) $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=$

$=\cos^2 x+2\cos x\times\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-2\cos x\times\sin x+\sin^2 x$

$=2\cos^2 x+2\sin^2 x=2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=2\times1=2$

2) $\cos^4 x-\cos^2 x+\sin^2 x-\sin^4 x=\left(\cos^2 x\right)^2-\left(\sin^2 x\right)^2-\cos^2 x+\sin^2 x$

$=\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)-\cos^2 x+\sin^2 x$

$=\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\times1-\cos^2 x+\sin^2 x=\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x=0$

3) $\cos^4 x+\sin^4 x=1-2\cos^2 x\times\sin^2 x$

نعلم أن: $\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2=\left(\cos^2 x\right)^2+2\cos^2 x\times\sin^2 x+\left(\sin^2 x\right)^2$

يعني : $\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2=\cos^4 x+\sin^4 x+2\cos^2 x\times\sin^2 x$

يعني : $(1)^2=\cos^4 x+\sin^4 x+2\cos^2 x\times\sin^2 x$

يعني : $1-2\cos^2 x\times\sin^2 x=\cos^4 x+\sin^4 x$

4) $\cos^4 x-\sin^4 x+2\times\sin^2 x=1$ ؟؟؟؟

$\cos^4 x-\sin^4 x+2\times\sin^2 x=\left(\cos^2 x\right)^2-\left(\sin^2 x\right)^2+2\times\sin^2 x$

$=\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)+2\times\sin^2 x$

$=\cos^2 x-\sin^2 x+2\times\sin^2 x=\cos^2 x+\sin^2 x=1$

5) نعلم أن: $\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^3=\cos^6 x+3\cos^4 x+3\cos^2 x\times\sin^4 x+\sin^6 x$

يعني : $1=\cos^6 x+\sin^6 x+3\sin^2 x\cos^4 x+3\cos^2 x\times\sin^4 x$

يعني : $1=\cos^6 x+\sin^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$

يعني : $\cos^6 x+\sin^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x=1$

تمارين للبحث والتثبيت

تمرين1: علما أن : $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

1. بين أن $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ثم أحسب : $\sin\frac{\pi}{8}$
2. استنتج : $\cos\frac{7\pi}{8}$ و $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$ و $\tan\frac{7\pi}{8}$

تمرين2: نعلم أن : $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

1. بين أن $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ وأن $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
2. استنتج قيمة $\tan\frac{7\pi}{8}$ و $\cos\frac{3\pi}{8}$

تمرين3: ليكن x عدد حقيقي بحيث $0\prec x\prec\pi$ و $x\neq\frac{\pi}{2}$ نعتبر التعبير

$A(x)=\frac{\tan x}{\sin^3 x\cos x}$

1. عبر عن A(π-x) بدلالة A(x)
2. عبر عن $A\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ بدلالة A(x)
3. أكتب A(x) بدلالة cosx
4. بين أن $A(x)=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}$

أحسب $A(\frac{\pi}{6})$ و $A(\frac{\pi}{3})$ و $A(\frac{\pi}{4})$ و $A(\frac{5\pi}{6})$

تمرين4: 1) علما أن : $\cos x+\sin x=\frac{7}{5}$

أحسب $\cos x$ و $\sin x$

2) علما أن : $2\sin^2 x+5\cos x-4=0$ و $0\leq x<\pi$

أحسب $\cos x$ و $\sin x$

تمرين5: علما أن : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

أحسب: $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\tan\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$ و $\tan\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$ و $\tan\left(\frac{-13\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{145\pi}{12}\right)$ و $\tan\left(\frac{-85\pi}{12}\right)$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien