http:// xyzmath.e-monsite.com

الأولمبياد العالمي للرياضيات 1959 – 2010

الدكتور عمران قوبا

2010

الهيئة الوطنيّة للأولمبياد العلمي السوري

http:// xyzmath.e-monsite.com

الأولمبياد العالمي للرياضيّات

الكتاب الذهبي

الدكتور عمران قوبا

2010

الأولمبياد العالمي للرياضيات

الكتاب الذهبي

تقديم

لا بُدّ أن فكرة وضع طلاّبٍ في مواجهة مسائل في الرياضيّات قديمةٌ. فنرى مسابقات الرياضيّات في تقاليد العديد من البلدان وعلى مدى العصور. إذ كان الإغريق يتبارون في حلّ مسائل الهندسة الإقليديّة. وفي القرن السادس عشر كان الإيطاليّون يتبارون في حلّ المعادلات من الدرجة الثالثة. وأعلن الفرنسيّون عن مسابقات في الرياضيّات في القرن الثامن عشر. ولعلّ مسابقات Eötvös التي نظّمتها هنغاريا عام 1894 أقرب سلف لمسابقات الأولمبياد المُعاصرة.

لقد جرى تنظيم أوّل أولمبياد للرياضيّات في مدينة لينَنغراد (سان بيترسبوغ حالياً) عام 1934، من قبل الرياضيَّيْن Delone و Frijtengolts. وأقامت رومانيا أوّل أولمبياد عالمي للرياضيات عام 1959، وكان له صيغة مسابقة موجّهة لدول أوربا الشرقيّة وشاركت فيها سبع دول. وصارت المسابقة، منذ ذلك الحين، تُجرى كل عام باستثناء عام 1980. بدايةً، كانت المشاركة بالمسابقة محصورة بالدول نفسها، إلاّ أنّها أخذت بالاتساع لتشمل حاليّاً أكثر من تسعين دولة، من القارات الخمس. يتغيّر البلدُ المُضيف سنويّاً، وإن كان هناك العديد من البلدان التي استضافت الأولمبياد أكثر من مرّة. يرافق المسابقة عادة برنامج ثقافي وسياحي في البلد المُضيف يهدف إلى تعميق التفاهم المتبادل بين الفِرَق المشاركة وتنميّة علاقات الصداقة والودٍّ بين المتسابقين والمشرفين. في البداية كانت كلُّ دولة تشارك بثمانية متسابقين أو متسابقات على الأكثر، خُفِّضَ هذا العددُ إلى أربعة متسابقين عام 1982، ثُمّ رُفِعَ من جديد إلى ستة مشاركين، وبقي على هذه الحال حتّى وقتنا هذا.

يجب ألاّ يتجاوز عمر المتسابق عشرين عاماً وألاّ يكونَ قد تلقّى تعليماً ما بعد الثانوي. ويمكن للمتسابق أن يشارك أكثر من مرّة إذا حقّق الشرطين السابقين. ومع أنّ المتسابقين يمثّلون بلدانهم في المسابقة إلاّ أنّ عمليّة تقييم أدائهم عمليّة فرديّة، إذْ ليس هناك تقييم جماعي للفرق المُشاركة.

يتبع كلٌّ بلدٍ طريقته الخاصّة في اختيار مرشّحيه للمشاركة في هذه المسابقة، إلاّ أنّها جميعاً تتطلّب من ممثّليها مهارة عالية في مجال الرياضيّات. كما تمنح المسابقة المُشاركين فُرصة عرض مهاراتهم وحنكتهم وسرعة بديهتهم في مواجهة مسائل في الرياضيّات. يمتدّ الحدث على مدى أسبوعين تحتلّ فيهما المسابقة فعلياً يومين متتاليين فقط، إذْ يُمضي المتسابقون بقية الوقت في زيارة البلد المُضيف والاطلاع على ثقافته، وزيارة المواقع السياحيّة المهمّة فيه، وفي تنميّة الصلات الاجتماعيّة فيما بينهم. وبالنسبة إلى العديد من المشاركين تحتلّ الذكريات والصداقات التي تُنسج في هذه المناسبة مركزاً أكثر أهميّة في نفوسهم من الدرجات التي يُحصِّلونها أو الميداليّات التي يحصلون عليها. كما حقّق العديد منهم لاحقاً إنجازات مهمّة في الرياضيات.

يتكّون كلّ فريق مشاركٍ من ستة متسابقين على الأكثر، ومن قائدَين اثنين للفريق على الأكثر. يكتب كلٌّ متسابقٍ ورقتين في يومَي المسابقة المتتاليين، تحوي كلٌّ ورقة حلولَه للمسائل الثلاث التي طُرحت عليه في ذلك اليوم. وتُصحّحُ كلٌّ مسألة وتعطى النتيجة بصيغة عددٍ صحيحٍ بين 0 و 7. (فقط في أولمبياد عام 1962 طُرِحت سبع مسائل بدلاً من ستّ وهذا هو الاستثناء الوحيد).

حقائق عامّة عن الأولمبياد العالمي للرياضيّات

- **أوراق الأسئلة**. قبل أربعة أشهر على الأقل من موعد المسابقة، يمكن لكلّ دولةٍ ضيف أن تقترح ستة أسئلة على الأكثر بهدف دراستها لتكون بين الأسئلة المُختارة للمسابقة. تجري دراسة هذه المُقترحات في البلد المُضيف من قِبَل لجنة المسابقة التي تختار من مجموع هذه الأسئلة **قائمة قصيرة** مكوّنة من حوالي ثلاثين سؤالاً. ولقد رأينا في السنوات الأخيرة قائمة أقصر، مكوّنة من اثني عشر سؤالاً، تمثّل الأسئلة المفضّلة لدى اللجنة. أمّا الاختيار النهائي للأسئلة التي ستطرح في المسابقة فتُجريه **لجنة الحكّام الدوليّة**، وهي مكوّنة من قائد كلٍّ فريق مشارك، بالإضافة إلى أربعة حكّام تنفيذيّين يختارهم البلد المُضيف، وتُتّخَذ القرارات بالأكثريّة. تجتمع لجنة الحكّام الدوليّة قبل أيّامٍ من موعد المسابقة في **مكان معزولٍ** وسرّيّ ويجري الاختيار النهائي لأسئلة المسابقة. اللغات الرسميّة في المسابقة هي الانجليزيّة والفرنسيّة والألمانيّة والروسيّة وهناك بعض اللغات «غير الرّسميّة» كالإسبانيّة والعربيّة. أمّا الطلبة العرب فتوزّع عليهم الأسئلة باللغات العربيّة والإنكليزيّة والفرنسيّة.

▫ **لجنة الحكّام الدوليّة.** يتسلّم أعضاء اللجنة القائمة القصيرة عند وصولهم إلى المكان المعزول ويُمنحون بعض الوقت للنظر في الأسئلة قبل الاجتماع لمناقشة المسائل التي سيجري اختيارها. ينبغي على اللجنة أن تستثني أي سؤال مطروح سابقاً، أو منصوص عنه في أحد الكتب، أو مستخدم في فترة التدريب. تحذف بعض المسائل مباشرة إذا وُجدت صعبة جدّاً أو سهلة جدّاً. وبعد جدال قد يدوم طويلاً يجري اختيار المسائل الصعبة التي تحمل الأرقام 3 و 6، ثُمّ المسائل الأقل صعوبة والتي تحمل الأرقام 1 و 2 و 4 و 5، ويجري التصويت على كلٍّ واحدة منها. وأخيراً يُترجِمُ قادة الفِرَق، التي يتطلّب طلاّبها لغات أخرى، الأسئلة إلى لغاتهم، ويجري تدقيق جميع الترجمات من قِبَل جميع أعضاء اللجنة، للتيقّن من حُسن الترجمة.

▫ **المسابقة.** يصل المتسابقون إلى البلد المُضيف قبل موعد المسابقة بعدّة أيام، لمنحهم الوقت اللازم للتأقلم. وتتكوّن المسابقة من ورقتين، تشمل كلّ واحدة منهما ثلاثة أسئلة، يجب الإجابة عنها في أربع ساعات ونصف الساعة. الأولى في اليوم الأوّل والثانية في اليوم الذي يليه. تقليدياً، السؤال رقم 1 هو الأسهل، والسؤال رقم 6 هو الأصعب. وفي الوقت الذي يجري فيه تصحيح الأوراق، يخضع المتسابقون لبرنامج ترفيهي وثقافي وسياحي يهدف إلى تعرّف البلد المُضيف.

▫ **تصحيح الأوراق.** نظراً إلى تعدُّد لغات البلدان المشاركة، يُصحِّح بدايةً قادةُ كلِّ فريق أوراقَ فريقهم، ولكن دون أن يضعوا أيّ درجات على أوراق الإجابة. ثُمّ يسلّمون الأوراق، بعد ترجمة بعض الأجزاء التي تتطلّب الترجمة منها، إلى فريق واضعي الدرجات، المسمّى **فريق المُنسّقين**، الذين يُعيِّنهم البلد المُضيف. وفي النهاية يجب أن يتفق قادة الفِرَق مع المنسّقين على الدرجات التي تُمنح لكلّ ورقة إجابة، فتسجّل هذه الدرجات في التقرير الرسمي الذي يوقّعه الفريقان. وإذا وقع خلافٌ يُحاول قائد فريق المنسّقين التوسّط للتوصّل إلى اتفاق، وإذا بقي الخلاف قائماً، تُعرض المشكلة على كامل لجنة التحكيم الدوليّة ليُتّخذ القرار فيها بالأكثرية.

▫ **النتائج.** إنّ الأولمبياد العالمي للرياضيّات مسابقة فرديّة، يتبارى فيها الأفراد وليس الفِرَق. يُمنح فيه نصف المتسابقين تقريباً ميداليّات ذهبيّة وفضيّة وبرونزيّة تتناسب أعدادها مع 1 و 2 و 3، على ألاّ تزيد نسبة المتسابقين الذين يحصلون على ميداليّات ذهبيّة على $\frac{1}{12}$، وألاّ تزيد نسبة المتسابقين الذين يحصلون على ميداليّات ذهبيّة أو فضيّة على $\frac{1}{4}$، وألاّ تزيد نسبة المتسابقين الذين يحصلون على ميداليّة ما على $\frac{1}{2}$، ولتشجيع المتسابقين على المثابرة وإنجاز الحلول تُمنح شهادة تقدير إلى المتسابقين الذين يحلّون واحدة من المسائل حلاً كاملاً دون أن يحصلوا على ميدالية.

هذا الكتاب

تُشجّع المشاركة في هذه التظاهرة البُلدان على وضع آليّات لتدريب الفِرَق، واختيارها بطرائق تنافسيّة تحفّز الطلاب، لأنّ ذلك ينعكس إيجاباً، ليس فقط على الفئة المعنيّة بالمشاركة في المسابقة فحسب، بل على كامل أساليب تدريس الرياضيّات خصوصاً والعلوم عموماً.

لذلك رأيتُ أن أجمع في كتابٍ واحدٍ وباللغة العربيّة، جميع المسائل التي طُرِحتْ في الأولمبياد العالمي للرياضيّات، منذ البداية وحتى تاريخ صدور هذا الكتاب، وأن أعرضَ حلولاً لهذه المسائل. راجياً أن يجد القارئ المهتمّ والمحبُّ للرياضيات فائدة في ذلك.

كما لخّصتُ في مُلحقٍ، مجموعةً من المعارف والخواص التي افترضتُ في القارئ معرفتها. وأخيراً، بغية اكتمال الفائدة من هذا الكتاب، أوصي القارئ الكريم بعدم التسرّع في قراءة الحلول المقترحة للمسائل بل مُقارعتها تفكيراً وبحثاً. وعندها سيجد القارئ متعة في دراسة هذا الكتاب وفي إيجاد حلول أخرى غير التي اخترتُها، وفي ذلك جُلّ الفائدة والمتعة.

وأخيراً أختم هذه المقدّمة بتقديم الشكرالعميق إلى السيّد الرئيس بشار الأسد وإلى السيّدة عقيلته للاهتمام البالغ الذي أولياه لعمليّة إعداد الفريق الوطني في الجمهوريّة العربيّة السوريّة، والذي تتوّج بإنشاء الهيئة الوطنية للألمبياد العلمي السوري، ولتشجيعهما الحثيث على المشاركة في هذه المسابقة العالميّة.

دمشق في 7 أيلول 2010.

الدكتور عمران قوبا

المحتوى

أولمبياد الرياضيّات الأوّل

① **أثبت أنّ الكسر** $\frac{21n+4}{14n+3}$ **لا يقبل الاختزال مهما كانت قيمة العدد الصحيح** n.

في الحقيقة، يجب إثبات أنّ العددين $21n+4$ و $14n+3$ أوّليّان فيما بينهما، وذلك مهما كانت قيمة العدد الصحيح n. وهذا ينتج وضوحاً من المتطابقة التالية :

$$3(14n+3)-2(21n+4)=1$$

② **حلّ في** $\mathbb{R}$ **المعادلة :** $A=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$ **، إذ نفترض أنّ جميع الجذور التربيعيّة هي جذور تربيعيّة لأعداد موجبة. وذلك في الحالات التالية :**

- $A=\sqrt{2}$.
- $A=1$.
- $A=2$.

في الحقيقة، لنلاحظ أنّ

$$x+\sqrt{2x-1}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2x-1}\right)^2$$
$$x-\sqrt{2x-1}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2x-1}\right)^2$$

وعليه تكون جميع الجذور التربيعيّة في المعادلة المعطاة جذوراً تربيعيّة لأعداد موجبة إذا وفقط إذا تحقّقت المتراجحة $x\geq\frac{1}{2}$. وعندئذ يكون لدينا

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\frac{\sqrt{\left(1+\sqrt{2x-1}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2x-1}\right)^2}}{\sqrt{2}}$$

أو

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\frac{1+\sqrt{2x-1}+\left|1-\sqrt{2x-1}\right|}{\sqrt{2}}$$

ومن ثَمّ

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}\max\left(1,\sqrt{2x-1}\right)$$

ولكنّ التابع $x\mapsto\sqrt{2x-1}$ متزايدٌ تماماً على المجال $[\frac{1}{2},+\infty[$ ويأخذ القيمة 1 عند 1.

نستنتج مما سبق أنّ

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\begin{cases}\sqrt{2} & : \quad x\in[\frac{1}{2},1]\\ \sqrt{4x-2} & : \quad x\in\,]1,+\infty[\end{cases}$$

- إذن في حالة $A=\sqrt{2}$ ، تتألّف مجموعة حلول المعادلة من المجال $[\frac{1}{2},1]$.
- وفي حالة $A=1$ ، تكون مجموعة الحلول مجموعة خالية.
- وأخيراً في حالة $A=2$ تكون مجموعة الحلول هي $\{3/2\}$.

③ **لتكن a و b و c أعداداً حقيقيّة. نتأمّل المعادلة :** $a\cos^2 x+b\cos x+c=0 \quad (\mathcal{E})$ **بالمجهول** $\cos x$. **أوجد معادلة** $(\tilde{\mathcal{E}})$ **من الدرجة الثانية بالمجهول** $\cos 2x$ **تكون جميع قيم** x **التي تحلّ المعادلة** $(\mathcal{E})$ **حلولاً لها. ثُمّ قارن هاتين المعادلتين في حالة** $a=4$ **و** $b=2$ **و** $c=-1$.

في الحقيقة، نستفيد من $1+\cos 2x=2\cos^2 x$. فنستنتج من $(\mathcal{E})$ أنّ

$$a\cos 2x+a+2c=-2b\cos x$$

وبالتربيع والإصلاح نجد

$$a^2\cos^2 2x+(a+2c)^2+2a(a+2c)\cos 2x=2b^2(\cos 2x+1)$$

أو

$$(\tilde{\mathcal{E}})\quad a^2\cos^2 2x+2\left(a^2+2ca-b^2\right)\cos 2x+(a+2c)^2-2b^2=0$$

وفي حالة $a=4$ و $b=2$ و $c=-1$ ، تُصبح هذه المعادلة بعد الاختصار على 4 بالشكل

$$4\cos^2 2x+2\cos 2x-1=0$$

وهي المعادلة $(\mathcal{E})$ نفسها.

ملاحظة : تُكافئ المعادلة $(\mathcal{E})$ في حالة $a=4$ و $b=2$ و $c=-1$ ما يلي :

$$2\cos 2x+2\cos x+1=0$$

وهذه تُكافئ $e^{-2ix}+e^{-ix}+1+e^{ix}+e^{2ix}=0$ ، أو

$$1+e^{ix}+e^{2ix}+e^{3ix}+e^{4ix}=0$$

وأخيراً لأنّ $e^{ix}\neq 1$ ، فإنّ المعادلة السابقة تُكافئ $e^{5ix}=1$ و $e^{ix}\neq 1$. ومن ثَمّ

$$x=\frac{2\pi k}{5} \text{ حيث } k \text{ عنصرٌ من } \mathbb{Z}\backslash 5\mathbb{Z}$$

④ **نُعطى الطول** $b = AC$، **أنشئ مثلّثاً** ABC **يكون فيه** $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$، **ويُحقّق المتوسّط** $[BM]$ **المساواة** $BM^2 = AB \cdot BC$.

التحليل : لنفترض أنّ ABC مثلّثٌ يُحقّق الخواصّ المشار إليها، عندئذ نرى مباشرة ما يلي :

- النقطة B تقع على الدائرة $\mathfrak{C}$ التي قطرها AC.
- طول المتوسّط $[BM]$ يساوي نصف قطر الدائرة $\mathfrak{C}$ أي $\frac{b}{2}$.
- ضعفا مساحة المثلّث ABC يساوي من جهة أولى جداء ضرب الضلعين القائمين، أي $\frac{b^2}{4}$ وذلك عملاً بالفرْض، وهو يساوي أيضاً جداء ضرب طول الضلع $[AC]$ أي b بطول الارتفاع النازل من B وليكن h. وعليه نرى أنّ

$$bh = \frac{b^2}{4}$$

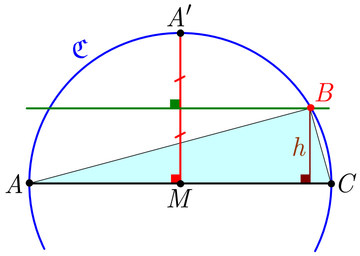
أو $h = \frac{1}{4}b$.

- نستنتج إذن أنّ B تبعد عن المستقيم (AC) مسافة تساوي $\frac{1}{4}b$. أو أنّ B تقع على أحد المستقيمين الموازيين للمستقيم (AC) ويبعد كلٌّ منهما عن هذا الأخير مسافة $\frac{1}{4}b$.

الإنشاء :

1. ارسم الدائرة $\mathfrak{C}$ التي قطرها قطعة مستقيمة $[AC]$ طولها b. وليكن M مركزها.
2. أنشئ نصف القطر $[MA']$ في الدائرة $\mathfrak{C}$ العمودي على $[AC]$.
3. اختر B نقطة من نقطتي تقاطع محور القطعة $[MA']$ مع الدائرة $\mathfrak{C}$.

فنحصل بذلك على المثلّث ABC المطلوب.



⑤ **النقطة M نقطةٌ ما من القطعة المستقيمة $[AB]$. ننشئ المربّعين $AMCD$ و $MBEF$ من جهة واحدة بالنسبة إلى المستقيم (AB). تتقاطع الدائرتان $\mathfrak{C}$ و $\mathfrak{C}'$ المرسومتان على هذين المربّعين بالترتيب، عند النقطتين M و N.**

1. **أثبت أنّ المستقيمين (AF) و (BC) يتقاطعان في N.**
2. **أثبت أنّ المستقيمات (MN) تمرّ بنقطة ثابتة S عندما تتحوّل النقطة M على $[AB]$.**
3. **نفترض أنّ P و Q هما مركزا الدائرتين $\mathfrak{C}$ و $\mathfrak{C}'$ بالترتيب. عيّن المحلّ الهندسي لمنتصفات القطع المستقيمة $[PQ]$ عندما تتحوّل النقطة M على $[AB]$.**

1. إنّ $[AC]$ هو قطرٌ في الدائرة $\mathfrak{C}$، وعليه نرى أنّ $\widehat{ANC}=\frac{\pi}{2}$، وهذا يبرهن على أنّ

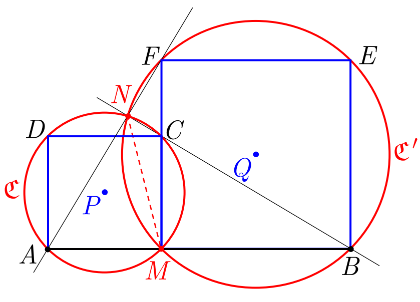
$$(AN)\perp(NC) \qquad (1)$$

– ومن جهة أخرى، بملاحظة الدائرة $\mathfrak{C}$ نجد $\widehat{ANM}=\frac{1}{2}\widehat{APM}=\frac{\pi}{4}$، وكذلك بملاحظة الدائرة $\mathfrak{C}'$ نجد $\widehat{MNB}=\frac{1}{2}\widehat{MQB}=\frac{\pi}{4}$. وعليه فإنّ

$$\widehat{ANB}=\widehat{ANM}+\widehat{MNB}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

وهذا يبرهن على أنّ

$$(AN)\perp(NB) \qquad (2)$$



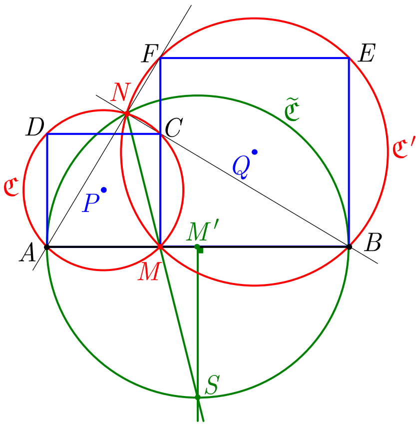
ومن (1) و (2) نستنتج أنّ النقطة N هي المسقط القائم لكلٍّ من النقطتين B و C على المستقيم (AN) فالنقاط B و C و N تقع على استقامة واحدة و (BC) عمودي على (AN).

– وكذلك، نرى أنّ الزاوية $\widehat{BNF}$ تقابل القطر $[FB]$ في الدائرة $\mathfrak{C}'$ فهي إذن تساوي $\frac{\pi}{2}$، وهذا يبرهن على أنّ

$$(FN)\perp(NB) \qquad (3)$$

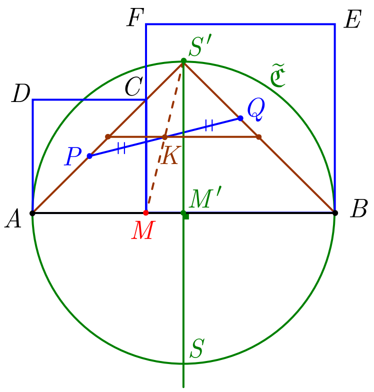
ومن (2) و (3) نستنتج أنّ النقطة N هي المسقط القائم لكلٍّ من النقطتين F و A على المستقيم $(NB)=(BC)$ فالنقاط F و A و N تقع على استقامة واحدة والمستقيم (BC) عمودي على (AF). والمستقيمان المتعامدان (BC) و (AF) يتقاطعان في N.

2. لقد رأينا أنّ $\widehat{ANB}=\frac{\pi}{2}$، وهذا يُثبتُ أنّ النقطة N تتحوّل على نصف الدائرة $\mathfrak{C}$ التي قطرها القطعة المستقيمة $[AB]$، وليكن M' مركزها.



المستقيم (MN) يقطع الدائرة $\tilde{\mathfrak{C}}$ في نقطة ثانية غير N ولتكن S. ولكنّ الزاوية المركزيّة $\widehat{AM'S}$ تساوي ضعفي قيمة الزاوية المحيطيّة $\widehat{ANS}=\widehat{ANM}=\frac{\pi}{4}$. وعليه لا بُدّ أن يكون $\widehat{AM'S}=\frac{\pi}{2}$.

وهذا يبرهن أنّ نقطة تقاطع المستقيم (MN) مع الدائرة $\tilde{\mathfrak{C}}$ المختلفة عن النقطة N هي نقطة ثابتة S لاتتعلّق بموقع M على القطعة المستقيمة $[AB]$.



3. لتكن S' نقطة تقاطع المستقيمين (BQ) و (AP). لمّا كان

$$\widehat{ABS'}=\widehat{MBQ}=\frac{\pi}{4}$$

و

$$\widehat{BAS'}=\widehat{MAP}=\frac{\pi}{4}$$

استنتجنا أنّ $\widehat{AS'B}=\frac{\pi}{2}$، فالنقطة S' هي النقطة المُقابلة قطريّاً للنقطة S في الدائرة $\tilde{\mathfrak{C}}$.

ولّما كان $(MQ)\perp(BQ)$ وكذلك $(MP)\perp(AP)$ استنتجنا أنّ

$$\widehat{MQS'}=\widehat{MPS'}=\frac{\pi}{2}$$

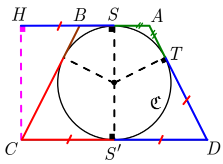
وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ الرباعي $MQS'P$ مستطيل، وعليه فإنّ K منتصف $[PQ]$ هو نفسه منتصف $[MS']$. أي إنّ K هي صورة M وفق التحاكي $\mathcal{H}_{S',\frac{1}{2}}$ الذي مركزه S' ونسبته $\frac{1}{2}$، وعندما تتحوّل M على $[AB]$ تتحوّل K على صورة هذه القطعة المستقيمة وفق $\mathcal{H}_{S',\frac{1}{2}}$ أي على القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي القطعتين $[S'A]$ و $[S'B]$. ■

⑥ **نتأمّل مستويين غير متوازيين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$. النقطة A تنتمي إلى $\mathcal{P}$ ولا تنتمي إلى $\mathcal{Q}$، والنقطة C تنتمي إلى $\mathcal{Q}$ ولا تنتمي إلى $\mathcal{P}$. أنشئ النقطتين B في $\mathcal{P}$ و D في $\mathcal{Q}$ اللتين تجعلان الرباعي $ABCD$ يُحقّق الشروط التالية :**

1. **الرباعي $ABCD$ يقع في مستوٍ واحدٍ.**
2. **المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان.**
3. $AD = BC$.
4. **يمكن رسم دائرة تمس أضلاع الرباعي $ABCD$ داخلاً.**

التحليل : لنفترض أنّ الإنشاء المطلوب مُنجزٌ. ولنعرّف d الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، كما لنعرّف $\mathcal{R}$ مستوي الرباعي $ABCD$. ولنلاحظ ما يلي :

- المستقيم $d_A = (AB)$ هو الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{R}$ و $\mathcal{P}$.
- المستقيم $d_C = (CD)$ هو الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{R}$ و $\mathcal{Q}$.
- ولمّا كان $d_A \parallel d_C$ استنتجنا أنّ $d \parallel d_A$ و $d \parallel d_C$.
- في المستوي $\mathcal{R}$ الرباعي $ABCD$ هو إذن شبه منحرف متساوي الساقين، يمكن رسم دائرة $\mathfrak{C}$ تمسّ أضلاعه داخلاً.



لنعرّف إذن النقطة H بأنّها المسقط القائم للنقطة C على المستقيم d_A، ولنرمز بالرموز S و S' و T إلى نقاط تماس الدائرة $\mathfrak{C}$ مع الأضلاع $[AB]$ و $[CD]$ و $[DA]$ بالترتيب.

- إنّ المستقيم (SS') محور تناظر لشبه المنحرف $ABCD$، ومن ثَمّ
$$HS = CS' = S'D$$
ولأنّ الدائرة $\mathfrak{C}$ تمس أضلاع شبه المنحرف $ABCD$ استنتجنا أنّ $S'D = DT$ وكذلك أنّ $SA = TA$. وعليه نرى ما يلي :
$$HA = HS + SA = DT + TA = DA$$
إذن $HA = DA = BC$. إذن تقع D على الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها AH، وتقع B على الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها AH.

- وأخيراً لمّا كان $BC \le CH$ استنتجنا أنّه في حال وجود حلٍّ لدينا $AH \le CH$.

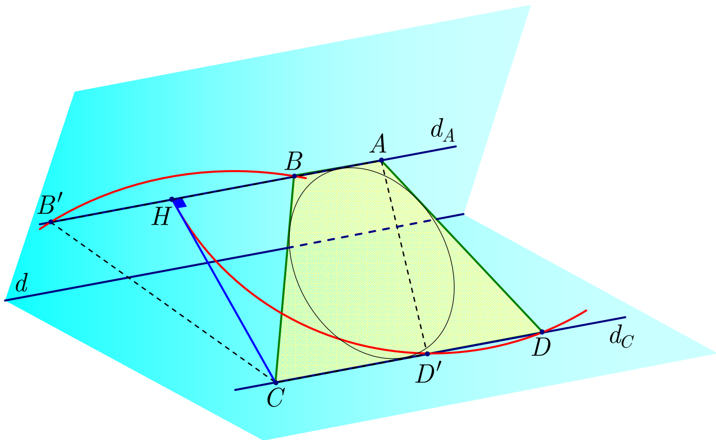
الإنشاء :

❶ أنشئ المستقيم d_A المار بالنقطة A موازياً الفصل المشترك d للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.

❷ أنشئ كذلك المستقيم d_C المار بالنقطة C موازياً الفصل المشترك d.

❸ في المستوي $\mathcal{R}$ المعيَّن بالمستقيمين المتوازيين d_A و d_C، عيّن النقطة H المسقط القائم للنقطة C على المستقيم d_A.

❹ في حالة $AH > CH$ يكون الإنشاء مستحيلاً. أمّا في حالة $AH \leq CH$ ، فنعيّن D في المستوي $\mathcal{R}$ من كونها نقطة تقاطع المستقيم d_C مع الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها AH. وكذلك نعيّن B في المستوي $\mathcal{R}$ من كونها نقطة تقاطع المستقيم d_A مع الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها AH أيضاً. ونرى أنّه، بوجه عامٍّ، هناك حلاّن للمسألة المطروحة.



ففي الشكل أعلاه كلٌّ من $ABCD$ و $AB'CD'$ هو حلٌّ للمسألة المطروحة. ■

أولمبياد الرياضيّات الثاني

① **أوجد جميع الأعداد n التي تُكتب بثلاث خانات عشريّة، وتقبل القسمة على العدد 11 وخارج قسمتها على العدد 11 يساوي مجموع مربّعات خاناتها الثلاث.**

أحد الطرائق الممكنة هي تجريب جميع مضاعفات العدد 11 المحصورة بين 110 و 990 وعددها 81 عدداً. ولكن ليست هذه الطريقة أنيقة.

- لنفترض أنّ آحاد العدد n هي a وعشراته هي b ومئاته هي c حيث $c \geq 1$. عندئذ يكون لدينا من جهة أولى

$$n = a + 10b + 100c \tag{1}$$

- ولأنّ n يقبل القسمة على العدد 11 استنتجنا أنّ العدد $a + c - b$ من مضاعفات العدد 11، ولكنّ هذا الأخير ينتمي إلى المجموعة $\{-8,-7,\ldots,0,1,\ldots,18\}$، إذن

$$a + c - b \in \{0,11\}$$

- أمّا الفرْض الثاني فيُكتب بالشكل

$$n = 11\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \tag{2}$$

- لنناقش إذن حالتين :

❶ حالة $a + c - b = 0$. في هذه الحالة تُكتب (2) بالشكل

$$11\left(a^2 + (a+c)^2 + c^2\right) = a + 10(a+c) + 100c$$

وهذا يُكافئ

$$2a^2 + (2c-1)a = 2c(5-c)$$

فالعدد a عددٌ زوجيٌّ، أي $a = 2a'$، ومنه

$$4a'^2 + (2c-1)a' = c(5-c)$$

فإذا افترضنا أنّ $a' \geq 1$ نتج من ذلك أنّ

$$c(5-c) \geq 4 + (2c-1) = 2c + 3$$

ونصل من ثَمّ إلى التناقض التالي :

$$\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = c^2 - 3c + 3 \leq 0$$

هذا يُثبتُ أنّ $a' = 0$، ومن ثَمّ $c = 5$ و $a = 0$ و $b = 5$ أي $n = 550$.

❷ حالة $a+c-b=11$. في هذه الحالة يُكتب الشرط (2) بالشكل

$$11\big((b-c+11)^2+b^2+c^2\big)=b-c+11+10b+100c$$

وهذا يُكافئ

$$(b-c+11)^2+b^2+c^2=1+b+9c$$

أو

$$2b^2+(21-2c)b+2c^2-31c+120=0$$

وأخيراً

$$2b^2+(21-2c)b+(2c-15)(c-8)=0$$

فإذا افترضنا أنّ $b\geq 1$ نتج من كون $21-2c>0$ أنّ

$$(2c-15)(c-8)<0$$

وهذا يقود إلى التناقض $7.5<c<8$ لأنّ c عددٌ طبيعي. إذن يجب أن يكون $b=0$، وهذا يقتضي أنّ $c=8$، وأخيراً أنّ $a=3$ أي $n=803$.

وبالعكس نتيقن بالحساب المباشر أنّ العددين 550 و 803 هما حلاّن للمسألة المطروحة.

② عيِّن مجموعة الأعداد الحقيقيّة x التي تُحقّق المتراجحة

$$\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{2x+1}\right)^2}<2x+9$$

لنلاحظ أنّ الكسر في الطرف الأيمن من المتراجحة السابقة معرّفٌ إذا وفقط إذا انتمت x إلى المجموعة $\mathbb{D}=[-\frac{1}{2},0[\cup]0,+\infty[$. وفي حالة x من $\mathbb{D}$ لدينا

$$\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)=2x$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{D},\quad \frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{2x+1}\right)^2}&=\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2\\&=2x+2+2\sqrt{2x+1}\end{aligned}$$

وهنا نلاحظ أنّه يمكن تمديد الكسر في الطرف الأيسر من المتراجحة بالاستمرار عند 0 وذلك بإعطائه القيمة 4 عند تلك النقطة.

وعليه، في حالة x من $]-\frac{1}{2},+\infty[$، تُكافئ المتراجحةُ المعطاةُ المتراجحةَ

$$2x+2+2\sqrt{2x+1}<2x+9$$

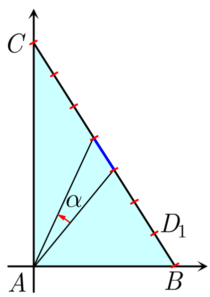
أو

$$\sqrt{2x+1}<\frac{7}{2}$$

وأخيراً $x<\frac{45}{8}$. فمجموعة حلول المتراجحة المعطاة هي $]-\frac{1}{2},\frac{45}{8}[$، وذلك شرط تمديد طرفها الأيمن بالاستمرار عند 0، أو يُحذف العدد 0 من هذه المجموعة.

③ نتأمّل مثلّثاً ABC قائم الزاوية في A، طول وتره $[BC]$ يساوي a. يُقسّم الوتر إلى n قطعة مستقيمة متساوية الطول، و n عددٌ فردي. تُرى القطعة الواقعة في المنتصف تحت زاوية قدرها α من الرأس A، وإذا علمتَ أنّ طول الارتفاع النازل من A يساوي h، فأثبت أنّ

$$\tan\alpha=\frac{4hn}{a\left(n^2-1\right)}$$



لعلّ أبسط طريقة، هي الطريقة التحليليّة. لننسب المثلّث إلى جملة متعامدة نظاميّة مبدؤها A، وفيها إحداثيّات النقطة B هي $(\beta,0)$ وإحداثيّات النقطة C هي $(0,\gamma)$. عندئذ تكون نقاط تقسيم الوتر هي النقاط $(D_k)_{0\le k\le n}$ المعرّفة كما يلي :

$$\overrightarrow{BD_k}=\frac{k}{n}\overrightarrow{BC}$$

أمّا القطعة الموجودة في المنتصف فهي $\left[D_{\frac{n-1}{2}},D_{\frac{n+1}{2}}\right]$. إذن

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD_{\frac{n-1}{2}}}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_{\frac{n-1}{2}}}=(\beta,0)+\frac{n-1}{2n}(-\beta,\gamma)\\&=\left(\frac{n+1}{2n}\beta,\frac{n-1}{2n}\gamma\right)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD_{\frac{n+1}{2}}}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_{\frac{n+1}{2}}}=(\beta,0)+\frac{n+1}{2n}(-\beta,\gamma)\\&=\left(\frac{n-1}{2n}\beta,\frac{n+1}{2n}\gamma\right)\end{aligned}$$

لنعرّف إذن الطولين

$$L' = \left\|\overrightarrow{AD_{\frac{n+1}{2}}}\right\| \quad \text{و} \quad L = \left\|\overrightarrow{AD_{\frac{n-1}{2}}}\right\|$$

عندئذ

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\overrightarrow{AD_{\frac{n-1}{2}}}\cdot\overrightarrow{AD_{\frac{n+1}{2}}}}{LL'} = (n^2-1)\frac{\beta^2+\gamma^2}{4n^2LL'}\\ &= (n^2-1)\frac{a^2}{4n^2LL'}\end{aligned}$$

و

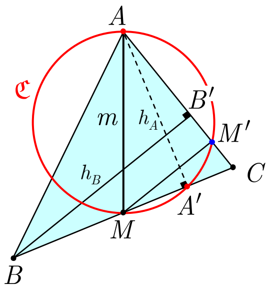
$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AD_{\frac{n-1}{2}}},\overrightarrow{AD_{\frac{n+1}{2}}}\right)\right|}{LL'} = \left((n+1)^2-(n-1)^2\right)\frac{\beta\gamma}{4n^2LL'}\\ &= 4n\frac{\beta\gamma}{4n^2LL'} = 4n\frac{ah}{4n^2LL'}\end{aligned}$$

وعليه فإنّ

$$\tan\alpha = \frac{4n}{n^2-1}\times\frac{h}{a}$$

④ **أنشئ مثلّثاً** ABC **بمعرفة طولَي الارتفاعين** h_A **و** h_B **النازلين من الرأسين** A **و** B**، وطول المتوسّط** m **المرسوم من الرأس** A.

التحليل : لنفترض أنّ هناك مثلّثاً يُحقّق الخواص المطلوبة ولتكن A' و B' المسقطين القائمين للنقطتين A و B على المستقيمين (BC) و (AC) بالترتيب. وأخيراً لتكن M منتصف الضلع $[BC]$. استناداً إلى الفرْض لدينا $h_A = AA'$ و $h_B = BB'$، و $m = AM$.
لنتأمّل الدائرة $\mathfrak{C}$ التي قطرها $[AM]$.



- لمّا كانت $\widehat{AA'M} = \frac{\pi}{2}$ استنتجنا أنّ $A' \in \mathfrak{C}$ إذن A' هي نقطة تقاطع للدائرتين $\mathfrak{C}$ والدائرة $C(A, h_A)$ التي مركزها A ونصف قطرها h_A، ونجد $h_A \le m$.
- لنتأمّل أيضاً، النقطة M'، النقطة المختلفة عن A التي تتقاطع عندها الدائرة $\mathfrak{C}$ مع المستقيم (AC). لمّا كانت $\widehat{MM'A} = \frac{\pi}{2}$ استنتجنا أنّ $(MM') \parallel (BB')$.

▫ ينتج من ذلك أنّ المثلّثين $CM'M$ و $CB'B$ متشابهان، ولأنّ M منتصف $[BC]$ اقتضى هذا أنّ

$$MM' = \frac{1}{2}BB' = \frac{h_B}{2}$$

إذن M' هي نقطة تقاطعٍ للدائرتين $\mathfrak{C}$ و $\mathcal{C}(M, \frac{1}{2}h_B)$ التي مركزها M، ونصف قطرها $\frac{1}{2}h_B$، ومنه الشرط اللازم الثاني $h_B < 2m$.

الإنشاء :

نفترض تحقُّق الشرطين $h_A \le m$ و $h_B < 2m$.

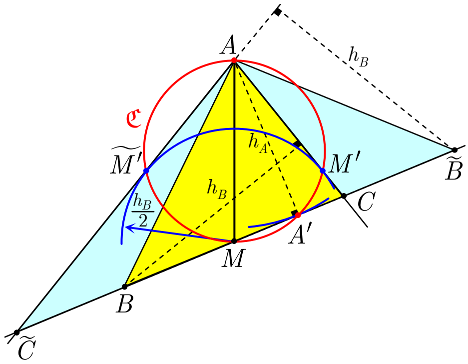
❶ ننشئ الدائرة $\mathfrak{C}$ التي قطرها القطعة المستقيمة $[AM]$ التي طولها m.

❷ ننشئ A' نقطة تقاطعٍ للدائرة $\mathfrak{C}$ مع الدائرة $\mathcal{C}(A, h_A)$.

❸ ننشئ M' (على الترتيب $\widetilde{M}'$) نقطة تقاطع الدائرة $\mathfrak{C}$ مع الدائرة $\mathcal{C}(M, \frac{1}{2}h_B)$.

❹ نعيِّن C نقطة تقاطع المستقيمين (MA') و (AM')، ويمكن أن نعيِّن $\widetilde{C}$ نقطة تقاطع المستقيمين (MA') و $(A\widetilde{M}')$.

❺ نعيِّن B نظيرة C بالنسبة إلى M، ويمكن أن نعيِّن $\widetilde{B}$ نظيرة $\widetilde{C}$ بالنسبة إلى M.



ونحصل بوجه عامٍّ على حلّين ABC و $A\widetilde{B}\widetilde{C}$ للمسألة المطروحة. ■

⑤ **نتأمّل مكعّباً $ABCDA'B'C'D'$، مع A فوق A' و B فوق B' وهكذا...، ونتأمّل نقطة ما X من القطعة المستقيمة $[AC]$، ونقطة ما Y من $[B'D']$.**

1. **أوجد المحلّ الهندسي لمنتصف القطعة $[XY]$.**
2. **أوجد المحلّ الهندسي للنقاط Z مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(X;2)$ و $(Y;1)$.**

سنبحث عن حلٍّ تحليلي لهذه المسألة، فنتأمّل جملة متعامدة نظاميّة فيها

$$A(0,0,0),\quad B(1,0,0),\quad C(1,1,0),\quad D(0,1,0)$$

$$A'(0,0,1),\quad B'(1,0,1),\quad C'(1,1,1),\quad D'(0,1,1)$$

فتكون $X(x,x,0)$ مع $0\le x\le 1$، وتكون $Y(y,1-y,1)$ مع $0\le y\le 1$.

1. وعلى هذا يكون المحلّ الهندسي لمنتصف القطعة $[XY]$ هو مجموعة النقاط

$$\mathcal{L}=\left\{\left(\frac{x+y}{2},\frac{x+1-y}{2},\frac{1}{2}\right):(x,y)\in[0,1]^2\right\}$$

علينا إذن تعيين صورة التابع

$$\Phi:[0,1]^2\to\mathbb{R}^2,\Phi(x,y)=\left(\underbrace{\frac{x+y}{2}}_{u},\underbrace{\frac{x+1-y}{2}}_{v}\right)$$

نستنتج من المساواتين $u=\frac{x+y}{2}$ و $v=\frac{x+1-y}{2}$ أنّ

$$u+v-\tfrac{1}{2}=x$$

$$u-v+\tfrac{1}{2}=y$$

وعليه $(u,v)\in\operatorname{Im}\Phi$ إذا وفقط إذا تحقّقت المتراجحتان

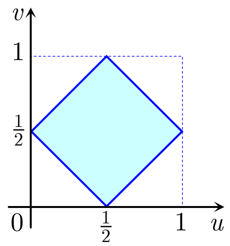
$$0\le u+v-\tfrac{1}{2}\le 1 \quad \text{و} \quad 0\le u-v+\tfrac{1}{2}\le 1$$

أو

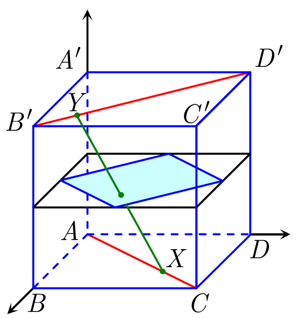
$$\tfrac{1}{2}\le u+v\le\tfrac{3}{2}$$

و

$$-\tfrac{1}{2}\le u-v\le\tfrac{1}{2}$$



إذن $\operatorname{Im}\Phi$ هي المربّع الذي رؤوسه النقاط $(\tfrac{1}{2},0)$ و $(1,\tfrac{1}{2})$ و $(\tfrac{1}{2},1)$ و $(0,\tfrac{1}{2})$ كما يبيّن الشكل المجاور.



وعلى هذا فإنّ المحلّ الهندسي $\mathcal{L}$ المطلوب هو المربّع الذي رؤوسه مراكز الوجوه الجانبيّة $AA'B'B$ و $BB'C'C$ و $CC'D'D$ و $DD'A'A$. كما هو مبيَّن في الشكل المجاور.

2. ومن جهة أخرى، المحل الهندسي للنقاط Z هو مجموعة النقاط

$$\mathcal{L}' = \left\{\left(\frac{2x+y}{3}, \frac{2x+1-y}{3}, \frac{1}{3}\right) : (x,y) \in [0,1]^2\right\}$$

علينا إذن تعيين صورة التابع

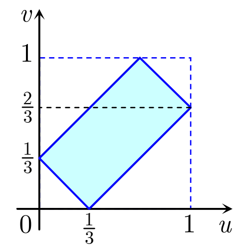
$$\Psi : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2, \Psi(x,y) = \left(\underbrace{\frac{2x+y}{3}}_{u}, \underbrace{\frac{2x+1-y}{3}}_{v}\right)$$

نستنتج من المساواتين $u = \frac{2x+y}{3}$ و $v = \frac{2x+1-y}{3}$ أنّ

$$u - v + \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}y \quad \text{و} \quad u + v - \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3}x$$

وعليه $(u,v) \in \operatorname{Im}\Psi$ إذا وفقط إذا تحقّقت المتراجحتان

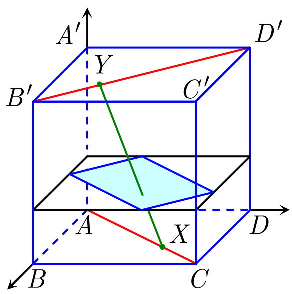
$$0 \le u - v + \tfrac{1}{3} \le \tfrac{2}{3} \quad \text{و} \quad 0 \le u + v - \tfrac{1}{3} \le \tfrac{4}{3}$$



أو

$$-\tfrac{1}{3} \le u - v \le \tfrac{1}{3} \quad \text{و} \quad \tfrac{1}{3} \le u + v \le \tfrac{5}{3}$$

إذن $\operatorname{Im}\Phi$ هي المستطيل الذي رؤوسه النقاط $\left(\frac{1}{3},0\right)$ و $\left(1,\frac{2}{3}\right)$ و $\left(\frac{2}{3},1\right)$ و $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ كما يبيّن الشكل المجاور.



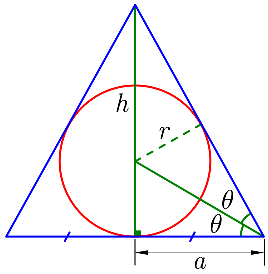
وعلى هذا فإنّ المحلّ الهندسيّ $\mathcal{L}'$ المطلوب هو المستطيل الذي رؤوسه النقاط :

$$\left(\tfrac{1}{3},0,\tfrac{1}{3}\right) \text{ و } \left(1,\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}\right) \text{ و } \left(\tfrac{2}{3},1,\tfrac{1}{3}\right) \text{ و } \left(0,\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}\right)$$

كما هو مبيَّن في الشكل المجاور.

وبذا يتم الإثبات.

⑥ نتأمّل مخروطاً دورانيّاً Q فيه كرة S تمسّ سطحه الجانبي وقاعدته. ونتأمّل أسطوانة C تحوي الكرة S نفسها، وتمسّ هذه الكرة قاعدتي الأسطوانة وسطحها الجانبي. ليكن V_1 حجم المخروط Q وليكن V_2 حجم الأسطوانة C. أثبت أنّ $V_1 \neq V_2$. وعيِّن أصغر قيمة تأخذها النسبة V_1/V_2، وأنشئ نصف زاوية رأس المخروط في هذه الحالة.



لنفترض أنّ a هو نصف قطر قاعدة المخروط Q، وأنّ r هو نصف قطر الكرة S. وليكن h ارتفاع المخروط. عندئذ $\frac{h}{a} = \tan 2\theta$ مع $\frac{r}{a} = \tan\theta$، ولأنّه لدينا $2\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ استنتجنا أنّ $0 < r < a$.

وعليه

$$h = a\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2a^2 r}{a^2 - r^2}$$

إذن يُعطى حجم المخروط Q بالصيغة التالية :

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi a^2 h = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{a^4 r}{a^2 - r^2}$$

أمّا الأسطوانة C فنصف قطر قاعدتها r، وارتفاعها $2r$، ويُعطى حجم الأسطوانة C بالصيغة:

$$V_2 = 2\pi r^3$$

فمن جهة أولى تُكافئ المساواةُ $V_1 = V_2$ المساواةَ $r^4 - r^2a^2 + \frac{1}{3}a^4 = 0$ وهي بدورها تُكافئ المساواة المستحيلة $\left(r^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 + \frac{a^4}{12} = 0$. إذن $V_1 \neq V_2$.

ومن جهة أخرى،

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^4}{\left(a^2 - r^2\right)r^2} = \frac{1}{3f\left(\frac{r^2}{a^2}\right)}$$

مع $f(x) = x(1-x)$. ونعلم أنّ الحدّ الأعلى للتابع f على المجال $]0,1[$ يساوي $\frac{1}{4}$ وهو يوافق $x = \frac{1}{2}$. إذن أصغر قيمة للنسبة $\frac{V_1}{V_2}$ هي $\frac{4}{3}$، وهي توافق $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$. أو

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومن ثَمّ

$$\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

إذن نصف زاوية رأس المخروط تساوي $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$. ■

أولمبياد الرياضيّات الثالث

① حلّ جملة المعادلات التالية :

$$x+y+z=a \quad \text{و} \quad x^2+y^2+z^2=b^2 \quad \text{و} \quad xy=z^2$$

بالنسبة إلى المجاهيل x و y و z. وعيِّن الشروط على (a,b) حتّى تكون الحلول أعداداً متباينة موجبة تماماً.

▪ لنتأمّل حالة $a=0$، وليكن (x,y,z) حلاً للجملة المعطاة. عندئذ نستنتج من المعادلة $x+y=-z$ أنّ $x^2+y^2+2xy-z^2=0$، و بالاستفادة من $xy=z^2$ نجد $x^2+y^2+z^2=0$، فلا بُدّ أن يكون $b=0$. وعندئذ أيّاً كانت z كان x و y هما حلاّ المعادلة $T^2+zT+z^2=0$ بالنسبة إلى المجهول T، ومنه مجموعة الحلول

$$\{(\mathrm{j}z,\mathrm{j}^2z,z),z\in\mathbb{C}\}\cup\{(\mathrm{j}^2z,\mathrm{j}z,z),z\in\mathbb{C}\}$$

مع $\mathrm{j}=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. ولا يمكن في هذه الحالة أن تكون الحلول أعداداً متباينة موجبة تماماً.

▪ حالة $a\neq 0$. ليكن (x,y,z) حلاً للجملة المعطاة. بتربيع المعادلة الأولى نجد

$$\begin{aligned} a^2 &= \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{b^2}+2(\underbrace{xy}_{z^2}+yz+zx)\\ &= b^2+2z(\underbrace{z+y+x}_{a})=b^2+2az \end{aligned}$$

ومنه نستنتج أنّ $z=\dfrac{a^2-b^2}{2a}$. إذن

$$x+y=a-z=\frac{a^2+b^2}{2a} \quad \text{و} \quad xy=\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2$$

وعليه فإنّ x و y هما حلاّ المعادلة

$$T^2-\frac{a^2+b^2}{2a}T+\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2=0 \qquad (*)$$

بالنسبة إلى المجهول T، وهذه المعادلة تُكافئ

$$\left(T-\frac{a^2+b^2}{4a}\right)^2=\left(\frac{a^2+b^2}{4a}\right)^2-\left(\frac{2a^2-2b^2}{4a}\right)^2=\frac{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}{16a^2}$$

وهكذا نجد حلول الجملة المعطاة في $\mathbb{C}$.

▪ لنفترض الآن أنّ الحلول (x,y,z) أعدادٌ موجبة تماماً ومتباينة، عندئذ يجب أن يكون $a\in\mathbb{R}_+^*$ لأنّ $x+y+z=a$، ويجب أن يكون $b\in\mathbb{R}^*$. ونستنتج من المساواة $z=\dfrac{a^2-b^2}{2a}$ أنّ $\lvert b\rvert<a$. وحتّى يكون x و y موجبين تماماً ومختلفين يكفي أن يكون جذرا المعادلة $(*)$ حقيقيّان ومختلفان، وهذا يُكافئ

$$\left(3a^2-b^2\right)\left(3b^2-a^2\right)>0$$

ولأنّ $\lvert b\rvert<a$ استنتجنا أنّ $3a^2-b^2>0$ ومن ثَمّ $3b^2>a^2$ أو $\sqrt{3}\lvert b\rvert>a$.

لقد أثبتنا إذن أنّ الشرط $\lvert b\rvert<a<\sqrt{3}\lvert b\rvert$ شرطٌ لازمٌ لتكون حلول الجملة المدروسة أعداداً حقيقيّة موجبة ومتباينة.

وبالعكس، في حالة عددين حقيقيّين a و b يُحقّقان $\lvert b\rvert<a<\sqrt{3}\lvert b\rvert$ تكون حلول الجملة المعطاة أعداداً حقيقيّة موجبة تماماً ومتباينة، وهي

$$x=\frac{a^2+b^2+\sqrt{\left(3a^2-b^2\right)\left(3b^2-a^2\right)}}{4a}$$
$$y=\frac{a^2+b^2-\sqrt{\left(3a^2-b^2\right)\left(3b^2-a^2\right)}}{4a}$$
$$z=\frac{a^2-b^2}{2a}$$

أو

$$x=\frac{a^2+b^2-\sqrt{\left(3a^2-b^2\right)\left(3b^2-a^2\right)}}{4a}$$
$$y=\frac{a^2+b^2+\sqrt{\left(3a^2-b^2\right)\left(3b^2-a^2\right)}}{4a}$$
$$z=\frac{a^2-b^2}{2a}$$

فالشرط المطلوب هو أن يكون a و b عددين حقيقيّين يُحقّقان $\lvert b\rvert<a<\sqrt{3}\lvert b\rvert$. ◼

② **الأعداد a و b و c هي أطوال أضلاع مثلّث مساحته $\mathcal{A}$ أثبت صحّة المتراجحة**

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}\mathcal{A}$$

وبيِّن متى تتحقّق المساواة فيها.

طريقة أولى : يمكن الانطلاق من علاقة Heron التي تُعطي مساحة المثلّث بدلالة أطوال أضلاعه

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad ☞ \qquad p = \frac{a+b+c}{2}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(c+b-a)(a+c-b)(a+b-c)}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\left((a+b)^2-c^2\right)\left(c^2-(b-a)^2\right)}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-a^4-b^4-c^4}\end{aligned}$$

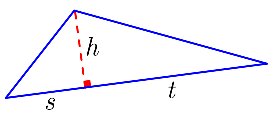
وعلى هذا إذا عرّفنا

$$\Delta = \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 - \left(4\sqrt{3}\mathcal{A}\right)^2$$

كان لدينا

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 - 3\left(2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-a^4-b^4-c^4\right)\\ &= 4\left(a^4+b^4+c^4-\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\right)\\ &= 2\left(\left(a^4+b^4-2a^2b^2\right)+\left(b^4+c^4-2b^2c^2\right)+\left(c^4+a^4-2a^2c^2\right)\right)\\ &= 2\left(\left(a^2-b^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2+\left(a^2-a^2\right)^2\right)\end{aligned}$$

إذن $\Delta \geq 0$ مع مساواة إذا وفقط إذا كان $a = b = c$.



طريقة ثانية : لنرمز بالرمز h إلى طول الارتفاع النازل من أحد رؤوس المثلّث، نختار الرأس الموافق للزاوية المنفرجة في حال كون المثلّث منفرج الزاوية. يقسم موقع هذا الارتفاع الضلع المقابلة إلى قطعتين طوليهما s و t . عندئذ يكون

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2 &= h^2+s^2+h^2+t^2+(s+t)^2\\ &= 2\left(h^2+s^2+t^2+st\right)\end{aligned}$$

و

$$2\mathcal{A} = (s+t)h$$

فإذا عرّفنا

$$\delta = \left(a^2+b^2+c^2\right) - 4\sqrt{3}\mathcal{A}$$

كان لدينا

$$\begin{aligned}\delta &= 2\left(h^2+s^2+t^2+st\right)-2\sqrt{3}(s+t)h\\ &= 2\left(\left(h-\tfrac{\sqrt{3}}{2}(s+t)\right)^2+s^2+t^2+st-\tfrac{3}{4}(s+t)^2\right)\\ &= 2\left(\left(h-\tfrac{\sqrt{3}}{2}(s+t)\right)^2+\tfrac{1}{4}(s-t)^2\right)\end{aligned}$$

وهذا يُثبت أنّ $\delta \geq 0$ مع مساواة إذا وفقط إذا كان $s=t$ و $h=\frac{\sqrt{3}}{2}(s+t)$، وهذا يُكافئ كون المثلّث متساوي الأضلاع.

③ **حلَّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $\cos^n x-\sin^n x=1$ و n عددٌ طبيعي من** $\mathbb{N}^*$.

■ حالة $n=1$. في هذه الحالة، تُكافئ المعادلةُ $\cos x-\sin x=1$ المعادلةَ

$$\cos\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)$$

وحلول هذه الأخيرة هي $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}\right)\cup 2\pi\mathbb{Z}$.

■ حالة $n=2$. في هذه الحالة، تُكافئ المعادلة $\cos^2 x-\sin^2 x=1$ المُعادلةَ

$$\cos 2x=1$$

وحلول هذه الأخيرة هي $\pi\mathbb{Z}$.

■ حالة $n>2$. ليكن x حلاّ للمعادلة المطروحة، عندئذٍ

$$1=\cos^n x-\sin^n x\leq|\cos x|^n+|\sin x|^n\leq\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

المساواة في المتراجحة السابقة تقتضي أنّ

$$-\sin^n x=|\sin x|^n=\sin^2 x \quad \text{و} \quad \cos^n x=|\cos x|^n=\cos^2 x$$

□ إذا كان n زوجيّاً، استنتجنا مما سبق أنّ $\sin x=0$ و $\cos^2 x=1$ فمجموعة الحلول محتواة في $\pi\mathbb{Z}$. وبالعكس، نرى مباشرة أنّ جميع عناصر $\pi\mathbb{Z}$ هي حلول للمعادلة المدروسة في هذه الحالة.

□ إذا كان n فرديّاً، استنتجنا مما سبق أنّه إمّا $\sin x=-1$ أو $\cos x=1$ فمجموعة الحلول محتواة في $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}\right)\cup 2\pi\mathbb{Z}$، وبالعكس، نرى مباشرة أنّ جميع عناصر هذه المجموعة هي حلول للمعادلة المدروسة في هذه الحالة.

وبذا نكون قد أوجدنا حلول المعادلة المعطاة في جميع الأحوال.

④ **النقطة P هي نقطة داخل مثلّث ABC. يتقاطع (PA) مع (BC) في A'، ويتقاطع (PB) مع (AC) في B'، ويتقاطع (PC) مع (AB) في C'. أثبت أنّ**

$$\max\left(\frac{AP}{PA'},\frac{BP}{PB'},\frac{CP}{PC'}\right)\geq 2 \quad \text{و} \quad \min\left(\frac{AP}{PA'},\frac{BP}{PB'},\frac{CP}{PC'}\right)\leq 2$$

لمّا كانت النقطة P تقع داخل المثلّث ABC استنتجنا أنّها مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) مع (α,β,γ) من $(\mathbb{R}_+^*)^3$ تُحقّق $\alpha+\beta+\gamma=1$.

- لتكن X مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,β) و (C,γ)، عندئذ تنتمي X إلى المستقيم (BC) كما إنها تنتمي إلى المستقيم (AP) لأنّ P مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(X,\beta+\gamma)$ و (A,α). إذن $X=A'$. وعليه

$$\alpha\overrightarrow{PA}+(1-\alpha)\overrightarrow{PA'}=0$$

إذن

$$\frac{AP}{PA'}=\frac{1}{\alpha}-1$$

- ونجد بأسلوب مماثل أنّ

$$\frac{CP}{PC'}=\frac{1}{\gamma}-1 \quad \text{و} \quad \frac{BP}{PB'}=\frac{1}{\beta}-1$$

- وهكذا نرى أنّ

$$\min\left(\frac{AP}{PA'},\frac{BP}{PB'},\frac{CP}{PC'}\right)=\min\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}\right)-1=\frac{1}{\max(\alpha,\beta,\gamma)}-1$$
$$\max\left(\frac{AP}{PA'},\frac{BP}{PB'},\frac{CP}{PC'}\right)=\max\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}\right)-1=\frac{1}{\min(\alpha,\beta,\gamma)}-1$$

ولكن مع الشرط $\alpha+\beta+\gamma=1$ نرى مباشرة أنّ

$$\max(\alpha,\beta,\gamma)\geq\frac{1}{3} \quad \text{و} \quad \min(\alpha,\beta,\gamma)\leq\frac{1}{3}$$

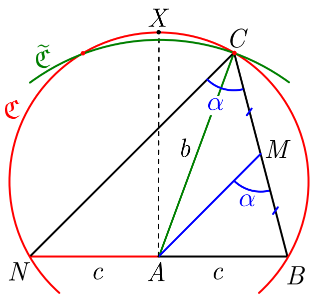
وهذا يقتضي أنّ

$$\max\left(\frac{AP}{PA'},\frac{BP}{PB'},\frac{CP}{PC'}\right)\geq 2 \quad \text{و} \quad \min\left(\frac{AP}{PA'},\frac{BP}{PB'},\frac{CP}{PC'}\right)\leq 2$$

وهما المتراجحتان المطلوبتان. ■

⑤ **أنشئ مثلّثاً** ABC **، فيه** $AC = b$ **و** $AB = c$ **و** $\widehat{AMB} = \alpha$ **حيث** M **هي منتصف الضلع** $[BC]$**. أثبت أنّ هذا الإنشاء ممكن إذا وفقط إذا كان** $b\tan(\frac{\alpha}{2}) \leq c < b$**، وتفحّص حالة المساواة.**

التحليل : لنفترض أنّ الإنشاء مُنجزٌ، كما في الشكل المجاور. ولنتأمّل النقطة N نظيرة B بالنسبة إلى A.



- لمّا كان $(AM) \parallel (NC)$ استنتجنا أنّ الزاويتين $\widehat{NCB}$ و $\widehat{AMB}$ متساويتان، ومن ثَمّ
$$\widehat{NCB} = \alpha$$
- وعلى هذا، تنتمي النقطة C إلى القوس $\mathfrak{C}$ من الدائرة التي تمرّ بالنقطتين N و B، وتُرى من نقاطها القطعة $[NB]$ بزاوية قدرها α.
- ومن جهة أخرى، تنتمي C إلى الدائرة $\tilde{\mathfrak{C}} = C(A,b)$ التي مركزها A ونصف قطرها b.
- إنّ شرط تقاطع الدائرة $\tilde{\mathfrak{C}}$ والقوس $\mathfrak{C}$ هو أن يكون $c < b \leq AX$، حيث رمزنا بالرمز X إلى نقطة تقاطع محور القطعة $[NB]$ مع القوس $\mathfrak{C}$. ولمّا كان $\widehat{AXB} = \dfrac{\alpha}{2}$ استنتجنا أنّ $AX = \dfrac{c}{\tan(\alpha/2)}$، وعليه يُصبح شرط إمكان الإنشاء بالشكل
$$b\tan(\tfrac{\alpha}{2}) \leq c < b$$
أمّا حالة $c = b\tan(\frac{\alpha}{2})$ فتوافق الحالة التي يكون فيها المثلّث ABC قائماً في A.

الإنشاء :

❶ ننشئ القطعة المستقيمة $[NB]$ بطول قدره $2c$، ونعيِّن منتصفها A.

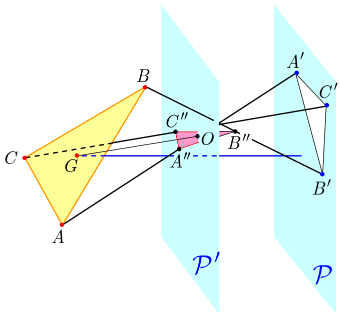
❷ ننشئ القوس $\mathfrak{C}$ الذي يمثّل مجموعة النقاط التي ترى منها القطعة المستقيمة $[NB]$ بزاوية قدرها α. (لتحقيق ذلك أنشئ المثلّث NBB' القائم في B وفيه $\widehat{BNB'} = \frac{\pi}{2} - \alpha$، فيكون منتصف الوتر $[BB']$ هو مركز الدائرة $\mathfrak{C}$.)

❸ عيِّن C نقطة تقاطع القوس $\mathfrak{C}$ مع الدائرة $C(A,b)$. ولاحظ أنّ هناك حليّن للمسألة بوجه عام.

⑥ **نُعطى ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة، ومستوياً $\mathcal{P}$ لا يوازي (ABC) وبحيث تقع النقاط A و B و C في جهة واحدة من $\mathcal{P}$. نختار ثلاث نقاطٍ A' و B' و C' نقاطاً لا على التعيين من $\mathcal{P}$، ولتكن A'' منتصف $[AA']$، و B'' منتصف $[BB']$ و C'' منتصف $[CC']$، وأخيراً لتكن O مركز ثقل المثلّث $A''B''C''$. أوجد المحلّ الهندسي للنقطة O عندما تتحوّل النقاط A' و B' و C'.**

لنعرّف G مركز ثقل المثلّث ABC، ولنعرّف G' مركز ثقل المثلّث $A'B'C'$. لمّا كان

$$\overrightarrow{GO} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{GA''} + \overrightarrow{GB''} + \overrightarrow{GC''}\right)$$



وكان

$$\overrightarrow{GA''} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA'}\right)$$

و

$$\overrightarrow{GB''} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB'}\right)$$

و

$$\overrightarrow{GC''} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC'}\right)$$

استنتجنا أنّ

$$\overrightarrow{GO} = \frac{1}{6}\left(\underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'}}_{3\overrightarrow{GG'}}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{GG'}$$

وعليه إذا كان $\mathcal{H}_{G,\frac{1}{2}}$ هو التحاكي الذي مركزه G ونسبته $\frac{1}{2}$ كانت O صورة G' وفق التحاكي $\mathcal{H}_{G,\frac{1}{2}}$. ولكن عندما تتحوّل A' و B' و C' في $\mathcal{P}$ ترسم G' كامل المستوي $\mathcal{P}$، فالمحلّ الهندسي للنقطة O هو $\mathcal{P}' = \mathcal{H}_{G,\frac{1}{2}}(\mathcal{P})$، فهو إذن المستوي الموازي للمستوي $\mathcal{P}$ ويبعد عن G نصف بُعد G عن $\mathcal{P}$. ■

أولمبياد الرياضيّات الرابع

① **أوجد أصغر عدد طبيعي n آحاده في الكتابة العشريّة تساوي 6، وعند نقل هذه الخانة لتوضع في النهاية نحصل على عددٍ يساوي أربعة أضعاف العدد n.**

$$n = (abc\cdots d6)_{10} \rightsquigarrow (6abc\cdots d)_{10}$$

لنفترض العدد المطلوب n يُكتب بعدد $m+1$ من الخانات العشريّة و $m \geq 1$. ولنضع p باقي قسمة n على 10، فيكون $n = 10p + 6$ مع $0 \leq p < 10^m$. عندئذ يُعبَّر عن الشرط المطلوب بالصيغة

$$4(10p+6) = 6\cdot 10^m + p$$

أو $13p + 8 = 2\cdot 10^m$، وهذا يقتضي أنّ $p = 2q$، ومنه

$$13q + 4 = 10^m$$

وبوجه خاص ينبغي أن يكون $10^m = 4 \bmod 13$، ولكن لنتأمّل الجدول التالي :

m	1	2	3	4	5	6
$10^m \bmod 13$	10	9	12	3	4	1

وعلى هذا نرى أنّ رتبة 10 في الزمرة $((\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*, \times)$ تساوي 6 وأنّ مجموعة حلول المعادلة $10^m = 4 \bmod 13$ هي $m = 5 \bmod 6$، فأصغر قيمة أكبر من الواحد للعدد m تُحقّق المطلوب هي $m = 5$، وعندها يكون $q = \frac{10^m - 4}{13} = 7692$، ومن ثَمّ نجد $p = 15384$، وأخيراً $n = 153846$.

② **أوجد جميع الأعداد الحقيقيّة x التي تُحقّق**

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

لنلاحظ أوّلاً أنّ التابع $x \mapsto f(x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}$ تابعٌ معرّفٌ على المجال $I = [-1,3]$. وهو مستمرٌّ ومتناقصٌ تماماً على هذا المجال لأنّه مجموع تابعين متناقصين تماماً عليه. كما نلاحظ أنّ $f(-1) = 2$ و $f(1) = 0$، فيوجد عددٌ وحيدٌ x_0 من $[-1,1]$ يُحقّق $f(x_0) = \frac{1}{2}$ وتكون مجموعة حلول المتراجحة هي المجال $[-1, x_0[$.

لتعيين x_0 نحلّ المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$. بالتربيع نجد

$$\frac{15}{8}=\sqrt{3+2x-x^2}=\sqrt{4-(1-x)^2}$$

وبتربيع ثانٍ نجد

$$(1-x)^2=4-\frac{225}{64}=\frac{31}{64}$$

ومنه

$$x\in\left\{1-\frac{\sqrt{31}}{8},1+\frac{\sqrt{31}}{8}\right\}$$

ولأنّ $x_0<1$ نستنتج أنّ $x_0=1-\frac{\sqrt{31}}{8}$ فمجموعة الحلول هي $\left]-1,1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right[$.

③ **نتأمّل المكعب $ABCDA'B'C'D'$ الذي وجهه العلوي $ABCD$ ووجهه السفلي هو $A'B'C'D'$ مع A' فوق A مباشرة، وهكذا.... تتحرّك نقطة X بسرعة خطيّة ثابتة على محيط المربّع $ABCD$ وتتحرّك نقطة Y بالسرعة الخطيّة الثابتة نفسها على محيط المربّع $B'C'CB$. تُغادر X النقطة A باتجاه B في اللحظة نفسها التي تُغادر فيها Y النقطة B' باتجاه C'. عيّن المحلّ الهندسي للنقطة Z منتصف القطعة $[XY]$.**

1. يمكن أن نفترض شعاع سرعة X على $[AB]$ هو $\overrightarrow{AB}$، وأنّ شعاع سرعة Y على $[B'C']$ هو $\overrightarrow{B'C'}$، عندئذ، في اللحظة t من $[0,1]$، يكون $\overrightarrow{AX}=t\overrightarrow{AB}$، ويكون $\overrightarrow{B'Y}=t\overrightarrow{B'C'}$. وعليه إذا عرّفنا T منتصف $[AB']$ كان لدينا في اللحظات t من المجال $[0,1]$ ما يلي :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{TZ}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{TX}+\overrightarrow{TY}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{TB'}+\overrightarrow{B'Y}\right) \qquad ☞ \quad \overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB'}=0\\
&=\frac{1}{2}\left(t\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{B'C'}\right)=\frac{t}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\\
&=\frac{t}{2}\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{TU}
\end{aligned}$$

وقد عرّفنا U منتصف القطعة المستقيمة $[BC']$. فعندما تتحرّك X على $[AB]$، و Y على $[B'C']$ تتحرّك Z على القطعة $[TU]$ من T إلى U.

2. و كذلك، يكون شعاع سرعة X على $[BC]$ هو $\overrightarrow{BC}$ ، وشعاع سرعة Y على $[C'C]$ هو $\overrightarrow{C'C}$ ، عندئذ، في اللحظة t من $[1,2]$ ، يكون $\overrightarrow{BX}=(t-1)\overrightarrow{BC}$ ، ويكون $\overrightarrow{C'Y}=(t-1)\overrightarrow{C'C}$. وعليه في اللحظات t من المجال $[1,2]$ لدينا :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{UZ}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{UX}+\overrightarrow{UY}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{UB}+\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{UC'}+\overrightarrow{C'Y}\right)\qquad ☞\quad \overrightarrow{UB}+\overrightarrow{UC'}=0\\&=\frac{1}{2}\left((t-1)\overrightarrow{BC}+(t-1)\overrightarrow{C'C}\right)=\frac{t-1}{2}\left(\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'C}\right)\\&=\frac{t-1}{2}\overrightarrow{B'C}=(t-1)\overrightarrow{UC}\end{aligned}$$

فعندما تتحرّك X على $[BC]$، و Y على $[C'C]$ تتحرّك Z على القطعة $[UC]$ من U إلى C.

3. ومن ثَمّ، يكون شعاع سرعة X على $[CD]$ هو $\overrightarrow{CD}$، وشعاع سرعة Y على $[CB]$ هو $\overrightarrow{CB}$ ، عندئذ، في اللحظة t من $[2,3]$ ، يكون من جهة أولى $\overrightarrow{CX}=(t-2)\overrightarrow{CD}$، ويكون $\overrightarrow{CY}=(t-2)\overrightarrow{CB}$. وعليه في اللحظات t من المجال $[2,3]$ لدينا :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CZ}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CX}+\overrightarrow{CY}\right)=\frac{1}{2}\left((t-2)\overrightarrow{CD}+(t-2)\overrightarrow{CB}\right)\\&=\frac{t-2}{2}\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{t-2}{2}\overrightarrow{CA}=(t-2)\overrightarrow{CV}\end{aligned}$$

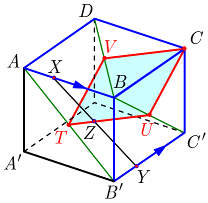
وقد عرّفنا V منتصف القطعة $[CA]$. فعندما تتحرّك X على $[CD]$، و Y على $[CB]$ تتحرّك Z على القطعة $[CV]$ من C إلى V.

4. وأخيراً، يكون شعاع سرعة X على $[DA]$ هو $\overrightarrow{DA}$، وشعاع سرعة Y على $[BB']$ هو $\overrightarrow{BB'}$ ، عندئذ، في اللحظة t من $[3,4]$، يكون من جهة أولى $\overrightarrow{DX}=(t-3)\overrightarrow{DA}$، ويكون $\overrightarrow{BY}=(t-3)\overrightarrow{BB'}$. وعليه، نجد بأسلوب مماثلٍ لِما سبق :

$$\forall t\in[3,4],\quad \overrightarrow{VZ}=(t-3)\overrightarrow{VT}$$

وقد عرّفنا V منتصف القطعة $[CA]$. فعندما تتحرّك X على $[CD]$، و Y على $[CB]$ تتحرّك Z على القطعة $[CV]$ من C إلى V.

وهكذا، تتحرّك Z على متوازي الأضلاع $TUCV$. كما هو موضّح بالشكل التالي



④ **أوجد جميع الحلول الحقيقيّة للمعادلة**

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

باستخدام $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$ ، تُكافِئ المعادلةُ المعطاة المعادلةَ التالية :

$$\cos 2x + 2\cos^2 2x + \cos 6x = 0$$

وباستخدام $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ ، تُكافِئ المعادلةُ السابقة المعادلةَ التالية :

$$2\cos^3 2x + \cos^2 2x - \cos 2x = 0$$

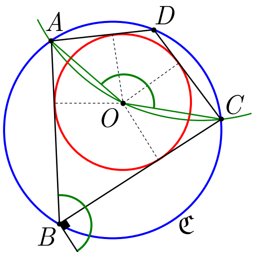
أو

$$\cos 2x\,(\cos 2x + 1)(2\cos 2x - 1) = 0$$

فمجموعة الحلول هي :

$$\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right)$$

⑤ **نتأمّل ثلاث نقاط معطاة A و B و C من دائرة $\mathfrak{C}$. يُطلَبُ إنشاء نقطة D من $\mathfrak{C}$ ، بحيث يكون من الممكن رسم دائرة تمسّ أضلاع الرباعي $ABCD$ داخلاً.**



التحليل : لنفترض أنّ الإنشاء مُنجَزٌ. وليكن O مركز الدائرة الماسّة لأضلاع الرباعي $ABCD$ داخلاً. من الواضح أنّ O يقع على المنصّف d للزاوية $\widehat{ABC}$. و لمّا كان

$$(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pi$$

و

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CB}) = \pi$$

استنتجنا بجمع المساواتين السابقتين طرفاً مع طرف أنّ :

$$(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}) + (\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB}}) = 2\pi$$

ولكن (OA) هو منصّف الزاوية $\widehat{BAD}$، و (OC) هو منصّف الزاوية $\widehat{BCD}$، إذن

$$(\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB}}) = \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}) \quad \text{و} \quad (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}) = \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$$

فإذا استفدنا من كون الرباعي $ABCD$ رباعيّاً دائرياً استنتجنا أنّ

$$(\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CB}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}) = \frac{1}{2}\Big((\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) + (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}})\Big) = \frac{\pi}{2}$$

وعلى هذا $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}) = 2\pi - \frac{\pi}{2}$، ولأنّ $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}}) = 2\pi - (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})$ استنتجنا

$$(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}}) = \frac{\pi}{2} + (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$$

- في حالة $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \neq \frac{\pi}{2}$، نضع G مركز الدائرة $\mathfrak{C}$. ونعرّف O' نقطة تقاطع المماسين للدائرة $\mathfrak{C}$ المرسومين من C و A، (عندئذ $O'A = O'C$).

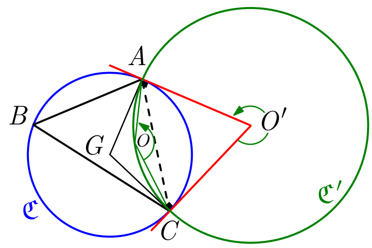
  نلاحظ أنّ $(\widehat{\overrightarrow{GC},\overrightarrow{GA}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$، ومن ثَمّ

$$(\widehat{\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'C}}) = \pi - (\widehat{\overrightarrow{GC},\overrightarrow{GA}}) = \pi - 2(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$$

  وأخيراً

$$(\widehat{\overrightarrow{O'C},\overrightarrow{O'A}}) = \pi + 2(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}})$$

  فإذا رسمنا الدائرة $\mathfrak{C}'$ التي مركزها O' وتمر بالنقطة A، استنتجنا من المساواة السابقة أنّ O تقع على القوس من $\mathfrak{C}'$ المحتوى داخل $\mathfrak{C}$، لأنّ هذا القوس هو مجموعة النقاط التي تُرى منها القطعة المستقيمة $[CA]$ بزاوية $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}})$ ثابتة وتساوي $\frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{O'C},\overrightarrow{O'A}})$.



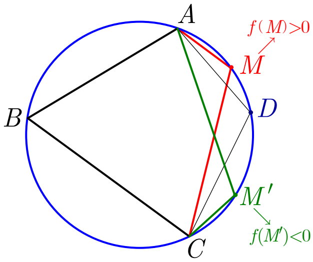
- أمّا في حالة $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) = \frac{\pi}{2}$، فنرى أنّ O تقع على القطعة المستقيمة $[CA]$.

تُثبت المناقشة السابقة **وحدانيّة** الحلِّ في حال وجوده، إذ إنّ مركز الدائرة المماسّة داخلاً للرباعي $ABCD$ محدَّدٌ تماماً كتقاطع منصّف الزاوية $\widehat{ABC}$ مع القوس من الدائرة $\mathfrak{C}'$ المحتوى في $\mathfrak{C}$، أو مع القطعة المستقيمة $[CA]$ في حالة $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$.

لإثبات **وجود** حلٍّ للمسألة المطروحة سنستفيد من الخاصّة التالية التي سنثبتُها لاحقاً.

مبرهنة : يمكن رسم دائرة تمسّ أضلاع الرباعي المحدّب $ABCD$ **إذا وفقط إذا** كان
$$AB + CD = AD + CB$$

لنتأمّل إذن ثلاث نقاط ABC من الدائرة $\mathfrak{C}$. وليكن $\widehat{CA}$ القوس المفتوح من $\mathfrak{C}$ الذي طرفاه النقطتان A و C، ولا تنتمي إليه النقطة B. ولنتأمّل التابع المستمرّ
$$f : \widehat{CA} \to \mathbb{R}, f(M) = AB + CM - AM - CB$$
نلاحظ أنّ



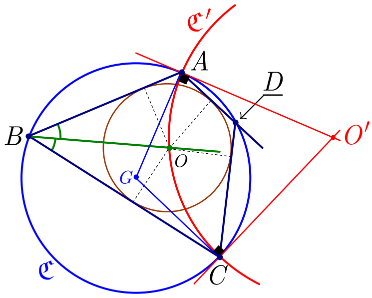
$$\lim_{M \to A, M \in \widehat{CA}} f(M) = AB + CA - CB > 0$$
و
$$\lim_{M \to C, M \in \widehat{CA}} f(M) = AB - AC - CB < 0$$

إذن اعتماداً على مبرهنة القيمة الوسطى نستنتج أنّه توجد D تنتمي إلى القوس $\widehat{CA}$ تُحقّق $f(D) = 0$. وعملاً بالتوطئة المشار إليها أعلاه، نستنتج وجود حلٍّ للمسألة المطروحة.

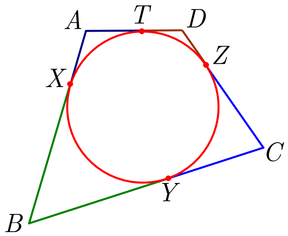
الإنشاء :

1. ننشئ المنصّف d للزاوية $\widehat{ABC}$.
2. في حالة $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$ كانت O هي نقطة تقاطع d مع $[AC]$.
3. أمّا في الحالة العامّة $\widehat{ABC} \neq \frac{\pi}{2}$، فننشئ O' نقطة تقاطع المماسين للدائرة $\mathfrak{C}$ المرسومين من A و C، ثُمّ نُنشئ القوس من الدائرة التي مركزها O' وتمر بالنقطتين A و C والمحتوى داخل $\mathfrak{C}$، فتتقاطع هذه القوس مع d في O.
4. نُنشئ الدائرة التي مركزها O وتمسّ (AB)، فيتقاطع المماس الثاني، المرسوم من A، لهذه الدائرة مع الدائرة $\mathfrak{C}$ في النقطة D المطلوبة.

نوضّح في الشكل التالي خطوات هذا الإنشاء.



نأتي الآن إلى إثبات المبرهنة.



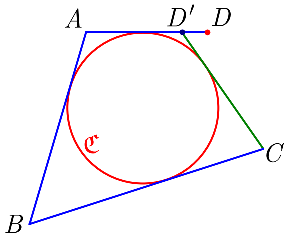
الشرطُ لازمٌ : لنفترض أنّه توجد دائرة تمسّ أضلاع الرباعي المحدّب $ABCD$. ولنفترض أنّ نقاط التماس هي X و Y و Z و T كما في الشكل المجاور.

عندئذ، نستنتج من تساوي طولَيْ المماسين لدائرة المنبعثين من النقطة نفسها، ما يلي :

$$\begin{aligned} AD + BC &= AT + TD + BY + YC \\ &= AX + ZD + XB + CZ \\ &= AX + XB + ZD + CZ = AB + CD \end{aligned}$$

الشرط كافٍ : لنتأمّل رباعياً محدّباً $ABCD$ يُحقّق الشرط :

$$AB + CD = AD + BC$$



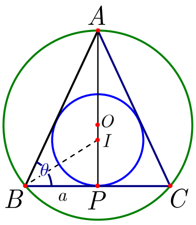
ولتكن $\mathfrak{C}$ الدائرة التي تمس الأضلاع $[AD]$ و $[AB]$ و $[BC]$. المماس الثاني للدائرة $\mathfrak{C}$ المرسوم من النقطة C يقطع المستقيم (AD) في D' . لمّا كانت $\mathfrak{C}$ تمسّ أضلاع الرباعي $ABCD'$ استنتجنا من لزوم الشرط أنّ

$$AB + CD' = AD' + BC$$

إذن $AD - AD' = CD - CD'$. ولكن $AD - AD'$ يساوي DD' أو $-DD'$، وكلٌّ من المساواتين $CD = CD' + D'D$ أو $CD' = CD + DD'$ تفتضي انتماء D' إلى (CD)، إذن D' هي نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و (CD)، ومنه $D = D'$، والدائرة $\mathfrak{C}$ تمس أضلاع الرباعي $ABCD$. ■

⑥ **نصف قطر الدائرة المارّة برؤوس مثلّث متساوي الساقين يساوي R، ونصف قطر الدائرة المماسة لأضلاعه داخلاً هو r. أثبت أنّ المسافة بين مركزَي الدائرتين تساوي**

$$\sqrt{R(R-2r)}$$



لنتأمّل مثلّثاً ABC متساوي الساقين فيه $AB = AC$. ولنعرّف المقدارين a من $\mathbb{R}_+^*$ و θ من $]0, \frac{\pi}{2}[$ بالعلاقتين $BC = 2a$ و $\widehat{ABC} = \theta$. ولتكن P منتصف $[BC]$. ولنرمز بالرمز O إلى مركز الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC، وبالرمز I إلى مركز الدائرة المماسّة لأضلاعه داخلاً. تقع النقطتان O و I على المستقيم (AP) محور القطعة المستقيمة $[BC]$.

- من جهة أولى، $\frac{2a}{\sin 2\theta} = \frac{BC}{\sin \widehat{A}} = 2R$ إذن $AO = R = \frac{a}{\sin 2\theta}$.
- ومن جهة أخرى، لأنّ (BI) منصّف الزاوية $\widehat{ABC}$ استنتجنا أنّ $r = a\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
- وأخيراً، لمّا كان I ينتمي إلى القطعة المستقيمة $[AP]$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned} AI &= AP - PI = AP - r \\ &= a\tan\theta - a\tan\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \\ &= a\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\theta\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

ولمّا كانت النقطتان O و I تقعان على المستقيم (AP) في جهة واحدة بالنسبة إلى النقطة A، استنتجنا أنّ

$$d = OI = |AO - AI| = a\left|\frac{1}{\sin 2\theta} - \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\theta\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right|$$

ولكن

$$\sin 2\theta = 4\cos\theta\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)$$

إذن

$$d = a\left|1 - \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\theta\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right| = \frac{a}{\sin 2\theta}\left|1 - 4\sin^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right| = a\frac{|1-2\cos\theta|}{\sin 2\theta}$$

ومن جهة أخرى،

$$R(R-2r)=\frac{a}{\sin 2\theta}\left(\frac{a}{\sin 2\theta}-2a\tan\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right)$$
$$=\frac{a^2}{\sin^2 2\theta}\left(1-2\sin 2\theta\tan\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right)$$

ولكن

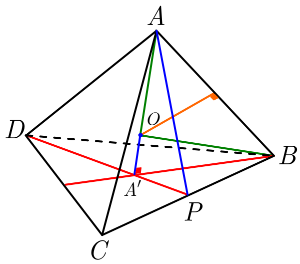
$$1-2\sin 2\theta\tan\left(\tfrac{\theta}{2}\right)=1-8\cos\theta\sin^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)$$
$$=1-4\cos\theta(1-\cos\theta)=(1-2\cos\theta)^2$$

إذن

$$R(R-2r)=a^2\frac{(1-2\cos\theta)^2}{\sin^2 2\theta}$$

وهذا يبرهن أنّ $d^2=R(R-2r)$، ويتمّ الإثبات.

⑦ أثبت أنّ المستقيمات الستة التي تحمل أضلاع رباعي وجوه منتظم تمس خمس كُرات. وبرهن بالعكس، أنّه إذا وجدت خمس كرات تمس المستقيمات الستة التي تحمل أضلاع رُباعي وجوهٍ كان رباعي الوجوه هذا منتظماً.



مقدَّمة : ليكن رباعي الوجوه المنتظم $ABCD$، الذي نفترض أن طول ضلعه يساوي a. وليكن O مركز ثقله، المعرّف بالصيغة :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=0 \qquad (1)$$

ليكن A' مركز ثقل الوجه BCD. نستنتج من (1) أنّ $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OA'}=0$ إذن

$$\overrightarrow{AO}=\tfrac{3}{4}\overrightarrow{AA'} \qquad (2)$$

ولمّا كان المثلّث BCD متساوي الأضلاع استنتجنا أنّ A' متساوية البُعد عن رؤوس هذا المثلّث، $A'B=A'C=A'D=\frac{a}{\sqrt{3}}$. ولمّا كانت A أيضاً متساوية البُعد عن رؤوس المثلّث BCD نفسه، استنتجنا أنّ جميع نقاط المستقيم (AA') متساوية البُعد عن رؤوس المثلّث BCD، وأنّه عمودي على المستوي (BCD). ومنه

$$AA'^2=AP^2-A'P^2=AP^2-\left(\tfrac{1}{3}DP\right)^2=\left(\tfrac{8}{9}\right)\left(a\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right)^2$$

إذن $AA' = a\frac{\sqrt{6}}{3}$ ، وبالاستفادة من (2) نستنتج أنّ $OA = a\frac{\sqrt{6}}{4}$ ، واستناداً إلى تناظر المسألة نستنتج أنّ

$$OA = OB = OC = OD = a\frac{\sqrt{6}}{4}$$

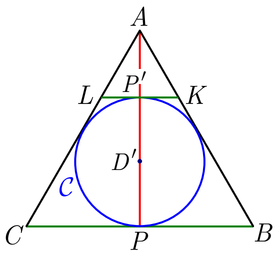
إثبات الخاصّة : نستنتج مما سبق تطابق المثلّثات التالية المتساويّة الساقين والمشترِكَة بالرأس O :

$$OAB \text{ و } OAC \text{ و } OAD \text{ و } OBC \text{ و } OBD \text{ و } OCD$$

وهذا يقتضي، من ثَمّ، تطابق ارتفاعاتها النازلة من O، أي إنّ النقطة O تبعد أبعاداً متساوية عن المستقيمات (AB) و (AC) و (AD) و (BC) و (BD) و (CD). وهذا البُعد يساوي

$$r = \sqrt{OA^2 - (\tfrac{1}{2}AB)^2} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

إذن الكرة $\mathcal{S} = S\left(O, \frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$ تمسّ جميع أضلاع رباعي الوجوه $ABCD$.



- تتقاطع الكرة $\mathcal{S}$ مع المستوي (ABC) بدائرة $\mathcal{C}$ تمسّ أضلاع المثلّث ABC داخلاً، ولأنّ هذا المثلّث متساوي الأضلاع، استنتجنا أنّ D' ، مركز $\mathcal{C}$، هو مركز ثقله. وإذا كان AP محور الضلع BC كان $\overrightarrow{AD'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$. لتكن P' النقطة من $\mathcal{C}$ المُقابلة قطريّاً للنقطة P ، يقطع المستقيمُ المارّ بالنقطة P' موازياً (BC) الضلعين $[AB]$ و $[AC]$ في النقطتين K و L على الترتيب. ونلاحظ أنّ $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

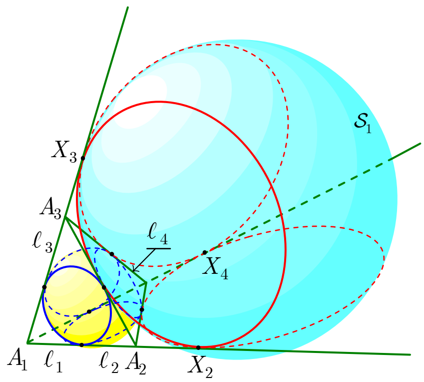
ليكن $S_{(OD')}$ التناظر القائم بالنسبة إلى المستقيم (OD'). عندئذ نلاحظ أنّ $S_{(OD')}$ يُحافظ على كلٍّ من الكرة $\mathcal{S}$ والمستوي (ABC)، وهو من ثَمّ، يُحافظ على الدائرة $\mathcal{C}$. ومنه نستنتج أنّ الكرة $\mathcal{S}$ تمس المستقيم (KL) لأنّ $S_{(OD')}((BC)) = (KL)$.

- وإذا عرّفنا النقطة M بالعلاقة $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ ، استنتجنا، بأسلوب مماثلٍ لِما سبق، أنّ الكرة $\mathcal{S}$ تمس أيضاً المستقيمين (LM) و (MK) .

- ليكن إذن $\mathcal{H}_{A,3}$ التحاكي الذي مركزه A ونسبته 3 . ولنعرّف الكرة $\mathcal{S}_A$ بأنها صورة $\mathcal{S}$ وفق التحاكي $\mathcal{H}_{A,3}$ أي $\mathcal{S}_A = \mathcal{H}_{A,3}(\mathcal{S})$. عندئذ تمسّ الكرة $\mathcal{S}_A$ كلاً من المستقيمات (AB) و (AC) و (AD) لأنّ التحاكي $\mathcal{H}_{A,3}$ يُحافظ عليها، وهي تمسّ المستقيمات (CB) و (DC) و (BD) لأنها صور (KL) و (LM) و (MK) وفق $\mathcal{H}_{A,3}$.

▪ وأخيراً إذا عرّفنا بالمُماثلة التحاكيات $\mathcal{H}_{B,3}$ و $\mathcal{H}_{C,3}$ و $\mathcal{H}_{D,3}$ كانت أيضاً الكرات $\mathcal{S}_B = \mathcal{H}_{B,3}(\mathcal{S})$ و $\mathcal{S}_C = \mathcal{H}_{C,3}(\mathcal{S})$ و $\mathcal{S}_D = \mathcal{H}_{D,3}(\mathcal{S})$ مماسّة لجميع المستقيمات الحاملة لأضلاع رباعي الوجوه $ABCD$. وهكذا تكون الكرات الخمس $\mathcal{S}$ و $\mathcal{S}_A$ و $\mathcal{S}_B$ و $\mathcal{S}_C$ و $\mathcal{S}_D$ مماسّة لجميع المستقيمات الحاملة لأضلاع رباعي الوجوه $ABCD$.

إثبات العكس : لنرمز إلى رؤوس رباعي الوجوه بالرموز $(A_i)_{1\le i\le 4}$. ولتكن إذن $\mathcal{S}$ الكرة المماسّة داخلاً لأضلاع رباعي الوجوه. ولنرمز بالرمز $\mathcal{S}_i$ إلى الكرة المماسّة خارجاً لممدّدات أضلاع رباعي الوجوه والتي تُقابل الرأس A_i .



الفكرة الأساسيّة هي في كون أطوال المماسات لكرة، والمنبعثة من نقطة خارجها، متساوية. لأنّ المستوي الذي يعيّنه أي مماسين لكرة يتقاطع معها وفق دائرة يكونان مماسين لها.

لنعرّف إذن الطول ℓ_i بأنّه طول قطعة المماس المرسوم من الرأس A_i للكرة $\mathcal{S}$ ، وذلك في حالة $1 \le i \le 4$. فيكون طول الضلع $[A_iA_j]$ مساوياً $A_iA_j = \ell_i + \ell_j$.

▪ لنرمز إلى نقطة تماس المستقيم (A_1A_j) مع الكرة $\mathcal{S}_1$ بالرمز X_j في حالة j من المجموعة $\{2,3,4\}$. ولنلاحظ أنّ $\mathcal{S}_1$ تتقاطع مع المستوي $(A_2A_3A_4)$ في الدائرة المماسّة داخلاً لأضلاع المثلّث $A_2A_3A_4$ ، وهي نفسها الدائرة التي تتقاطع فيها الكرة $\mathcal{S}$ مع المستوي $(A_2A_3A_4)$. إذن أطوال قطع المماسات المنبعثة من A_j للكرة $\mathcal{S}$ تساوي أطوال قطع المماسات المنبعثة من النقطة نفسها للكرة $\mathcal{S}_1$ ، وعليه يكون $A_jX_j = \ell_j$ وذلك في حالة j من المجموعة $\{2,3,4\}$. نستنتج إذن من كون $A_1X_2 = A_1X_3 = A_1X_4$ أنّ

$$\ell_1 + 2\ell_2 = \ell_1 + 2\ell_3 = \ell_1 + 2\ell_4$$

وهذا يبرهن على أنّ $\ell_2 = \ell_3 = \ell_4$.

وبتطبيق الدراسة السابقة انطلاقاً من الرأس A_2 والكرة S_2 نستنتج بأسلوب مماثلٍ أنّ $\ell_1 = \ell_3 = \ell_4$. وبناءً على هذا نرى أنّ الأطوال $\left(A_iA_j\right)_{1\le i<j\le 4}$ متساوية، فرباعي الوجوه $A_1A_2A_3A_4$ منتظمٌ. ويتمّ الإثبات.

أولمبياد الرياضيّات الخامس

① **عيّن مجموعة قيم p من $\mathbb{R}$ التي تقبل عندها المعادلة**

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$$

حلولاً حقيقيّة. وأوجد عندئذ هذه الحلول.

لنفترض أنّه يوجد عددٌ حقيقي x يكون حلاً للمعادلة المعطاة.

- لا بُدّ أن يكون x موجباً لأنّ الطرف الأيسر موجبٌ، ولا بُدّ أن يكون الجذران معرّفين. وهذا يقتضي تحقّق المتراجحة : $x \geq \sqrt{\max(1,p)} \geq 1$.
- وتُكافِئ المتراجحة $\sqrt{x^2-p} \leq x$ أن يكون $p \geq 0$.
- كما تكافئ المتراجحة $2\sqrt{x^2-1} \leq x$ أن يكون $x^2 \leq \frac{4}{3}$. وإذا تذكّرنا أنّ $p \leq x^2$ استنتجنا أنّ $p \leq \frac{4}{3}$.

وهكذا نرى أنّ انتماء p إلى المجال $[0,\frac{4}{3}]$ هو شرطٌ لازم لوجود حلول حقيقيّة للمعادلة.

وبالعكس، لنفترض أنّ p عنصرٌ من المجال $[0,\frac{4}{3}]$. إنّ كلّ حلٍّ للمعادلة المعطاة يُحقّق بالتربيع

$$\sqrt{(x^2-1)(x^2-p)}=1+\frac{p}{4}-x^2$$

ونجد بالتربيع من جديد والإصلاح

$$x^2=\frac{(4-p)^2}{8(2-p)}$$

ولمّا كان الحلُّ المرجوُّ موجباً استنتجنا أنّ

$$x=x_p=\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$$

وفي هذه الحالة نتيَقّن مباشرة أنّ

$$\sqrt{x_p^2-p}=\sqrt{\frac{(4-p)^2}{8(2-p)}-p}=\sqrt{\frac{(4-3p)^2}{8(2-p)}}=\frac{4-3p}{2\sqrt{4-2p}}$$

$$\sqrt{x_p^2-1}=\sqrt{\frac{(4-p)^2}{8(2-p)}-1}=\sqrt{\frac{p^2}{8(2-p)}}=\frac{p}{2\sqrt{4-2p}}$$

ومن ثَمّ $\sqrt{x_p^2-p}+2\sqrt{x_p^2-1}=x_p$. و x_p هي الحلّ الوحيد للمعادلة في هذه الحالة.

فالشرط اللازم والكافي لوجود حلّ حقيقي لهذه المعادلة هو انتماء p إلى $[0,\frac{4}{3}]$.

② **نُعطى نقطة A وقطعة مستقيمة $[BC]$. عيّن المحلّ الهندسي للنقاط P من الفراغ التي توجد عند كلٍّ منها نقطة X من القطعة المستقيمة $[BC]$ تُحقّق $\widehat{APX}=\frac{\pi}{2}$.**

في الحقيقة، لنلاحظ أنّ X تنتمي إلى $[BC]$ إذا وفقط إذا كانت X مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1-t)$ و (C,t) في حالة $t\in[0,1]$. لنرمز بالرمز $\mathcal{L}$ إلى المحلّ الهندسي المطلوب. عندئذ

$$\begin{aligned}
P\in\mathcal{L} &\Leftrightarrow \exists X\in[BC],\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PX}=0\\
&\Leftrightarrow \exists t\in[0,1],\ \overrightarrow{AP}\cdot\Big((1-t)\overrightarrow{PB}+t\overrightarrow{PC}\Big)=0\\
&\Leftrightarrow \exists t\in[0,1],\ (1-t)\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}+t\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\
&\Leftrightarrow \Big(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}\Big)\Big(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PC}\Big)\le 0
\end{aligned}$$

ولكن، إذا عرّفنا T' منتصف القطعة المستقيمة $[AT]$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PT} &= \Big(\overrightarrow{AT'}+\overrightarrow{T'P}\Big)\cdot\Big(\overrightarrow{PT'}+\overrightarrow{T'T}\Big)\\
&=\Big(\overrightarrow{AT'}-\overrightarrow{PT'}\Big)\Big(\overrightarrow{PT'}+\overrightarrow{AT'}\Big)=AT'^2-PT'^2
\end{aligned}$$

فإذا كانت B' منتصف $[AB]$، و C' منتصف $[AC]$ استنتجنا مما سبق أنّ

$$\begin{aligned}
P\in\mathcal{L} &\Leftrightarrow \big(AB'^2-PB'^2\big)\big(AC'^2-PC'^2\big)\le 0\\
&\Leftrightarrow (AB'-PB')(AC'-PC')\le 0
\end{aligned}$$

نعرّف، في حالة نقطة M وعددٍ موجبٍ r، **الكرة المفتوحة المليئة** $\mathcal{B}(M,r)$، و**الكرة المغلقة المليئة** $\overline{\mathcal{B}}(M,r)$ التي مركزها M ونصف قطرها r، كما يلي :

$$\overline{\mathcal{B}}(M,r)=\{P:PM\le r\}\quad \text{و}\quad \mathcal{B}(M,r)=\{P:PM<r\}$$

عندئذ نرى مباشرة أنّ $P\in\mathcal{L}$ يُكافئ الشرط

$$((PB'\le AB')\wedge(AC'\le PC'))\vee((AB'\le PB')\wedge(PC'\le AC'))$$

أو

$$\mathcal{L}=\big(\overline{\mathcal{B}}(B',AB')\backslash\mathcal{B}(C',AC')\big)\cup\big(\overline{\mathcal{B}}(C',AC')\backslash\mathcal{B}(B',AB')\big)$$

وعليه إذا عرّفنا بالترتيب $\mathcal{B}_B$ و $\overline{\mathcal{B}}_B$ بأنهما الكرتان المليئتان المفتوحة والمغلقة اللتان تقبلان $[AB]$ قطراً، وعرّفنا بأسلوب مماثلٍ $\mathcal{B}_C$ و $\overline{\mathcal{B}}_C$ بأنهما الكرتان المليئتان المفتوحة والمغلقة اللتان تقبلان $[AC]$ قطراً، كان $\mathcal{L}=\big(\overline{\mathcal{B}}_B\backslash\mathcal{B}_C\big)\cup\big(\overline{\mathcal{B}}_C\backslash\mathcal{B}_B\big)$. ■

③ **نتأمّل مضلّعاً له n ضلعاً. نفترض أنّ جميع زواياه متساويّة، وأنّ أطوال أضلاعه المتتالية $(a_i)_{0\le i<n}$ تُحقّق المتراجحة $a_0 \ge a_1 \ge \cdots \ge a_{n-1}$. أثبت أنّه مضلّع منتظم.**

يجب أن نفترض أنّ رؤوس هذا المضلّع متباينة. لنرمز إلى هذه الرؤوس بالرموز $(A_i)_{0\le i<n}$.
لنمدّد المتتاليتين $(a_i)_{0\le i<n}$ و $(A_i)_{0\le i<n}$ بوضع $a_k = a_{k \bmod n}$ و $A_k = A_{k \bmod n}$.
لنتمكّن من اعتبار الضلع الأوّل الضلعَ الذي يلي الأخير. نفترض إذن أنّ

$$\forall k \in \{0,1,\ldots,n-1\},\ A_kA_{k+1} = a_k$$

يمكن أن ننسب المستوي إلى جملة متعامدة نظاميّة مبدؤها A_0، ومحور فواصلها موجّه بالشعاع $\overrightarrow{A_0A_1}$، ونختار محور تراتيبها ليكون ترتيب A_2 موجباً. إذن يوجد θ من $]0,\pi[$ يُحقّق

$$\forall k \in \{1,\ldots,n\},\quad (\widehat{\overrightarrow{A_{k-1}A_k}, \overrightarrow{A_kA_{k+1}}}) = \theta$$

بالاستفادة من علاقة شال، في حالة k من $\{1,\ldots,n\}$، لدينا

$$(\widehat{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_kA_{k+1}}}) = \sum_{j=1}^{k} (\widehat{\overrightarrow{A_{j-1}A_j}, \overrightarrow{A_jA_{j+1}}}) = k\theta$$

ونستنتج من ذلك في حالة $k = n$ أنّ

$$n\theta = 0 \bmod 2\pi \qquad (1)$$

وأخيراً، سنطابق المستوي منسوباً إلى الجملة السابقة والمستوي العقدي $\mathbb{C}$. فيكون $A_0 = 0$، و $A_1 = a_0$ و $A_2 = a_0 + a_1e^{i\theta}$، وبوجه عام نستنتج مما سبق أنّ

$$A_{k+1} = A_k + a_ke^{ik\theta}$$

في حالة k من $\{0,1,\ldots,n-1\}$. وهذا يبرهن بالتدريج أنّ

$$\forall k \in \{0,\ldots,n-1\},\quad A_{k+1} = \sum_{j=0}^{k} a_je^{ij\theta}$$

وبوجه خاصٍّ، في حالة $k = n-1$ لدينا $A_n = A_0$، إذن

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_je^{ij\theta} = 0 \qquad (2)$$

لنعرّف $\lambda_j = \sin^2\left(\frac{j\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-\cos j\theta)$ في حالة $j \in \mathbb{Z}$، فنجد

$$\lambda_{j+1} - \lambda_j = \tfrac{1}{2}(\cos j\theta - \cos(j+1)\theta) = \sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\theta\right)$$

نستنتج من (2) أنّ

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\mathrm{i}(j+1/2)\theta} = 0$$

وإذا تأمّلنا الجزء التخيّلي وجدنا

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j \left(\lambda_{j+1} - \lambda_j\right) = 0$$

ولكن

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} a_j \left(\lambda_{j+1} - \lambda_j\right) &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda_{j+1} - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda_j = \sum_{j=1}^{n} a_{j-1} \lambda_j - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda_j \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \left(a_{j-1} - a_j\right) \lambda_j \qquad \lambda_0 = \lambda_n = 0\end{aligned}$$

إذ إنّ $\lambda_n = 0$ بناءً على (1). ومنه

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left(a_{j-1} - a_j\right) \lambda_j = 0$$

ولأن جميع حدود المجموع السابق أكبر أو تساوي 0، نستنتج

$$\forall j \in \{1,2,\ldots,n-1\}, \quad \left(a_{j-1} - a_j\right) \lambda_j = 0 \tag{3}$$

لنعرّف

$$j_0 = \min\left\{ j \geq 1 : \lambda_j = 0 \right\}$$

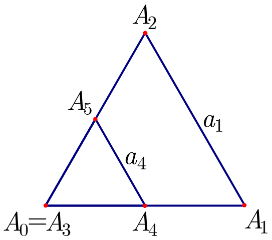
لأنّ $0 < \theta < \pi$، نرى وضوحاً أنّ $3 \leq j_0 \leq n$ فإذا افترضنا أنّ $j_0 < n$ استنتجنا مما سبق أنّ $a_0 = a_2 = \cdots = a_{j_0 - 1}$. ومن ثَمّ

$$A_{j_0} = \sum_{j=0}^{j_0 - 1} a_j e^{\mathrm{i}\, j\theta} = a_0 \sum_{j=0}^{j_0 - 1} e^{\mathrm{i}\, j\theta} = a_0 \frac{e^{\mathrm{i}\, j_0 \theta} - 1}{e^{\mathrm{i}\theta} - 1} = 0$$

إذ استفدنا من أنّ الشرط $\lambda_{j_0} = 0$ يقتضي $e^{\mathrm{i}\, j_0 \theta} = 1$. وهذا يتناقض مع افتراضنا النقاط $\left(A_j\right)_{0 \leq j < n}$ متباينة. إذن لا بُدّ أن يكون $j_0 = n$، ومن ثَمّ

$$a_0 = a_2 = \cdots = a_{n-1}$$

والمضلّع منتظمٌ.



ملاحظة : لم نفترض شيئاً بشأن نوع المضلّع. ولكنّ عدم افتراض النقاط $(A_j)_{0\le j<n}$ متباينة. يتيح حلولاً للمسألة لا يكون فيها المضلّع منتظماً كما يبيِّن الشكل المجاور، في حالة : $\theta = \frac{2\pi}{3}$ و $n = 6$ و $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ ، $a_3 = a_4 = a_5 = \frac{1}{2}$.

ويتمّ الإثبات.

④ **أوجد جميع الحلول** $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ **لجملة المعادلات**

$$x_i + x_{i+2} = y x_{i+1}, \quad i \in \{1,2,\ldots,5\}$$

وقد عرّفنا $x_i = x_{i-5}$ **في حالة** $i \in \{6,7\}$.

هذه مسألة جبر خطّي. من الواضح أنّ $X = (0,0,0,0,0)$ حلٌّ لهذه الجملة، مهما كانت قيمة y . نبحث إذن عن الحلول X غير المعدومة إن وُجدت. تُكتب الجملة بالشكل

$$\begin{aligned} x_5 + x_2 &= y x_1 \\ x_1 + x_3 &= y x_2 \\ x_2 + x_4 &= y x_3 \\ x_3 + x_5 &= y x_4 \\ x_4 + x_1 &= y x_5 \end{aligned}$$

وهي تُكافئ الجملة المصفوفيّة $AV = yV$. وقد رمزنا بالرمز V إلى شعاع العمود $V = X^*$ وبالرمز A إلى المصفوفة المعرّفة كما يلي :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P + P^* \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تقبل الجملة $AV = yV$ حلاً غير معدوم، إذا وفقط إذا كانت y قيمة ذاتيّة للمصفوفة A .

نجد بحساب مباشر أنّ كثير الحدود المميِّز للمصفوفة P هو $\mathcal{X}_P(\lambda) = \lambda^5 - 1$ ، فمجموعة قيمها الذاتيّة هي $\mathrm{Sp}(P) = \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ و ω هو الجذر الخامس للواحد المعطى بالصيغة $\omega = \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}}{5}\right)$.

وإذا عرّفنا

$$\Omega=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&\omega&\omega^2&\omega^3&\omega^4\\1&\omega^2&\omega^4&\omega&\omega^3\\1&\omega^3&\omega&\omega^4&\omega^2\\1&\omega^4&\omega^3&\omega^2&\omega\end{bmatrix}$$

لاحظنا مباشرة أنّ $\Omega^*\cdot\Omega=I_5$، ومن ثَمّ $\Omega^*=\Omega^{-1}$. وأنّ

$$\Omega^*P\Omega=\operatorname{diag}\left(1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4\right)$$

وعليه

$$\Omega P^*\Omega^*=\operatorname{diag}\left(1,\omega^4,\omega^3,\omega^2,\omega\right)$$

إذن، بجمع المساواتين السابقتين نجد

$$\Omega A\Omega^*=\operatorname{diag}\left(2,2\cos\tfrac{2\pi}{5},2\cos\tfrac{4\pi}{5},2\cos\tfrac{4\pi}{5},2\cos\tfrac{2\pi}{5}\right)=D$$

وعليه فإنّ مجموعة القيم الذاتيّة للمصفوفة A هي $\operatorname{Sp}(A)=\left\{2,2\cos\frac{2\pi}{5},2\cos\frac{4\pi}{5}\right\}$.

إذن

- في حالة $y\notin\left\{2,2\cos\frac{2\pi}{5},2\cos\frac{4\pi}{5}\right\}$، تقتصر مجموعة الحلول على الحل الصفري التافه أي $X=(0,0,0,0,0)$.
- في حالة $y=2$. تُكافئ المعادلة $AV=2V$ المعادلة $D\Omega V=2\Omega V$ وهذه تكافئ $\Omega V\in\mathbb{C}\varepsilon_1$، وقد رمزنا بالرمز ε_1 إلى الشعاع $(1,0,0,0,0)^*$. وأخيراً هذا يُكافئ $V\in\mathbb{C}\alpha$، مع $\alpha=\Omega^*\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,1,1,1,1)^*$. إذن مجموعة الحلول في هذه الحالة هي $\{(a,a,a,a,a):a\in\mathbb{C}\}$.
- في حالة $y=2\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. تُكافئ المعادلة $AV=2\cos\frac{2\pi}{5}V$ المعادلة $D\Omega V=2\cos\frac{2\pi}{5}\Omega V$ وهذه تكافئ $\Omega V\in\mathbb{C}\varepsilon_2+\mathbb{C}\varepsilon_5$، وقد رمزنا بالرمز ε_2 إلى الشعاع $(0,1,0,0,1)^*$، وبالرمز ε_5 إلى الشعاع $(0,-1,0,0,1)^*$، وهذا يكافئ $V\in\mathbb{C}\beta+\mathbb{C}\gamma$، مع

$$\beta=\tfrac{\sqrt{5}}{2}(\Omega^*\varepsilon_2)=\left(1,\cos\tfrac{2\pi}{5},\cos\tfrac{4\pi}{5},\cos\tfrac{4\pi}{5},\cos\tfrac{2\pi}{5}\right)^*$$

$$\gamma=\tfrac{\sqrt{5}}{2i\sin(2\pi/5)}(\Omega^*\varepsilon_5)=\left(0,-1,-2\cos\tfrac{2\pi}{5},2\cos\tfrac{2\pi}{5},1\right)^*$$

ومجموعة الحلول في هذه الحالة هي الفضاء الشعاعي الجزئي الذي يقبل (β,γ) أساساً.

▪ في حالة $y=2\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$. تُكافئ المعادلة $AV=2\cos\frac{4\pi}{5}V$ المعادلة $D\Omega V=2\cos\frac{4\pi}{5}\Omega V$ وهذه تكافئ $\Omega V\in\mathbb{C}\varepsilon_3+\mathbb{C}\varepsilon_4$، وقد رمزنا بالرمز ε_3 إلى الشعاع $(0,0,1,1,0)^*$، وبالرمز ε_4 إلى الشعاع $(0,0,-1,1,0)^*$، وهذا يكافئ $V\in\mathbb{C}\mu+\mathbb{C}\nu$، مع

$$\mu=\tfrac{\sqrt{5}}{2}(\Omega^*\varepsilon_3)=\left(1,\cos\tfrac{4\pi}{5},\cos\tfrac{2\pi}{5},\cos\tfrac{2\pi}{5},\cos\tfrac{4\pi}{5}\right)^*$$
$$\nu=\tfrac{\sqrt{5}}{2\,\mathrm{i}\sin(2\pi/5)}(\Omega^*\varepsilon_4)=\left(0,2\cos\tfrac{2\pi}{5},-1,1,-2\cos\tfrac{2\pi}{5}\right)^*$$

ومجموعة الحلول في هذه الحالة هي الفضاء الشعاعي الجزئي الذي يقبل (μ,ν) أساساً.

وبذا تتمّ دراسة الجملة.

⑤ أثبت أنّ : $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)=\frac{1}{2}$.

لنضع $\theta=\frac{\pi}{7}$. عندئذ نرى مباشرة أنّ $e^{7\mathrm{i}\theta}=e^{\mathrm{i}\pi}=-1$، ولأنّ $e^{\mathrm{i}\theta}\neq-1$ استنتجنا

$$0=\frac{e^{7\mathrm{i}\theta}+1}{e^{\mathrm{i}\theta}+1}=e^{6\mathrm{i}\theta}-e^{5\mathrm{i}\theta}+e^{4\mathrm{i}\theta}-e^{3\mathrm{i}\theta}+e^{2\mathrm{i}\theta}-e^{\mathrm{i}\theta}+1$$

وبالقسمة على $e^{3\mathrm{i}\theta}$ الذي لا يساوي 0 نجد

$$e^{3\mathrm{i}\theta}-e^{2\mathrm{i}\theta}+e^{\mathrm{i}\theta}-1+e^{-\mathrm{i}\theta}-e^{-2\mathrm{i}\theta}+e^{-3\mathrm{i}\theta}=0$$

وهذه، بعد القسمة على 2 والإصلاح، هي العلاقة المطلوبة.

⑥ خمسة طلاّب A و B و C و D و E جرى ترتيبهم في مسابقة لا تحتمل التعادل في المواقع من 1 حتّى 5. ولكن لم تُعلن النتيجة وفُتِح البابُ للتكهنات التي علّقت عليها لجنة التحكيم.

التكهُّن الأوّل : أيكون الترتيب $\underset{1}{A}\,\underset{2}{B}\,\underset{3}{C}\,\underset{4}{D}\,\underset{5}{E}$ ؟ فجاء التعليق : إنّ أيّاً من الطلاّب لم يحصل على الترتيب المتوقّع، بل، في الحقيقة، لم يحصل أي طالبين لهما ترتيبان متتاليان في هذا التكهّن على ترتيبين متتالين بالترتيب نفسه. فمثلاً لم يحصل C و D بالتوالي على الترتيبين 1 و 2، ولا على الترتيبين 2 و 3، ولا على 3 و 4 ولا على 4 و 5.

التكهّن الثاني : أيكون الترتيب $\underset{1}{D}\,\underset{2}{A}\,\underset{3}{E}\,\underset{4}{C}\,\underset{5}{B}$ ؟ فجاء التعليق : هناك طالبان فقط حصلا فعلاً على الترتيب المقترح، وهناك زوجان منفصلان جرى التكهّن بحصولهما على ترتيبين متتاليين، وقد أصاب هذا التكهن بالترتيب نفسه. فعيّن نتيجة المسابقة.

من الأفضل البدء بالتكهّن الثاني ففيه العديد من الإقرارات الإيجابيّة. لنناقش تِبعاً للحالات المختلفة التي توافق الخيارات المختلفة للطّالبين اللذين أصاب التكهّن في ترتيبهما. هناك عشر حالات.

1. $\underset{1}{\boldsymbol{D}}\underset{2}{\boldsymbol{A}}\underset{3}{E}\underset{4}{C}\underset{5}{B}$: الطالبان هما D و A، أمّا ترتيب E و C و B فهو خطأ. ولا يمكن أن يكون ترتيب الطالب C هو 3 بناءً على التعليق على التكهّن الأوّل، فلا بُدّ أن يكون ترتيب C هو 5، ولأنّ ترتيب E خطأ وجب أن يكون الترتيب الصحيح في هذه الحالة $\underset{1}{\boldsymbol{D}}\underset{2}{\boldsymbol{A}}\underset{3}{\boldsymbol{B}}\underset{4}{\boldsymbol{E}}\underset{5}{\boldsymbol{C}}$ ولكنّ هذا الترتيب يتعارض مع التعليق على التكهّن الأوّل لأنّ ترتيبَي A و B متتاليان وبالترتيب الوارد في التكهّن الأوّل. فهذه الحالة خطأ.

2. $\underset{1}{\boldsymbol{D}}\underset{2}{A}\underset{3}{\boldsymbol{E}}\underset{4}{C}\underset{5}{B}$: الطالبان هما D و E، أمّا ترتيب A و C و B فهو خطأ. ولا يمكن أن يكون ترتيب الطالب B هو 2 بناءً على التعليق على التكهّن الأوّل، فلا بُدّ أن يكون ترتيب B هو 4، ولأنّ ترتيب A خطأ وجب أن يكون الترتيب الصحيح في هذه الحالة $\underset{1}{\boldsymbol{D}}\underset{2}{\boldsymbol{C}}\underset{3}{\boldsymbol{E}}\underset{4}{\boldsymbol{B}}\underset{5}{\boldsymbol{A}}$ ولكنّ هذا الترتيب يتعارض مع النقطة الثانيّة من التكهّن الثاني إذ لم يُحافظ أيٌّ من الأزواج المنفصلة (DA, EC) أو (DA, CB) أو (AE, CB) على ترتيبين متتاليين. فهذه الحالة خطأ.

3. $\underset{1}{\boldsymbol{D}}\underset{2}{A}\underset{3}{E}\underset{4}{\boldsymbol{C}}\underset{5}{B}$: الطالبان هما D و C، أمّا ترتيب A و E و B فهو خطأ. ولا يمكن أن يكون ترتيب الطالب B هو 2 بناءً على التعليق على التكهّن الأوّل، فلا بُدّ أن يكون ترتيب B هو 3، ولأنّ ترتيب A خطأ وجب أن يكون الترتيب الصحيح في هذه الحالة $\underset{1}{\boldsymbol{D}}\underset{2}{\boldsymbol{C}}\underset{3}{\boldsymbol{B}}\underset{4}{\boldsymbol{E}}\underset{5}{\boldsymbol{A}}$ ولكنّ هذا الترتيب يتعارض مع النقطة الثانيّة من التكهّن الثاني، إذ حافظ الزوج CB على ترتيبين متتاليين ولكن لم يُحافظ أيٌّ من الزوجين AE أو DA علىهذه الخاصّة. فهذه الحالة خطأ.

4. $\underset{1}{\boldsymbol{D}}\underset{2}{A}\underset{3}{E}\underset{4}{C}\underset{5}{\boldsymbol{B}}$: الطالبان هما D و B، أمّا ترتيب A و E و C فهو خطأ. ولا يمكن أن يكون ترتيب الطالب C هو 3 بناءً على التعليق على التكهّن الأوّل، فلا بُدّ أن يكون ترتيب C هو 2، ولأنّ ترتيب E خطأ وجب أن يكون الترتيب الصحيح في هذه الحالة $\underset{1}{\boldsymbol{D}}\underset{2}{\boldsymbol{C}}\underset{3}{\boldsymbol{A}}\underset{4}{\boldsymbol{E}}\underset{5}{\boldsymbol{B}}$ ولكنّ هذا الترتيب يتعارض مع النقطة الثانيّة من التكهّن الثاني، إذ حافظ الزوج AE على ترتيبين متتاليين ولكن لم يُحافظ الزوج CB –الوحيد المنفصل عن AE– على هذه الخاصّة. فهذه الحالة خطأ أيضاً.

5. $\underset{1}{D}\underset{2}{\boldsymbol{A}}\underset{3}{\boldsymbol{E}}\underset{4}{C}\underset{5}{B}$: الطالبان هما A و E، أمّا ترتيب D و C و B فهو خطأ. ولا يمكن أن يكون ترتيب الطالب D هو 4 بناءً على التعليق على التكهّن الأوّل، فلا بُدّ أن يكون ترتيب D هو 5، ولأنّ ترتيب C خطأ وجب أن يكون الترتيب الصحيح في هذه الحالة $\underset{1}{\boldsymbol{C}}\underset{2}{\boldsymbol{A}}\underset{3}{\boldsymbol{E}}\underset{4}{\boldsymbol{B}}\underset{5}{\boldsymbol{D}}$ ولكنّ هذا الترتيب يتعارض مع النقطة الثانيّة من التكهّن الثاني، إذ حافظ الزوج AE على ترتيبين متتاليين ولكن لم يُحافظ الزوج CB –الوحيد المنفصل عن AE– على هذه الخاصّة. فهذه الحالة خطأ أيضاً.

6. $\underset{1}{D}\underset{2}{\boldsymbol{A}}\underset{3}{E}\underset{4}{\boldsymbol{C}}\underset{5}{B}$: الطالبان هما A و C، أمّا ترتيب D و E و B فهو خطأ. ولا يمكن أن يكون ترتيب الطالب E هو 5 بناءً على التعليق على التكهّن الأوّل، فلا بُدّ أن يكون ترتيب E هو 1، ولأنّ ترتيب B خطأ وجب أن يكون الترتيب الصحيح في هذه الحالة $\underset{1}{\boldsymbol{E}}\underset{2}{\boldsymbol{A}}\underset{3}{\boldsymbol{B}}\underset{4}{\boldsymbol{C}}\underset{5}{\boldsymbol{D}}$ ولكنّ هذا الترتيب يتعارض مع التعليق على التكهّن الأوّل لأنّ ترتيبَي C و D متتاليان وبالترتيب الوارد في التكهّن الأوّل. فهذه الحالة خطأ.

7. $\underset{1}{D}\underset{2}{\boldsymbol{A}}\underset{3}{E}\underset{4}{C}\underset{5}{\boldsymbol{B}}$: الطالبان هما A و B، أمّا ترتيب D و E و C فهو خطأ. ولا يمكن أن يكون ترتيب الطالب D هو 4 بناءً على التعليق على التكهّن الأوّل، فلا بُدّ أن يكون ترتيب D هو 3، ولأنّ ترتيب C خطأ وجب أن يكون الترتيب الصحيح في هذه الحالة $\underset{1}{\boldsymbol{C}}\underset{2}{\boldsymbol{A}}\underset{3}{\boldsymbol{D}}\underset{4}{\boldsymbol{E}}\underset{5}{\boldsymbol{B}}$ ولكنّ هذا الترتيب يتعارض مع النقطة الثانيّة من التكهّن الأوّل، ترتيبَي D و E متتاليان وبالترتيب الوارد في التكهّن الأوّل. فهذه الحالة خطأ.

8. $\underset{1}{D}\underset{2}{A}\underset{3}{\boldsymbol{E}}\underset{4}{\boldsymbol{C}}\underset{5}{B}$: الطالبان هما E و C، أمّا ترتيب D و A و B فهو خطأ. ولا يمكن أن يكون ترتيب الطالب A هو 1 بناءً على التعليق على التكهّن الأوّل، فلا بُدّ أن يكون ترتيب A هو 5، ولا يمكن أن يكون ترتيب B هو 2 للسبب نفسه إذن الترتيب الصحيح في هذه الحالة $\underset{1}{\boldsymbol{B}}\underset{2}{\boldsymbol{D}}\underset{3}{\boldsymbol{E}}\underset{4}{\boldsymbol{C}}\underset{5}{\boldsymbol{A}}$ ولكنّ هذا الترتيب يتعارض مع النقطة الثانيّة من التكهّن الأوّل، ترتيبَي D و E متتاليان وبالترتيب الوارد في التكهّن الأوّل. فهذه الحالة خطأ.

9. $\underset{1}{D}\,\underset{2}{A}\,\underset{3}{\boldsymbol{E}}\,\underset{4}{C}\,\underset{5}{\boldsymbol{B}}$: الطالبان هما E و B، أمّا ترتيب D و A و C فهو خطأ. ولا يمكن أن يكون ترتيب الطالب A هو 1 بناءً على التعليق على التكهّن الأوّل، فلا بُدّ أن يكون ترتيب A هو 4، ولأنّ ترتيب D خطأ، كان الترتيب الصحيح في هذه الحالة $\underset{1}{\boldsymbol{C}}\,\underset{2}{\boldsymbol{D}}\,\underset{3}{\boldsymbol{E}}\,\underset{4}{\boldsymbol{A}}\,\underset{5}{\boldsymbol{B}}$ ولكنّ هذا الترتيب يتعارض مع النقطة الثانيّة من التكهّن الأوّل، ترتيبَي A و B متتاليان وبالترتيب الوارد في التكهّن الأوّل. فهذه الحالة خطأ.

10. $\underset{1}{D}\,\underset{2}{A}\,\underset{3}{E}\,\underset{4}{\boldsymbol{C}}\,\underset{5}{\boldsymbol{B}}$: الطالبان هما B و B، أمّا ترتيب D و A و E فهو خطأ. ولا يمكن أن يكون ترتيب الطالب A هو 1 بناءً على التعليق على التكهّن الأوّل، فلا بُدّ أن يكون ترتيب A هو 3، ولأنّ ترتيب D خطأ، كان الترتيب الصحيح في هذه الحالة $\underset{1}{\boldsymbol{E}}\,\underset{2}{\boldsymbol{D}}\,\underset{3}{\boldsymbol{A}}\,\underset{4}{\boldsymbol{C}}\,\underset{5}{\boldsymbol{B}}$.

هذه بالطبع هي الحالة الأخيرة المتبقيّة، وهي تتفق مع التعليقات على التكهّنين. فهي إذن توافق الترتيب الصحيح لنتائج المسابقة.

أولمبياد الرياضيّات السادس

① 1. أوجد جميع الأعداد الطبيعيّة n التي تُحقّق الخاصّة « 7 يقسم 2^n-1 ».

2. أثبت أنّه لا توجد أعداد الطبيعيّة n تُحقّق الخاصّة « 7 يقسم 2^n+1 ».

لنتأمّل الجدول

r	0	1	2
$2^r \bmod 7$	1	2	4

ليكن n عدداً طبيعيّاً، وليكن r من $\{0,1,2\}$ باقي قسمة n على 3 عندئذ يوجد عددٌ طبيعي q يُحقّق $n=3q+r$. عندئذ

$$2^n \bmod 7 = 8^q 2^r \bmod 7 = 2^r \bmod 7$$

1. فمن جهة أولى، نرى أنّ $2^n \bmod 7 = 1$ إذا وفقط إذا كان $2^r \bmod 7 = 1$ وبالنظر إلى الجدول أعلاه، هذا يُكافئ $r=0$. إذن 7 يقسم 2^n-1 إذا وفقط إذا كان 3 يقسم n. أي $7 \mid (2^n-1) \Leftrightarrow 3 \mid n$.

2. ومن جهة ثانية، أنّ $2^n \bmod 7 = 6$ إذا وفقط إذا كان $2^r \bmod 7 = 6$ وبالنظر إلى الجدول أعلاه، نرى أنّ هذا الأمر مستحيل. فلا توجد أعداد طبيعيّة n تجعل 7 تقسم 2^n+1.

② لتكن a و b و c أطوال أضلاع مثلّث. أثبت أنّ

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

في الحقيقة، هذه المتراجحة صحيحة أيّاً كانت الأعداد a و b و c من $\mathbb{R}_+$. سنبدأ بإثبات صحّة المتراجحة $(\mathcal{E})$ التالية :

$$\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^3, \quad (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$$

لنتأمّل a و b و c من $\mathbb{R}_+$. إنّ مجموع أيِّ اثنين من الأعداد $a+b-c$ و $b+c-a$ و $c+a-b$ عددٌ موجبٌ أو معدومٌ، فإذا كان أحدها سالباً تماماً وجب أن يكون الإثنان الآخران موجبين تماماً، ونتج من ذلك أنّ الطرف الأيسر من المتراجحة السابقة سالبٌ، في حين أنّ طرفها الأيمن موجبٌ، فهي محققة وضوحاً في هذه الحالة.

لنفترض إذن أنّ الأعداد $a+b-c$ و $b+c-a$ و $c+a-b$ موجبة. عندئذ نرى مباشرة أنّ

$$(a+b-c)(b+c-a) = b^2-(a-c)^2 \leq b^2$$
$$(a+b-c)(c+a-b) = a^2-(b-c)^2 \leq a^2$$
$$(c+a-b)(b+c-a) = c^2-(c-a)^2 \leq c^2$$

ولأنّ جميع أطراف المتراجحات السابقة موجبة، استنتجنا بحساب جداء ضربها طرفاً بطرف، ثُمّ أخذ الجذر التربيعي أنّ

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$$

(مع مساواة إذا وفقط إذا كان $a=b=c$). وهي المتراجحة $(\mathcal{E})$. ولكن نجد بحساب مباشر أنّ

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = \left(b^2-a^2-c^2+2ac\right)(c+a-b)$$
$$= b^2(c+a-b)+a^2(b+c-a)+c^2(a+b-c)-2acb$$

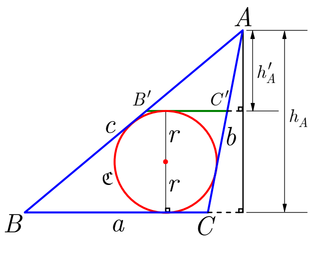
فالمتراجحة $(\mathcal{E})$ تُكافئ

$$b^2(c+a-b)+a^2(b+c-a)+c^2(a+b-c) \leq 3acb$$

وهي المتراجحة المرجوّة. ◼

③ **نتأمّل مثلّثاً ABC أطوال أضلاعه a و b و c. نرسم المماسات للدائرة المماسّة لأضلاع المثلّث داخلاً والتي توازي أضلاعه. يؤلّف كلُّ مماسّ مع الضلعين الآخرين مثلّثاً ننشئ فيه دائرة تمسّ أضلاعه داخلاً. احسب كامل مساحة الدوائر الأربع.**

لنفترض أنّ r هو نصف قطر الدائرة $\mathfrak{C}$ المماسّة داخلاً لأضلاع المثلّث ABC، ولنفترض أنّ مساحته تساوي $\mathcal{A}$ ونصف محيطه p. عندئذ $\mathcal{A}=pr$.

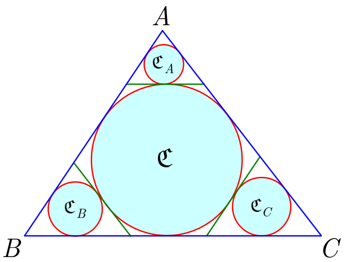


- لنتأمّل حالة المماس $(B'C')$ للدائرة $\mathfrak{C}$ موازياً (BC)، يقطع هذا المماس الضلعين $[AB]$ و $[AC]$ في B' و C' بالترتيب. فيكون المثلّثان $AB'C'$ و ABC متشابهين.

وإذا كان h'_A طول الارتفاع النازل من A في $AB'C'$، وكان h_A طول الارتفاع النازل من A من ABC، كانت نسبة التشابه $k_A = \frac{h'_A}{h_A}$، ولكن $h'_A = h_A - 2r$ إذن

$$k_A = \frac{h_A - 2r}{h_A} = \frac{ah_A - 2ra}{h_A a} = \frac{2\mathcal{A} - 2\mathcal{A}a/p}{2\mathcal{A}} = 1 - \frac{a}{p}$$

- فإذا كانت $\mathcal{A}_\mathfrak{C}$ مساحة الدائرة $\mathfrak{C}$ كانت مساحة الدائرة $\mathfrak{C}_A$ المماسّة لأضلاع المثلّث $AB'C'$ مساوية $\mathcal{A}_{\mathfrak{C}_A} = k_A^2 \mathcal{A}_\mathfrak{C}$.



- ونجد بالمماثَلة أنّ مساحة الدائرة $\mathfrak{C}_B$ تساوي $k_B^2 \mathcal{A}_\mathfrak{C}$ مع $k_B = 1 - b/p$، ومساحة الدائرة $\mathfrak{C}_C$ تساوي $k_C^2 \mathcal{A}_\mathfrak{C}$ مع $k_C = 1 - c/p$.

إذن المساحة المطلوبة $\mathfrak{A} = \mathcal{A}_\mathfrak{C} + \mathcal{A}_{\mathfrak{C}_A} + \mathcal{A}_{\mathfrak{C}_B} + \mathcal{A}_{\mathfrak{C}_C}$ تُعطى بالصيغة

$$\mathfrak{A} = \left(1 + k_A^2 + k_B^2 + k_C^2\right)\mathcal{A}_\mathfrak{C}$$

ولكن

$$\begin{aligned}
1 + k_A^2 + k_B^2 + k_C^2 &= 1 + \left(1 - \frac{a}{p}\right)^2 + \left(1 - \frac{b}{p}\right)^2 + \left(1 - \frac{c}{p}\right)^2 \\
&= 4 - 2\frac{a+b+c}{p} + \frac{a^2+b^2+c^2}{p^2} \\
&= \frac{a^2+b^2+c^2}{p^2}
\end{aligned}$$

ومن جهة ثانية : $\mathcal{A}_\mathfrak{C} = \pi r^2 = \pi \mathcal{A}^2/p^2$ إذن $\mathfrak{A} = \pi\left(a^2+b^2+c^2\right)\mathcal{A}^2/p^4$.

وإذا استخدمنا علاقة Heron التي تُعبّر عن مساحة المثلّث بدلالة أضلاعه، وجدنا بعد الإصلاح

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \pi\frac{a^2+b^2+c^2}{p^4}\, p(p-a)(p-b)(p-c) \\
&= \pi\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{(a+b+c)^3} \\
&= \pi\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3 - 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^4+b^4+c^4\right)}{(a+b+c)^4}
\end{aligned}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

④ **في نادي مُراسلة، يجري توزيع الأعضاء في فِرَق وفق الموضوعات التي يرغبون التراسل حولها. كانت إحدى هذه الفِرَق مكوّنة من 17 شخصاً، وقد اتفق كلٌّ اثنين منهم على تبادل الرسائل في واحدٍ من ثلاث موضوعات مُختارة في هذه الفرقة. أثبت أنّه يوجد في هذه الفرقة ثلاثة أشخاص يتراسلون حول الموضوع نفسه. صياغة رياضيّاتية : نتأمّل بياناً تامّاً K_{17} فيه 17 رأساً، يجري تلوين كلِّ واحدٍ من حروفه بواحدٍ من ثلاثة ألوان ممكنة. أثبت وجود مثلّث تحمل أضلاعه اللون نفسه.**

ليكن A أحد أعضاء الفرقة. إنّه يراسل كلَّ واحد من الستة عشر عضواً الباقين حول أحد الموضوعات الثلاثة، فهو إذن يتبادل الرسائل مع ستة منهم في موضوعٍ واحدٍ وليكن S_1.

- فإذا كان عضوان من هؤلاء الأعضاء الستة يتبادلان الرسائل في الموضوع S_1 نفسه، كوّنا مع A مجموعة من ثلاثة أشخاص يتراسلون في الموضوع S_1، وتحقّقت الخاصّة المطلوبة.
- وإلاّ كان كلُّ عضوين من بين هؤلاء الأعضاء الستة يتبادلان الرسائل في أحد الموضوعين المتبقيين. ليكن B واحداً من هؤلاء الأعضاء. ولأنّه يراسل كلَّ واحد من الخمسة الباقين حول أحد الموضوعين المتبقيين، فهو إذن يتبادل الرسائل مع ثلاثة منهم في موضوعٍ واحدٍ وليكن S_2.
  - فإذا كان عضوان من هؤلاء الثلاثة يتبادلان الرسائل في الموضوع S_2 نفسه، كوّنا مع B مجموعة من ثلاثة أشخاص يتراسلون في الموضوع S_2 ، وتحقّقت الخاصّة المطلوبة.
  - وإلاّ كان كلّ اثنين من هؤلاء الثلاثة يتبادلان الرسائل في الموضوع الثالث، وتحقّقت الخاصّة المطلوبة في هذه الحالة أيضاً. ■

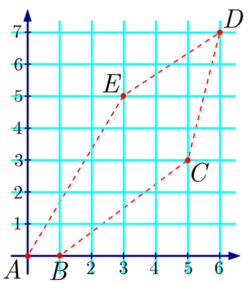
⑤ **نتأمّل خمس نقاط في المستوي. نفترض أنّ أيّ مستقيمين مارّين بزوجين من هذه النقاط ليسا منطبقين، وليسا متوازيين، وليسا متعامدين. نُنشئ من كلِّ واحدة من هذه النقاط المستقيمات العموديّة على كلٍّ من المستقيمات المارّة بنقطتين من النقاط الأربع الأخرى، أوجد حدّاً أعلى لعدد نقاط التقاطع بين هذه المستقيمات. كلّما كان هذا الحدّ أصغر كلّما كانت النتيجة أفضل.**

سنثبتُ أنّ 315 هو حدٌّ أعلى لعدد نقاط التقاطع هذه. من كلِّ واحدة من النقاط الخمس يمرّ ستة من المستقيمات تعيِّنها النقاط الأربع الأخرى (إذ إنّ أربع نقاط تعيِّن ستة مستقيمات $C_4^2 = 6$). فالعدد الكلّي لهذه المستقيمات التي ندرس تقاطعاتها يساوي $30 = 5 \times 6$، وكلُّ مستقيمين يعيِّنان بوجه عام نقطة تقاطع على الأكثر، فعدد نقاط التقاطع، من حيث المبدأ، أصغر أو يساوي $435 = \frac{30\times29}{2} = C_{30}^2$. ولكن

- من كلِّ نقطة من النقاط الخمس يمرُ ستة مستقيمات، فهذه المستقيمات لا تساهم بعددٍ يساوي $15 = C_6^2$ نقطةَ تقاطعٍ، كما ذكرنا سابقاً، بل تساهم بنقطة واحدة. إذن يجب حذف 14 نقطةَ تقاطعٍ مُفترضةٍ في تعدادنا الأوّلي مقابل كلِّ نقطة من النقاط الخمس، وهكذا ينخفض الحدُّ الأعلى لعدد نقاط التقاطع ليُصبح $365 = 435 - 5 \times 14$.

- في حالة نقطتين من النقاط الخمس، تكون المستقيمات العموديّة على المستقيم المار بهما والمنبعثة من النقاط الثلاث الأخرى متوازيّة، فهي لا تساهم بأيّة نقطة تقاطع، (وليس بثلاث نقاط تقاطع كما افترضنا في تعدادنا الأوّلي) إذن يجب حذف ثلاث نقاط مُفترضة في تعدادنا السابق مقابل كلِّ زوج من النقاط الخمس. فينخفض الحدُّ الأعلى لعدد نقاط التقاطع ليُصبح $335 = 365 - 3C_5^2$.

- في حالة ثلاث نقاط من النقاط الخمس، تتقاطع المستقيمات المنبعثة من أحدها عموديّة على المستقيم المار بالنقطتين الأخريين في نقطة واحدة (لأنّها ارتفاعاتٌ في مثلّث) فهي تساهم بنقطة تقاطع واحدة، ، (وليس بثلاث نقاط تقاطع كما افترضنا في تعدادنا الأوّلي) إذن يجب حذف نقطتين مُفترضتين في تعدادنا السابق مقابل كلِّ ثلاث من النقاط الخمس. فينخفض الحدُّ الأعلى لعدد نقاط التقاطع ليُصبح $315 = 335 - 2C_5^3$.



حتّى نتيقّن من كون هذا الحدُّ الأعلى هو أصغر ما يمكن، علينا إعطاء مثالٍ على توضُّعٍ للنقاط الخمس في المستوي نحصل فيه على 315 نقطة تقاطع. لقد وجدنا المثال التالي بمساعدة الحاسوب :

$A(0,0)$ و $B(0,1)$ و $C(5,3)$ و $D(6,7)$ و $E(3,5)$

ونتمنّى للقارئ الصبور التوفيق في التيقّن من أنّ عدد نقاط تقاطع المستقيمات المُنشأة كما في النص يساوي 315 نقطة. أمّا أنا فقد تركتُ المهمّة للحاسوب. ■

⑥ **نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. ولتكن D_0 مركز ثقل الوجه ABC . تتقاطع المستقيمات المرسومة من الرؤوس A و B و C موازية للمستقيم (DD_0) مع المستويات (BCD) و CAD و ABD في النقاط A_0 و B_0 و C_0 بالترتيب. أثبت أنّ حجم $ABCD$ يساوي ثُلث حجم $A_0B_0C_0D_0$. أَتبقى النتيجة صحيحة إذا كانت D_0 نقطة ما واقعة داخل الوجه ABC؟**

في الحقيقة، لنتأمّل نقطة D_0 ما من المستوي (ABC) ولنفترض أنها لا تقع على أيٍّ من المستقيمات (AB) أو (BC) أو (CA). عندئذ توجد أعدادٌ (α,β,γ) من $(\mathbb{R}^*)^3$ تُحقّق $\alpha+\beta+\gamma=1$ وتكون D_0 مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المُثقّلة (A,α)، و (B,β) و (C,γ). أي

$$\forall M,\quad \overrightarrow{MD_0}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$$

وبوجه خاص

$$\overrightarrow{DD_0}=\alpha\overrightarrow{DA}+\beta\overrightarrow{DB}+\gamma\overrightarrow{DC}\qquad(1)$$

- النقطة A_0 تنتمي إلى المستوي (BCD)، إذن توجد أعدد حقيقيّة (λ,μ,ν) من $\mathbb{R}^3$ تُحقّق $\lambda+\mu+\nu=1$ وتكون A_0 مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (B,λ) و (C,μ) و (D,ν) أي

$$\forall M,\quad \overrightarrow{MA_0}=\lambda\overrightarrow{MB}+\mu\overrightarrow{MC}+\nu\overrightarrow{MD}$$

وبوجه خاص

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA_0}&=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}+\nu\overrightarrow{AD}\\&=\lambda\overrightarrow{DB}-\lambda\overrightarrow{DA}+\mu\overrightarrow{DC}-\mu\overrightarrow{DA}-\nu\overrightarrow{DA}\\&=-\overrightarrow{DA}+\lambda\overrightarrow{DB}+\mu\overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

و لمّا كان الشعاعان $\overrightarrow{AA_0}$ و $\overrightarrow{DD_0}$ متسايرين، استنتجنا من العلاقة (1)، ومن كون الأشعّة $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$ مستقلّة خطيّاً، أنّ $\dfrac{-1}{\alpha}=\dfrac{\lambda}{\beta}=\dfrac{\mu}{\gamma}$، ومن ثَمّ

$$\lambda=-\frac{\beta}{\alpha},\ \mu=-\frac{\gamma}{\alpha},\ \nu=-\frac{1}{\alpha}$$

وأخيراً نجد $\overrightarrow{AA_0}=-\dfrac{1}{\alpha}\overrightarrow{DD_0}$.

- وبحسابٍ مماثلٍ لما سبق نجد أنّ

$$\overrightarrow{CC_0} = -\frac{1}{\gamma}\overrightarrow{DD_0} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{BB_0} = -\frac{1}{\beta}\overrightarrow{DD_0}$$

- نستنتج إذن أنّ

$$\begin{aligned}\overrightarrow{D_0A_0} &= -\overrightarrow{DD_0} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA_0} = \overrightarrow{DA} - \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\overrightarrow{DD_0}\\ &= \overrightarrow{DA} - \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DB} + \gamma\overrightarrow{DC}\right)\\ &= -\left(\alpha\overrightarrow{DA} + \beta\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\overrightarrow{DB} + \gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\overrightarrow{DC}\right)\end{aligned}$$

وبالمُماثلة

$$\overrightarrow{D_0B_0} = -\left(\alpha\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DB} + \gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\overrightarrow{DC}\right)$$

و

$$\overrightarrow{D_0C_0} = -\left(\alpha\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\overrightarrow{DA} + \beta\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\overrightarrow{DB} + \gamma\overrightarrow{DC}\right)$$

وأخيراً نرى أنّ $\overrightarrow{D_0A_0} \wedge \overrightarrow{D_0B_0}$ يُعطى بالصيغة

$$-(\alpha+\beta+1)\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DB} - \gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DC} + \gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{D_0A_0}\wedge\overrightarrow{D_0B_0}\right)\cdot\overrightarrow{D_0C_0} &= -(2+\alpha+\gamma+\beta)\left(\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{DC}\\ &= -3\left(\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(ABCD) &= \tfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{DC}\right|\\ \operatorname{vol}(A_0B_0C_0D_0) &= \tfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{D_0A_0}\wedge\overrightarrow{D_0B_0}\right)\cdot\overrightarrow{D_0C_0}\right|\end{aligned}$$

إذن $\operatorname{vol}(A_0B_0C_0D_0) = 3\operatorname{vol}(ABCD)$.

أولمبياد الرياضيّات السابع

① **أوجد قيم x من المجال $[0,2\pi]$ التي تُحقّق المتراجحة**

$$2\cos x \leq \left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right| \leq \sqrt{2}$$

لنلاحظ أنّ $(\cos x \pm \sin x)^2 = 1 \pm \sin 2x$ وعليه

$$\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right| = \Big||\cos x+\sin x|-|\cos x-\sin x|\Big|$$

ولكن، بوجه عام، لدينا

$$||a+b|-|a-b|| = 2\min(|a|,|b|)$$

إذن تُكافئ المتراجحةُ المعطاة المتراجحةَ

$$\cos x \leq \min\Big(\big|\cos x\big|,\big|\sin x\big|\Big) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

المتراجحة اليمنى محقّقة دوماً، أمّا المتراجحة اليسرى فهي تُكافئ $\cos x \leq |\sin x|$، فمجموعة قيم x التي تُحقّق المتراجحة هي تلك التي تُحقّق $\cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$، أي $[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$.

② **تُحقّق الأمثال $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ في جملة المعادلات الخطيّة التالية**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

الخواصّ التالية : ❶ الأعداد a_{11} و a_{22} و a_{33} موجبة تماماً، ❷ الأمثال a_{ij} في حالة $i \neq j$ سالبة تماماً، ❸ مجموع أمثال كلِّ معادلة موجبٌ تماماً. أثبت أنّ الحلّ الوحيد للجملة هو $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

ليكن (x_1,x_2,x_3) عنصراً من $\mathbb{R}^3$ مختلفاً عن $(0,0,0)$. ولنفترض مثلاً أنّ

$$|x_k| = \max(|x_1|,|x_2|,|x_3|) > 0$$

وليكن $\{i,j\} = \{1,2,3\}\backslash\{k\}$ عندئذ يكون لدينا

$$|a_{kk}x_k| \leq \left|a_{ki}x_i + a_{kj}x_j\right| + \left|a_{ki}x_i + a_{kk}x_k + a_{kj}x_j\right|$$

ومنه، بالاستفادة من ❶ ومن متراجحة المثلّث نجد

$$a_{kk}|x_k| \leq |a_{ki}||x_i| + \left|a_{kj}\right|\left|x_j\right| + |a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3|$$

وإذا استفدنا من تعريف $|x_k|$ ومن ❷ وجدنا

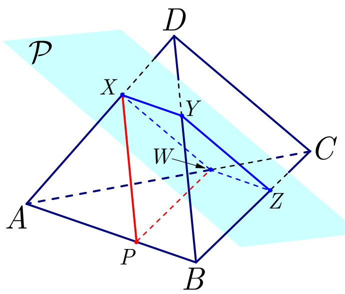
$$a_{kk}|x_k| \leq -a_{ki}|x_k| - a_{kj}|x_k| + |a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3|$$

أو

$$(a_{k1} + a_{k2} + a_{k3})|x_k| \leq |a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3|$$

واعتماداً على ❸ هذا يقتضي أنّ $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 \neq 0$. فلا يمكن أن يكون (x_1, x_2, x_3) حلاً للجملة المدروسة. وهكذا يتمّ إثبات الخاصّة المرجوّة. ■

③ **نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. ونتأمّل مستوياً $\mathcal{P}$ يوازي المستقيمين (AB) و (CD) ويقسم رباعي الوجوه إلى جزأين. إذا افترضنا أنّ بُعد $\mathcal{P}$ عن (AB) يساوي k مرّةً بُعد $\mathcal{P}$ عن (CD)، فاحسب نسبة حجمَي الجزأين.**



لنفترض أنّ المستوي $\mathcal{P}$ يقطع المستقيمات الأضلاع $[AD]$ و $[DB]$ و $[BC]$ و $[AC]$ بالنقاط X و Y و Z و W بالترتيب. نتأمّل المستوي الذي يحوي (XW) والموازي للمستوي (BCD) ، يتقاطع هذا المستوي مع (AB) بالنقطة P.

لمّا كان بُعد $\mathcal{P}$ عن المستقيم (AB) يساوي k مرّةً بُعد $\mathcal{P}$ عن المستقيم (CD)، استنتجنا أنّ $AX = kXD$. ومن ثَمّ $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AD}$ وقد عرّفنا $\lambda = \dfrac{k}{k+1}$.

إنّ $(XY) \parallel (AB)$ ، فالمثلّثان DXY و DAB متشابهان، ومنه

$$\overrightarrow{BY} = \lambda\overrightarrow{BD} \qquad (1)$$

وكذلك لدينا $(YZ) \parallel (DC)$ ، فالمثلّثان BZY و BCD متشابهان، ومنه

$$\overrightarrow{BZ} = \lambda\overrightarrow{BC} \qquad (2)$$

ولأنّ $(XP) \parallel (DB)$ ، كان المثلّثان APX و ABD متشابهين، ومنه

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} \qquad (3)$$

وأخيراً، لأنّ $(XW) \parallel (DC)$ استنتجنا تشابه المثلّثين AXW و ADC ، ومنه

$$\overrightarrow{AW} = \lambda\overrightarrow{AC} \qquad (4)$$

لنعرّف V_{AB} بأنّه حجم المجسّم $ABXYZW$. عندئذ نلاحظ مباشرة أنّ

$$V_{AB} = \operatorname{vol}(APXW) + \operatorname{vol}(PXWBYZ)$$

- من جهة أولى، نستنتج من كون $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AD}$ ومن (3) و (4) ما يلي :

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(APXW) &= \frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AW},\overrightarrow{AX}\right)\right|\\ &= \frac{1}{6}\lambda^3\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|\\ &= \lambda^3\operatorname{vol}(ABCD)\end{aligned}$$

- ومن جهة ثانية، حجم الموشور $PXWBYZ$ يُعطى بالصيغة

$$\operatorname{vol}(PXWBYZ) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{BZ},\overrightarrow{BY},\overrightarrow{BP}\right)\right|$$

ولكن من (3) نجد $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = (\lambda-1)\overrightarrow{AB}$ فإذا استفدنا من (1) و (2) استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(PXWBYZ) &= \frac{1}{2}\left|\det\left(\lambda\overrightarrow{BC},\lambda\overrightarrow{BD},(\lambda-1)\overrightarrow{BA}\right)\right|\\ &= \frac{1}{2}\lambda^2(1-\lambda)\left|\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}\right)\right|\\ &= 3\lambda^2(1-\lambda)\operatorname{vol}(ABCD)\end{aligned}$$

وهكذا نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}V_{AB} &= \lambda^3\operatorname{vol}(ABCD) + 3\lambda^2(1-\lambda)\operatorname{vol}(ABCD)\\ &= \lambda^2(3-2\lambda)\operatorname{vol}(ABCD)\end{aligned}$$

وإذا عرّفنا بأسلوب مماثل V_{CD} بأنّه حجم المجسّم $CDXYZW$. عندئذ نلاحظ مباشرة أنّ

$$\begin{aligned}V_{CD} &= \operatorname{vol}(ABCD) - V_{AB}\\ &= \left(2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 1\right)\operatorname{vol}(ABCD)\\ &= (\lambda-1)^2(2\lambda+1)\operatorname{vol}(ABCD)\end{aligned}$$

وعليه

$$\frac{V_{AB}}{V_{CD}} = \frac{\lambda^2(3-2\lambda)}{(\lambda-1)^2(2\lambda+1)} = \frac{k^2(k+3)}{3k+1}$$

وهي النسبة المطلوبة. ■

④ أوجد عناصر $\mathbb{R}^4$ التي تُحقّق أنّ مجموع كلٍّ من مركّباتها مع جداء ضرب المركّبات الثلاث الأخرى يساوي 2.

ليكن $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ عنصراً من $\mathbb{R}^4$، يُحقّق الخاصّة المرجوّة. أي

$$\begin{aligned} x_1 + x_2x_3x_4 &= 2, & x_2 + x_3x_4x_1 &= 2 \\ x_3 + x_4x_1x_2 &= 2, & x_4 + x_1x_2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

لنضع $\lambda = x_1x_2x_3x_4$ ولنلاحظ أنّ λ لا يمكن أن يساوي 0، ثُمّ لنعرّف كثير الحدود $P(x) = x^2 - 2x + \lambda$. عندئذ نستنتج من المعادلات السابقة أنّ

$$\forall i \in \{1,2,3,4\}, \quad P(x_i) = 0$$

ولأنّ P من الدرجة الثانية، نرى أنّ عدد عناصر المجموعة $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ يساوي 1 أو 2.

لنناقش إذن هاتين الحالتين :

- حالة $\operatorname{card}(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) = 1$. أي $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = a$ مع $a + a^3 = 2$، وهذا يُكافئ $(a-1)(a^2+a+2) = 0$ أو $a = 1$. أي $X = (1,1,1,1)$. وهذا، في الحقيقة، حلٌّ واضحٌ للمسألة.
- حالة $\operatorname{card}(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) = 2$. يوجدُ عددان حقيقيّان $a < b$ يُحقّقان $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{a, b\}$. إذن $P(x) = (x-a)(x-b)$، ومنه نستنتج أنّ $ab = \lambda$ و $a + b = 2$.

يمكننا بعد إعادة ترتيب مركّبات X أن نفترض مثلاً أنّ $x_1 = a$ و $x_2 = b$. فإذا كان $\{x_3, x_4\} = \{a, b\}$ استنتجنا أنّ $x_3x_4 = \lambda$ ومن ثَمّ

$$\lambda = x_1x_2x_3x_4 = \lambda^2$$

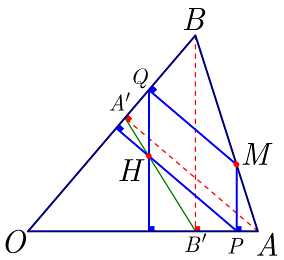
ومنه $\lambda = 1$، ولكنّ هذا يقتضي $a = b = 1$، ويتناقض مع الفرْض.

إذن لا بُدّ أن يكون $x_3 = x_4 \in \{x_1, x_2\}$. ومن تعريف λ نستنتج أنّ $x_3^2 = 1$، فإذا كان $x_3 = 1$ استنتجنا من كون مجموع جذرَي P يساوي 2 أنّ $x_i = 1$ أيّاً كانت قيمة i، وهذا خُلفٌ. وعليه، يجب أن يكون $x_3 = -1$، وأن يكون الجذر الأخر 3، ومنه $X = (-1, 3, -1, -1)$، وبالعكس، نرى مباشرة أنّ هذا حلّ للمسألة.

فالحلول هي العناصر $(3, -1, -1, -1)$ و $(-1, 3, -1, -1)$ و $(-1, -1, 3, -1)$ و $(-1, -1, -1, 3)$ و أخيراً $(1,1,1,1)$ من $\mathbb{R}^4$. ■

⑤ **نتأمّل مثلّثاً OAB فيه O زاوية حادّة. ولتكن M نقطة ما على $[AB]$. ليكن P و Q المسقطين القائمين للنقطة M على المستقيمين (OA) و (OB) بالترتيب. أوجد المحلّ الهندسي للنقطة H، نقطة التقاء ارتفاعات المثلّث OPQ؟ ثُمّ عيِّن هذا المحلّ عندما تتحوّل M داخل المثلّث OAB.**

لتكن M من $[AB]$. عندئذ توجد t من $[0,1]$، تُحقّق



$$\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} \qquad (1)$$

لمّا كان $(QH) \parallel (MP)$ و $(PH) \parallel (MQ)$ كان الرباعي $PMQH$ متوازي أضلاع، ونتج من ذلك أنّ $\overrightarrow{QH} = \overrightarrow{MP}$، وهذا يقتضي أنّ

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OM} \qquad (2)$$

ليكن B' موقع الارتفاع النازل من B، وليكن A' موقع الارتفاع النازل من A. بإسقاط (1) على المستقيم (OA) نجد

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB'} \qquad (3)$$

وبإسقاطها على المستقيم (OB) نجد

$$\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OA'} + (1-t)\overrightarrow{OB} \qquad (4)$$

ونستنتج من العلاقات الأربع السابقة أنّ

$$\overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB'} + t\overrightarrow{OA'} + (1-t)\overrightarrow{OB} - \left(t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}\right)$$

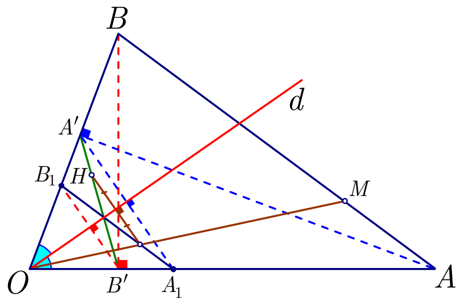
أي

$$\overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{OA'} + (1-t)\overrightarrow{OB'} \qquad (5)$$

وهذا يبرهن على أنّه عندما تتحوّل M على $[AB]$، (أي تتحوّل t في $[0,1]$)، ترسم H القطعة المستقيمة $[A'B']$.

لنتمعّن في التحويل الذي يقرن النقطة M بالنقطة H. نضع $k = \cos(\widehat{AOB})$، ثُمّ نعرّف النقطتين A_1 و B_1 بالصيغتين $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB}$ فيكون الشعاعان $\overrightarrow{OA_1}$ و $\overrightarrow{OB_1}$، بالترتيب، صورتَي $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ وفق التحاكي $h = \mathcal{H}_{O,k}$.

ومن جهة أخرى، لمّا كان $OB' = OB_1$ و $OA' = OA_1$ استنتجنا أنّ $\overrightarrow{OA'}$ و $\overrightarrow{OB'}$، بالترتيب، هما صورتا $\overrightarrow{OA_1}$ و $\overrightarrow{OB_1}$ وفق التناظر القائم $s = \mathcal{S}_d$ بالنسبة إلى المستقيم d منصفّ الزاوية $\widehat{AOB}$.



فإذا عرّفنا التحويل الهندسي الخطّي $\Lambda = s \circ h$، كان لدينا

$$\overrightarrow{OA'} = \Lambda(\overrightarrow{OA}) \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OB'} = \Lambda(\overrightarrow{OB})$$

وهكذا نستنتج من العلاقة (5)، أنّ

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= t\Lambda(\overrightarrow{OA}) + (1-t)\Lambda(\overrightarrow{OB})\\ &= \Lambda(t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}) = \Lambda(\overrightarrow{OM})\end{aligned}$$

فالتحويل الهندسي $H \overset{\lambda}{\mapsto} M$ تحويلٌ أفّني مؤلّف من التحاكي الذي مركزه O ونسبته k متبوعٌ بالتناظر القائم بالنسبة إلى منصّف الزاوية $\widehat{AOB}$. وكلُّ تحويل أفّني يُحافظ على مراكز الأبعاد المتناسبة، فإذا رسمت النقطة M المثلّث OAB، رسمت صورتها $H = \lambda(M)$ المثلّث الذي رؤوسه النقاط $h(O)$ و $h(A)$ و $h(B)$، أي المثلّث $OA'B'$. ◼

⑥ ليكن n عدداً طبيعيّاً أكبر تماماً من 2. نتأمّل مجموعة نقاط $\mathcal{P} = \{A_i : 1 \le i \le n\}$ في المستوي عدد عناصرها يساوي n. ونعرّف قطرها بأنّه العدد

$$\delta = \max\{A_iA_j : 1 \le i < j \le n\} = \operatorname{diam}(\mathcal{P})$$

أثبت أنّ عدد القطع المستقيمة $[A_iA_j]$ التي طولها يساوي δ أصغر أو يساوي n.

الفكرة الأساس هي الخاصّة التالية التي سنؤجّل إثباتها.

مبرهنة : لنتأمّل قطعتين مستقيمتين غير متقاطعتين طول كلٍّ منهما يساوي d، عندئذ أحد طرفَي القطعة الأولى يبعُد عن أحد طرفَي الثانية مسافة أكبر تماماً من d.

الخاصّة المطلوبة صحيحة وضوحاً في حالة $n = 3$.

لنفترض أنها ليست صحيحة بوجهٍ عام، ولنتأمّل n_0، **أصغر** عدد طبيعي لا تكون عنده الخاصّة صحيحة، فيكون $n_0 \geq 4$. توجد إذن مجموعة $\mathcal{P}$ مؤلّفة من n_0 نقطة من نقاط المستوي، وتوجد مجموعة $\mathcal{S}$ مؤلّفة من n_0+1 قطعة مستقيمة أطرافها من نقاط $\mathcal{P}$، وطول كلٍّ منها يساوي $\delta = \operatorname{diam}(\mathcal{P})$ أي طول أطول القطع المستقيمة التي ينتمي طرفاها إلى $\mathcal{P}$.

❶ إنّ كلّ نقطة من $\mathcal{P}$ هي طرفٌ لقطعة مستقيمة من $\mathcal{S}$.

لأنّه إذا وجدت نقطة A من $\mathcal{P}$ ليست طرفاً لأي قطعة مستقيمة من $\mathcal{S}$، وجدنا المجموعة $\mathcal{P}' = \mathcal{P}\backslash\{A\}$ التي عدد عناصرها $n_0 - 1$، والمجموعة $\mathcal{S}$ المؤلّفة من n_0+1 قطعة مستقيمة أطرافها من نقاط $\mathcal{P}'$، وطول كلٍّ منها δ. وهذا يناقض تعريف n_0.

❷ لا توجد نقطة في $\mathcal{P}$ تكون طرفاً لقطعة مستقيمة واحدة فقط من $\mathcal{S}$.

لأنّه إذا وجدت A في $\mathcal{P}$ وكانت طرفاً لقطعة مستقيمة وحيدة $[AB]$ من المجموعة $\mathcal{S}$، وجدنا المجموعة $\mathcal{P}' = \mathcal{P}\backslash\{A\}$ التي عدد عناصرها $n_0 - 1$، والمجموعة $\mathcal{S}\backslash\{[AB]\}$ المؤلّفة من n_0 قطعة مستقيمة أطرافها من نقاط $\mathcal{P}'$، وطول كلٍّ منها δ. وهذا من جديد يناقض تعريف n_0.

❸ لا يُمكن أن تكون كلُّ نقطة من $\mathcal{P}$ طرفاً في قطعتين مستقيمتين من $\mathcal{S}$ وفقط قطعتين.

لأنّه إذا افترضنا أنّ هذا ممكنٌ، تأمّلنا نقطة A_2 من $\mathcal{P}$ والقطعتين المستقيمتين $[A_1A_2]$ و $[A_2A_3]$ من $\mathcal{S}$ اللتين تقبلان A_2 طرفاً. ثُمّ عرّفنا المتتالية $(A_m)_{m\geq 1}$ من النقاط لتُحقّق الشرطين التاليين:

- مهما تكن m، فالنقطة A_m هي نقطة من $\mathcal{P}$.
- مهما تكن m، فالقطعة المستقيمة $[A_mA_{m+1}]$ تنتمي إلى $\mathcal{S}$.

في الحقيقة، لقد عرّفنا A_1 و A_2 و A_3. لنفترض أننا عرّفنا $(A_k)_{1\leq k\leq m}$ بأسلوب يُحقق الشرطين السابقين. مع $m \geq 3$، عندئذ تكون النقطة A_{m+1} الطرف الآخر للقطعة المستقيمة الوحيدة من $\mathcal{S}\backslash\{[A_{m-1}A_m]\}$ التي أحد طرفيها A_m.

بالطبع، لا يمكن أن تكون جميع النقاط $(A_j)_{1\leq j\leq n_0+1}$ مختلفة، فلا بُدّ أن نجد دليلين k و ℓ يُحقّقان $1 \leq k < \ell \leq n_0+1$ و $A_k = A_\ell$. وبناءً على أسلوب إنشاء متتالية النقاط لابُدّ أن يكون $k+1 \neq \ell$ أي $k+2 \leq \ell$.

إذا كانت $k > 1$ ، كانت القطع المستقيمة $[A_k, A_{k+1}]$ و $[A_{k-1}, A_k]$ و $[A_{\ell-1}, A_\ell]$، ثلاث قطع مستقيمة من $\mathcal{S}$ تقبل النقطة A_k طرفاً، وهذا يتناقض مع الفرْض. إذن $k = 1$.
نتأمّل إذن المجموعتين :

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} \backslash \{A_1, A_2, \ldots, A_{\ell-1}\}$$

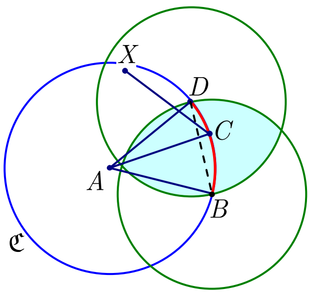
و
$$\mathcal{S}' = \mathcal{S} \backslash \{[A_1A_2], [A_2A_3], \ldots, [A_{\ell-1}, A_1]\}$$

المجموعة $\mathcal{S}'$ مؤلّفة من $n_0 - \ell + 2$ قطعةً مستقيمةً أطرافها من نقاط $\mathcal{P}'$، فهي تحوي عنصراً واحداً على الأقلّ، وإذا استفدنا من الفرْض، استنتجنا أنّ فيها ثلاث قطع مستقيمة على الأقل، فيوجد في $\mathcal{P}'$ ثلاثة عناصر على الأقل، ومنه $\operatorname{card}(\mathcal{P}') = n_0 - \ell + 1 \geq 3$، وطول كلِّ قطعة مستقيمة من $\mathcal{S}'$ يساوي δ . وهذا يتناقض مع تعريف n_0 .

❹ لا بُدّ إذن أن نجد في $\mathcal{P}$ أربع نقاط A و B و C و D تُحقّق

$$\{[AB], [AC], [AD]\} \subset \mathcal{S}$$

نفترض، دون الإخلال بعموميّة الحل، أنّ $BD \geq \max(BC, CD)$.



- نلاحظ من جهة أولى أنّ المتراجحة $BD \leq \delta$ تقتضي $\widehat{BAD} \leq \frac{\pi}{3}$، ليكن $\widehat{BD}$ القوس من الدائرة $\mathfrak{C}$، التي مركزها A ونصف قطرها δ، والذي يُقابل الزاوية $\widehat{BAD}$. عندئذ يكون $C \in \widehat{BD}$، لأنّه بناءً على المتراجحة $BD \geq \max(BC, CD)$ يكون

$$\widehat{BD} = \mathfrak{C} \cap \overline{\mathbb{D}}(B, BD) \cap \overline{\mathbb{D}}(D, BD)$$

و $\overline{\mathbb{D}}(M, r)$ هو القرص المغلق الذي مركزه M ونصف قطره r .

- ولكن اعتماداً على ما أثبتناه في ❷، توجد نقطة X في $\mathcal{P} \backslash \{A\}$، (يمكن أن تكون B أو D ولكن ليس الاثنتين معاًا،) تُحقّق $[CX] \in \mathcal{S}$. ولمّا كان المستقيم (AC) يقسم المستوي إلى نصفَي مستويين أحدهما يحوي $[AB]$ والآخر يحوي $[AD]$، فلا يمكن أن يكون لدينا $[CX] \cap [AB] \neq \varnothing$ و $[CX] \cap [AD] \neq \varnothing$ في آن معاً.
- يمكن أن نفترض مثلاً أنّ $[CX] \cap [AB] = \varnothing$. عندئذ نصل إلى تناقضٍ مع نتيجة المبرهنة التي أشرنا إليها بداية.

إذن أدّى افتراض وجود n لا تتحقّق عندها الخاصّة المرجوّة إلى تناقضٍ. فالخاصّة صحيحة عموماً.

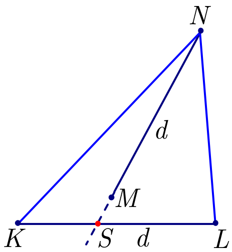
نأتي الآن إلى إثبات المبرهنة.

مبرهنة : لنتأمّل قطعتين مستقيمتين غير متقاطعتين طول كلٍّ منهما يساوي d ، عندئذ أحد طرفَي القطعة الأولى يبعُد عن أحد طرفَي الثانية مسافة أكبر تماماً من d .

الإثبات

نناقش حالتين :

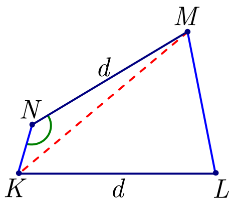
- المستقيم الذي يحمل إحدى القطعتين يقطع القطعة الثانية.



نحن إذن في الوضع المبيَّن في الشكل المجاور. وأحد المثلّثين KSN و LSN مثلّثٌ قائمٌ أو منفرج الزاوية في S ، وفيه الضلع الذي يُقابل هذه الزاوية (أي $[LN]$ أو $[KN]$) أطول من $[SN]$ الذي طوله أكبر تماماً من d .

- المستقيمان اللذان يحملان هاتين القطعتين لا يتقاطعان في نقطة تنتمي إلى إحدى القطعتين.

في هذه الحالة يكون الرباعي المُنشأ على هاتين القطعتين رباعيّاً محدّباً.

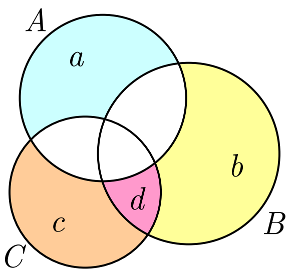


كما في الشكل المجاور.

ولا بُدّ أن تكون إحدى زوايا هذا الرباعي أكبر أو تساوي $\frac{\pi}{2}$ ، إذ إنّ مجموعها يساوي 2π . وعندئذ يكون طول القطر المقابل لهذه الزاوية أكبر تماماً من طولَي الضلعين اللذين يُجاورانها، ولكن طولَ واحدٍ من هذين الضلعين يساوي d بالضرورة، وهذا يُثبتُ الخاصّة المرجوّة. ■

أولمبياد الرياضيّات الثامن

① في مسابقة للرياضيّات طُرِحتْ ثلاث مسائل A و B و C. حلَّ خمسة وعشرون متسابقاً مسألة على الأقل من المسائل المطروحة، ومن بين الّذين لم يحلّوا المسألة A، كان عدد الذين حلّوا المسألة B يساوي ضعفي عدد الذين حلّوا المسألة C. من جهة أخرى، كان عددُ المتسابقين الذين حلّوا فقط المسألة A يزيد واحداً على عدد الذين حلّوا إلى جانب A إحدى المسألتين B أو C. وأخيراً، فإنّ عدد الذين حلّوا المسألة A فقط يساوي مجموع عدد الذين حلّوا المسألة B فقط وعدد الذين حلّوا المسألة C فقط.



لنرمز بالرمز a إلى عدد المتسابقين الذين حلّوا المسألة A فقط، وبالرمز b إلى عدد المتسابقين الذين حلّوا المسألة B فقط، وبالرمز c إلى عدد الذين حلّوا المسألة C فقط، وأخيراً لنرمز بالرمز d إلى عدد المتسابقين الذي حلّوا المسألتين B و C ولم يحلّوا المسألة A.

- « من بين الّذين لم يحلّوا المسألة A، كان عدد الذين حلّوا المسألة B يساوي ضعفي عدد اللذين حلّوا المسألة C. » هذا يعني أنّ $b+d=2(c+d)$ أو

$$d=b-2c \qquad (1)$$

- «عددُ المتسابقين الذين حلّوا فقط المسألة A يزيد واحداً على عدد الذين حلّوا إلى جانب A إحدى المسألتين B أو C. » هذا يعني أنّ $a=1+25-a-b-c-d$ أو

$$2a+b+c+d=26 \qquad (2)$$

- «عدد الذين حلّوا المسألة A فقط يساوي مجموع عدد الذين حلّوا المسألة B فقط وعدد الذين حلّوا المسألة C فقط. » هذا يعني أنّ

$$a=b+c \qquad (3)$$

بتعويض a و d من (1) و (3) في (2) نجد

$$4b+c=26 \qquad (4)$$

نستنتج من ذلك أنّ $c=2 \bmod (4)$. ولأنّ $d \geq 0$ نتج من (1) و (4) أنّ $9c \leq 26$، ومن ثَمّ $c=2$، و $b=6$.

② نتأمّل مثلّثاً ABC فيه $a = BC$ و $b = CA$ و $c = AB$. أثبت أنّ الشرط

$$a+b=\left(a\tan\widehat{A}+b\tan\widehat{B}\right)\tan\left(\widehat{C}/2\right)$$

يقتضي أنّ المثلث ABC متساوي الساقين.

لنلاحظ أنّ

$$\cos\widehat{A}\cos\left(\tfrac{\widehat{C}}{2}\right)-\sin\widehat{A}\sin\left(\tfrac{\widehat{C}}{2}\right)=\cos\left(\widehat{A}+\tfrac{\widehat{C}}{2}\right)=\cos\left(\tfrac{\pi+\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)$$

إذن

$$\cos\widehat{A}\cos\left(\tfrac{\widehat{C}}{2}\right)-\sin\widehat{A}\sin\left(\tfrac{\widehat{C}}{2}\right)=\sin\left(\tfrac{\widehat{B}-\widehat{A}}{2}\right)$$

وبأسلوب مماثل نجد

$$\cos\widehat{B}\cos\left(\tfrac{\widehat{C}}{2}\right)-\sin\widehat{B}\sin\left(\tfrac{\widehat{C}}{2}\right)=\sin\left(\tfrac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)$$

وهكذا إذا عرّفنا

$$\Delta=a+b-\left(a\tan\widehat{A}+b\tan\widehat{B}\right)\tan\left(\tfrac{\widehat{C}}{2}\right)$$

وجدنا باستخدام ما سبق أنّ

$$\Delta=\frac{a\cos\widehat{B}-b\cos\widehat{A}}{\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)}\sin\left(\tfrac{\widehat{B}-\widehat{A}}{2}\right)$$

وإذا رمزنا بالرمز R إلى نصف قطر الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC ولاحظنا أنّ

$$\sin\widehat{A}\cos\widehat{B}-\cos\widehat{A}\sin\widehat{B}=\sin\left(\widehat{A}-\widehat{B}\right)=2\cos\left(\tfrac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)$$

استنتجنا أنّ

$$\Delta=-\frac{4R\cos\left(\frac{\widehat{B}-\widehat{A}}{2}\right)}{\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)}\sin^2\left(\tfrac{\widehat{B}-\widehat{A}}{2}\right)$$

ومن ثَمّ نرى مباشرة أنّ الشرط $\Delta=0$ يقتضي $\widehat{B}=\widehat{A}$ والمثلّث متساوي الساقين. ■

③ ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم. نتأمّل في حالة نقطة M المقدار

$$\varphi(M)=MA+MB+MC+MD$$

أي مجموع أبعاد M عن رؤوس رباعي الوجوه. أثبت أنّ φ يبلغ حدّه الأدنى عند النقطة G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$ وفقط عند G.

التابع φ يأخذ قيمه في $\mathbb{R}_+$، فيوجد α من $\mathbb{R}_+$ يُحقّق $\alpha = \inf\varphi$. نهدف إلى دراسة المجموعة $\mathcal{I} = \{M : \varphi(M) = \alpha = \inf\varphi\}$ التي قد تكون خالية من حيثُ المبدأ.

- إذا كانت O نقطة ثابتة من الفضاء استنتجنا اعتماداً على متراجحة المثلّث أنّ

$$\varphi(M) + \varphi(O) \geq 4MO$$

لأنّ $MX + XO \geq MO$ في حالة X من $\{A, B, C, D\}$. وهذا يعني أنّه إذا كانت M خارج الكرة $\mathcal{B}$ التي مركزها O ونصف قطرها $r = \frac{\alpha+\varphi(O)+1}{4}$ كان $\varphi(M) > \alpha$. وهذا يبرهن على أنّ $\mathcal{I} = \{M : \varphi(M) = \alpha\} \subset \mathcal{B}$.

- ومن جهة أخرى، لمّا كانت الكرة المغلقة المليئة $\overline{B}(O, r)$ مجموعةً متراصّة، وكان φ مستمرّاً، استنتجنا أنّه يبلغ حدّه الأدنى عليها، إذن $\mathcal{I} \neq \varnothing$.

لنذكّر بمتراجحة المثلّث وحالة المساواة فيها. ليكن الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$، عندئذ

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

وتحدث المساواة إذا وفقط إذا كان $\|\vec{u}\|\vec{v} = \|\vec{v}\|\vec{u}$. يمكن صيا غة هذه النتيجة كما يلي :

خاصّة : لتكن Y و X_1 و X_2 ثلاث نقاط من الفراغ، ولنعرّف النقطة X' منتصف القطعة المستقيمة $[X_1X_2]$. عندئذ يكون $2YX' \leq YX_1 + YX_2$ مع مساواة إذا وفقط إذا انتمت النقطة Y إلى المستقيم (X_1X_2) و لم تقع داخل $[X_1X_2]$.

- لنفترض أنّ $\mathcal{I}$ تحوي نقطتين مختلفتين X_1 و X_2 ، ولنعرّف X' منتصف $[X_1X_2]$. عندئذ نستنتج من متراجحة المثلّث التي ذكّرنا بها أعلاه، ومن تعريف α أنّ

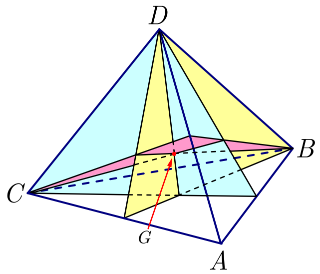
$$2\alpha \leq 2\varphi(X') \leq \varphi(X_1) + \varphi(X_1) = 2\alpha$$

إذن $2YX' = YX_1 + YX_2$ في حالة Y من $\{A, B, C, D\}$، وهذا تناقضٌ لأنّه يقتضي وقوع رؤوس رباعي الوجوه $ABCD$ على المستقيم (X_1X_2) . وعليه تحوي المجموعة $\mathcal{I}$ عنصراً واحداً فقط، وليكن M_0 . أي $\mathcal{I} = \{M_0\}$.

- في حالة رأسين مختلفين X و Y من رؤوس رباعي الوجوه $ABCD$ ، نتأمّل المستوي $\mathcal{P}_{XY}$ الذي يحوي (XY) ويمرّ بمنتصف الضلع المقابل. و S_{XY} التناظر القائم بالنسبة إلى المستوي $\mathcal{P}_{XY}$. عندئذ يكون $S_{XY}(ABCD) = ABCD$ ، ومن ثَمّ

$$\forall M, \ \varphi(S_{XY}(M)) = \varphi(M)$$

فإذا استفدنا من النقطة السابقة استنتجنا أنّ $S_{XY}(M_0) = M_0$ أي $M_0 \in \mathcal{P}_{XY}$.



▪ إذن تنتمي M_0 جميع المستويات التناظريّة ومنها و $\mathcal{P}_{BC}$ و $\mathcal{P}_{BD}$ و $\mathcal{P}_{CD}$، التي تتقاطع في G مركز ثقل رباعي الوجوه. وعليه لا بُدّ أن يكون $G = M_0$. وبذا يتمّ الإثبات.

④ **أثبت أنّه في حالة n من $\mathbb{N}^*$، وعدد حقيقي x يُحقّق $\sin(2^n x) \neq 0$ لدينا**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin(2^k x)} = \cot x - \cot(2^n x)$$

لنلاحظ أوّلاً أنّه في حالة $y \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ لدينا

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin 2y} &= \frac{2\cos^2 y - \cos 2y}{\sin 2y}\\ &= \frac{\cos y}{\sin y} - \frac{\cos 2y}{\sin 2y}\\ &= \cot y - \cot(2y)\end{aligned}$$

ليكن إذن x من $\mathbb{R}$ يُحقّق $\sin(2^n x) \neq 0$. عندئذ في حالة $1 \leq k \leq n$ لا ينتمي العنصر $y = 2^{k-1}x$ إلى $\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ ويمكننا الاستفادة من المساواة السابقة لنكتب

$$\frac{1}{\sin 2^k x} = \cot(2^{k-1}x) - \cot(2^k x)$$

وعليه يكون

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin 2^k x} = \sum_{k=1}^{n}\left(\cot(2^{k-1}x) - \cot(2^k x)\right) = \cot x - \cot(2^n x)$$

وهي المساواة المرجوّة.

⑤ **نتأمّل أربعة أعداد حقيقيّة متباينة a_1 و a_2 و a_3 و a_4. حلّ جملة المعادلات :**

$$|a_i - a_1|x_1 + |a_i - a_2|x_2 + |a_i - a_3|x_2 + |a_i - a_4|x_4 = 1$$

مع i من $\{1, 2, 3, 4\}$.

ليكن التبديل σ على الأعداد $\{1,2,3,4\}$ الذي يُحقّق

$$a_{\sigma(1)} < a_{\sigma(2)} < a_{\sigma(3)} < a_{\sigma(4)}$$

تُكتب الجملة بعد إعادة ترتيب المعادلات بالشكل

$$\sum_{j=1}^{4} \left| a_{\sigma(i)} - a_j \right| x_j = 1, \quad i \in \{1,2,3,4\}$$

وبعد إعادة ترتيب المجاهيل

$$\sum_{j=1}^{4} \left| a_{\sigma(i)} - a_{\sigma(j)} \right| x_{\sigma(j)} = 1, \quad i \in \{1,2,3,4\}$$

فإذا عرّفنا $y_j = x_{\sigma(j)}$ و $b_j = a_{\sigma(j)}$ أخذت الجملة الصيغة التالية

$$\begin{bmatrix} 0 & b_2-b_1 & b_3-b_1 & b_4-b_1 \\ b_2-b_1 & 0 & b_3-b_2 & b_4-b_2 \\ b_3-b_1 & b_3-b_2 & 0 & b_4-b_3 \\ b_4-b_1 & b_4-b_2 & b_4-b_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نجري بالترتيب تحويلات بسيطة التالية :

$$\text{❶} : L_4 \longleftarrow \frac{1}{b_4-b_1}(L_4+L_1)$$

$$\text{❷} : L_3 \longleftarrow \frac{1}{b_3-b_2}(L_3-L_2)$$

$$\text{❸} : L_2 \longleftarrow \frac{1}{b_2-b_1}(L_2-L_1)$$

فنحصل على الجملة المُكافئة التالية :

$$\begin{bmatrix} 0 & b_2-b_1 & b_3-b_1 & b_4-b_1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{b_4-b_1} \end{bmatrix}$$

بجمع المعادلتين الثانية والرابعة نجد $y_1 = \dfrac{1}{b_4-b_1}$ ، وبطرح الثانية من الثالثة نجد $y_2 = 0$.

وعليه تؤول الجملة إلى

$$\begin{bmatrix} b_3-b_1 & b_4-b_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{b_4-b_1} \end{bmatrix}$$

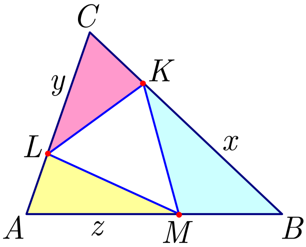
التي تُعطي $y_3 = 0$ و $y_4 = \dfrac{1}{b_4-b_1}$.

وهكذا إذا عرّفنا k و ℓ بالمساواتين

$$a_\ell = \min_{1\le i\le 4} a_i \quad \text{و} \quad a_k = \max_{1\le i\le 4} a_i$$

كان حلّ الجملة كما يلي $x_\ell = x_k = \dfrac{1}{a_k - a_\ell}$، و $x_j = 0$ في حالة $j \notin \{k,\ell\}$. ■

⑥ **نتأمّل مثلّثاً** ABC. **ولتكن** K **و** L **و** M **نقاطاً متوضّعة على الأضلاع** $[BC]$ **و** $[CA]$ **و** $[AB]$ **بالترتيب. أثبت أنّ واحداً على الأقلّ من المثلّثات** AML **أو** BKM **أو** CLK **يتمتّع بمساحة أصغر أو تساوي ربع مساحة** ABC.



لنرمز كالعادة $a = BC$، و $b = CA$، و $c = AB$. ولنضع $x = BK$، و $z = AM$، وأخيراً $y = CL$. ولنكتب بوجهٍ عام $\mathcal{A}(XYZ)$ دلالة على مساحة المثلّث XYZ.

عندئذ نرى مباشرة أنّ

$$\mathcal{A}(AML) = \tfrac{1}{2} z(b-y)\sin\widehat{A} = \frac{z(b-y)}{cb}\mathcal{A}(ABC)$$

$$\mathcal{A}(BKM) = \tfrac{1}{2} x(c-z)\sin\widehat{B} = \frac{x(c-z)}{ac}\mathcal{A}(ABC)$$

$$\mathcal{A}(CLK) = \tfrac{1}{2} y(a-x)\sin\widehat{C} = \frac{y(a-x)}{ba}\mathcal{A}(ABC)$$

وعليه

$$\mathcal{A}(AML)\mathcal{A}(BKM)\mathcal{A}(CLK) = \frac{x(a-x)y(b-y)z(c-z)}{a^2b^2c^2}\mathcal{A}^3(ABC)$$

أو

$$\mathcal{A}(AML)\mathcal{A}(BKM)\mathcal{A}(CLK) = f\left(\frac{x}{a}\right)f\left(\frac{y}{b}\right)f\left(\frac{z}{c}\right)\mathcal{A}^3(ABC)$$

وقد عرّفنا $f(t) = t(1-t)$. يبلغ التابع f حدّه الأعلى $\frac{1}{4}$ عند $t = \frac{1}{2}$، ومنه

$$\sqrt[3]{\mathcal{A}(AML)\mathcal{A}(BKM)\mathcal{A}(CLK)} \le \frac{1}{4}\mathcal{A}(ABC)$$

وهذا يبرهن أنّ

$$\min(\mathcal{A}(AML), \mathcal{A}(BKM), \mathcal{A}(CLK)) \le \tfrac{1}{4}\mathcal{A}(ABC)$$ ■

أولمبياد الرياضيّات التاسع

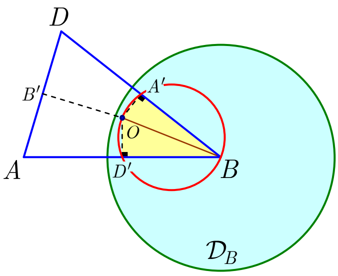
① **نتأمّل متوازي أضلاع $ABCD$ فيه $AB = a$ ، و $AD = 1$ ، و $\widehat{BAD} = \theta$. نفترض أنّ زوايا المثلّث ABD حادّة. أثبت أنّ الأقراص التي مراكزها الرؤوس A أو B أو C أو D ونصف قطر كلّ منها يساوي 1 تُغطّي كامل متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان**

$$a \le \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$$

بسبب تناظر الشكل بالنسبة إلى مركز متوازي الأضلاع، نرى أنّ الأقراص $\mathcal{D}_A$ و $\mathcal{D}_B$ و $\mathcal{D}_C$ و $\mathcal{D}_D$ التي مراكزها الرؤوس A أو B أو C أو D ونصف قطر كلٍّ منها يساوي 1 تُغطّي كامل متوازي الأضلاع، إذا وفقط إذا غطّت الأقراص $\mathcal{D}_A$ و $\mathcal{D}_B$ و $\mathcal{D}_D$ كامل المثلّث ABD . الذي نفترض أنّه حادّ الزوايا.

ليكن O مركز الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABD وليكن R نصف قطرها.

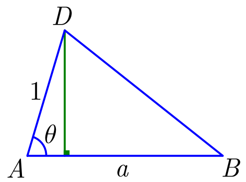
- لنفترض أنّ الأقراص $\mathcal{D}_A$ و $\mathcal{D}_B$ و $\mathcal{D}_D$ تغطّي كامل المثلّث ABD . لمّا كان هذا المثلّث حاد الزوايا استنتجنا أنّ O تقع داخل هذا المثلّث، فهي تنتمي إلى أحد الأقراص $\mathcal{D}_A$ أو $\mathcal{D}_B$ أو $\mathcal{D}_D$ ، ومن ثَمّ تبعد النقطة O عن أحد الرؤوس مسافة أقلّ من 1، أي $R \le 1$.
- وبالعكس، لنفترض أنّ $R \le 1$. ولتكن A' و B' و D' منتصفات الأضلاع $[BD]$ و $[DA]$ و $[BA]$ بالترتيب.



  - لمّا كان $\widehat{OA'B} = \widehat{OD'B} = \frac{\pi}{2}$ استنتجنا أنّ الرباعي الدائري $OD'BA'$ محتوى في القرص الذي قطره $[OB]$ ذي طوله R ، وهذا بدوره محتوى في القرص $\mathcal{D}_B$ لأنّ $R \le 1$.
  - ونستنتج بأسلوب مماثل أنّ الرباعي $OB'AD'$ محتوى في القرص $\mathcal{D}_A$. وأنّ الرباعي $OA'DB'$ محتوى في القرص $\mathcal{D}_D$.
  - ولكنّ المثلّث ABD يساوي اجتماع الرباعيّات الثلاثة السابقة. فالأقراص $\mathcal{D}_A$ و $\mathcal{D}_B$ و $\mathcal{D}_D$ تغطّي كامل المثلّث ABD .

- وهكذا فإنّ الشرط اللازم والكافي لتغطّي الأقراص $\mathcal{D}_A$ و $\mathcal{D}_B$ و $\mathcal{D}_D$ المثلّث ABD هو أن يكون $R \le 1$.

ولكن $2R = \dfrac{DB}{\sin\theta}$ فالشرط $R \le 1$ يُكافئ $DB^2 \le 4\sin^2\theta$ أو



$$a^2 + 1 - 2a\cos\theta \le 4\sin^2\theta$$

وهذا يُكافئ

$$(a-\cos\theta)^2 - 3\sin^2\theta \le 0$$

أو

$$\left(a - \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta\right)\left(a - \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta\right) \le 0$$

ولكنّ، كون المثلّث ABD حادّ الزوايا يقتضي أنّ مسقط D على المستقيم (AB) ينتمي إلى القطعة المستقيمة $[AB]$ أي إنّ $a - \cos\theta \ge 0$ ومن ثَم $a - \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta > 0$ فالمتراجحة السابقة تقتضي أنّ $a \le \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$. ■

② **نتأمّل رباعي وجوه فيه ضلعٌ واحدٌ فقط يمكن أن يتجاوز طوله الواحد. أثبت أن حجم رباعي الوجوه هذا أصغر أو يساوي $\frac{1}{8}$.**

لنتأمّل في $\mathbb{R}^3$ الكرة المغلقة المليئة $\mathcal{B} = \overline{B}(0,1)$ التي مركزها المبدأ ونصف قطرها 1. لمّا كان حجم رباعي وجوه $ABCD$ يساوي $\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right)\right|$ استنتجنا أنّ المطلوب أثبات المتراجحة

$$\frac{1}{6}\left|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\right| \le \frac{1}{8}$$

أيّاً كانت الأشعّة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من $\mathcal{B}$ التي تُحقّق $\|\vec{u}-\vec{v}\| \le 1$ و $\|\vec{u}-\vec{w}\| \le 1$.

في الحقيقة، إذا عرّفنا المجموعة

$$\mathcal{K} = \left\{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{B}^3 : \|\vec{u}-\vec{v}\| \le 1, \|\vec{u}-\vec{w}\| \le 1\right\}$$

من $\left(\mathbb{R}^3\right)^3$، رأينا أنّ المطلوب هو إثبات أنّ

$$\sup\left\{\tfrac{1}{6}\left|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\right| : (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{K}\right\} \le \frac{1}{8}$$

ولكنّ $\mathcal{K}$ مجموعة جزئيّة متراصّة في $\left(\mathbb{R}^3\right)^3$. والتابع $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \mapsto \frac{1}{6}\left|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\right|$ تابعٌ مستمرٌّ على $\mathcal{K}$ فهو يبلغ حدّه الأعلى عليها.

إذن توجد $(\overrightarrow{u_0},\overrightarrow{v_0},\overrightarrow{w_0})$ في $\mathcal{K}$ تُحقّق

$$\tfrac{1}{6}|\det(\overrightarrow{u_0},\overrightarrow{v_0},\overrightarrow{w_0})| = \sup\{\tfrac{1}{6}|\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})| : (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \in \mathcal{K}\} = V_{\max}$$

لنتأمّل جملة متعامدة نظاميّة في $\mathbb{R}^3$ يكون فيها

$$\overrightarrow{u_0} = (\alpha,0,0) \text{ و } \overrightarrow{v_0} = (\lambda,\mu,0) \text{ و } \overrightarrow{w_0} = (x,y,z)$$

مع $0<\alpha$ و $0<\mu$ و $0<z$. عندئذ يُكافئ انتماء $(\overrightarrow{u_0},\overrightarrow{v_0},\overrightarrow{w_0})$ إلى $\mathcal{K}$ ما يلي :

❶ $\alpha \le 1$

❷ $\lambda^2+\mu^2 \le 1$

❸ $x^2+y^2+z^2 \le 1$

❹ $(\lambda-\alpha)^2+\mu^2 \le 1$

❺ $(x-\alpha)^2+y^2+z^2 \le 1$

أمّا الحجم فيعطى بالصيغة التالية :

$$V_{\max} = \tfrac{1}{6}\det(\overrightarrow{u_0},\overrightarrow{v_0},\overrightarrow{w_0},) = \tfrac{1}{6}\alpha\mu z$$

- لنتأمّل الشعاع $\overrightarrow{w_1} = \left(x,0,\sqrt{y^2+z^2}\right)$. عندئذ نرى مباشرة أنّ $(\overrightarrow{u_0},\overrightarrow{v_0},\overrightarrow{w_1})$ ينتمي إلى $\mathcal{K}$. ونستنتج من $\tfrac{1}{6}|\det(\overrightarrow{u_0},\overrightarrow{v_0},\overrightarrow{w_1})| \le V_{\max}$ أنّ $\sqrt{y^2+z^2} \le z$ وهذا يبرهن على أنّ $y=0$. وأنّ $\overrightarrow{w_0} = \overrightarrow{w_1} = (x,0,z)$.

- لنتأمّل الشعاع $\overrightarrow{v_1} = \left(\tfrac{\alpha}{2},\sqrt{1-\tfrac{\alpha^2}{4}},0\right)$. عندئذ نرى مباشرة أنّ $(\overrightarrow{u_0},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{w_0})$ ينتمي إلى $\mathcal{K}$. ونستنتج من $\tfrac{1}{6}|\det(\overrightarrow{u_0},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{w_0})| \le V_{\max}$ أنّ $\sqrt{1-\tfrac{\alpha^2}{4}} \le \mu$ وهذا يبرهن، بناءً على ❷ و ❹، أنّ

$$\lambda^2 \le \frac{\alpha^2}{4} \text{ و } (\lambda-\alpha)^2 \le \frac{\alpha^2}{4}$$

ومنه نجد

$$(\lambda-\alpha)^2+\lambda^2 \le \frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^2}{4}$$

وهذا يُكافئ $2\left(\lambda^2-\alpha\lambda+\tfrac{\alpha^2}{4}\right) \le 0$ أو $(\lambda-\tfrac{\alpha}{2})^2 \le 0$. ومنه $\lambda = \tfrac{\alpha}{2}$، وبالعودة إلى ❷ نستنتج أنّ $\mu \le \sqrt{1-\tfrac{\alpha^2}{4}}$، وكنّا قد أثبتنا المتراجحة المعاكسة. مما يبرهن على أنّ $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{v_1} = \left(\tfrac{\alpha}{2},\sqrt{1-\tfrac{\alpha^2}{4}},0\right)$.

- لنتأمّل كذلك $\overrightarrow{w_2}=\left(\frac{\alpha}{2},0,\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4}}\right)$. عندئذ نرى مباشرة أنّ $(\overrightarrow{u_0},\overrightarrow{v_0},\overrightarrow{w_2})$ ينتمي إلى $\mathcal{K}$. ونستنتج من $V_{\max}\le\frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{u_0},\overrightarrow{v_0},\overrightarrow{w_2})\right|$ أنّ $z\le\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4}}$ وهذا يبرهن، بناءً على ❸ و ❺، أنّ

$$x^2\le\frac{\alpha^2}{4} \quad \text{و} \quad (x-\alpha)^2\le\frac{\alpha^2}{4}$$

ومنه نستنتج بأسلوب مماثل لما سبق أنّ $x=\frac{\alpha}{2}$، وأنّ $z=\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4}}$. وهذا يبرهن على أنّ $\overrightarrow{w_0}=\overrightarrow{w_2}=\left(\frac{\alpha}{2},0,\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4}}\right)$.

- وهكذا نرى أنّ

$$V_{\max}=\frac{\alpha}{6}\left(1-\frac{\alpha^2}{4}\right)$$

ولكن

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}-V_{\max}&=\frac{3-4\alpha+\alpha^3}{24}=\frac{(1-\alpha)(3-\alpha-\alpha^2)}{24}\\&=\frac{(1-\alpha)(1+\underline{1-\alpha}+\underline{1-\alpha^2})}{24}\ge\frac{1-\alpha}{24}\end{aligned}$$

إذن

$$V_{\max}\le\frac{1}{8}-\frac{1-\alpha}{24}\le\frac{1}{8}$$

وهذا يُثبتُ النتيجة المطلوبة، أي $V_{\max}\le\frac{1}{8}$، ويبرهن أنّ المساواة تحصل في حالة

$$\overrightarrow{w_0}=\left(\tfrac{1}{2},0,\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{و} \quad \overrightarrow{v_0}=\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2},0\right) \quad \text{و} \quad \overrightarrow{u_0}=(1,0,0)$$

الموافقة للحالة $\alpha=1$. ■

③ لتكن k و m و n أعداداً طبيعيّة. نفترض أنّ $p=m+k+1$ هو عددٌ أوّلي أكبر تماماً من $n+1$ ونعرّف $a_s=s(s+1)$. أثبت أنّ جداء الضرب $a_1a_2\cdots a_n$ يقسم العدد

$$\Pi=(a_{m+1}-a_k)(a_{m+2}-a_k)\cdots(a_{m+n}-a_k)$$

لنلاحظ أوّلاً أنّ $a_s-a_r=(s-r)(s+r+1)$. عندئذ نرى مباشرة

$$\Pi=\prod_{j=1}^{n}(a_{m+j}-a_k)=\prod_{j=1}^{n}(m-k+j)\prod_{j=1}^{n}(\underbrace{m+k+1}_{p}+j)$$

إذن

$$\prod = \frac{(m-k+n)!}{(m-k)!}\cdot\frac{(p+n)!}{p!}$$

ولكن

$$\frac{(m-k+n)!}{(m-k)!} = n!\cdot C_{n+m-k}^{m-k}$$

وكذلك

$$\frac{(p+n)!}{p!} = \frac{1}{p}(n+1)!\cdot C_{p+n}^{n+1}$$

و الفرْض $p > n+1$ يقتضي أنّ p أوّلي مع $(n+1)!$، وهو أوّلي مع $(p-1)!$ إذن

$$p \mid \left(C_{n+p}^{p-1}\times((p-1)!(n-1)!)\right) \quad \text{و} \quad \gcd(p,(n+1)!(p-1)!) = 1$$

هذا يبرهن أنّ $p \mid C_{n+p}^{p-1}$. إذن

$$\prod = n!(n+1)!\cdot\Lambda$$

و Λ هو العدد الطبيعي المعطى بالصيغة :

$$\Lambda = \frac{1}{p}C_{p+n}^{n+1}\cdot C_{n+m-k}^{m-k}$$

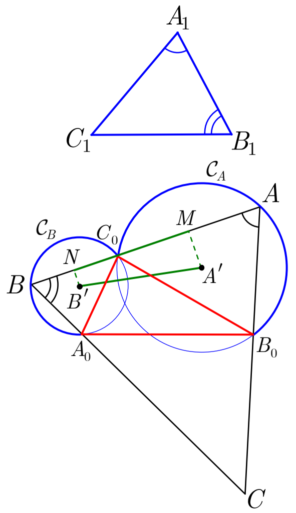
ويتمّ الإثبات بملاحظة أنّ $n!(n+1)! = a_1a_2\cdots a_n$. ◼

④ **نُعطى مثلّثين حادَّي الزوايا** $A_0B_0C_0$ **و** $A_1B_1C_1$. **يُطلب إنشاء مثلّث** ABC **مساحته أكبر ما يمكن، ويشابه** $A_1B_1C_1$ ، **على أن تنتمي الرؤوس** A_0 **و** B_0 **و** C_0 **إلى الأضلاع** $[BC]$ و $[CA]$ و $[AB]$.

التحليل : لنفترض أنّ الإنشاء مُنجزٌ. ولنلاحظ ما يلي :

- نستنتج من تشابه المثلّثين ABC و $A_1B_1C_1$ أنّ $\widehat{A} = \widehat{A_1}$ و $\widehat{B} = \widehat{B_1}$.
- إذن تقع A على القوس $\mathcal{C}_A$ التي تُرى منها القطعة $[C_0B_0]$ بزاوية قدرها A_1 ، والمحتواة في نصف المستوي الذي يعيّنه المستقيم (C_0B_0) ولا يحوي A_0.
- وكذلك تقع B على القوس $\mathcal{C}_B$ التي تُرى منها القطعة $[A_0C_0]$ بزاوية قدرها B_1، والمحتواة في نصف المستوي الذي يعيّنه المستقيم (A_0C_0) ولا يحوي B_0.

- إنّ $\mathcal{A}(ABC) = k^2\mathcal{A}(A_1B_1C_1)$ وقد رمزنا $\mathcal{A}(XYZ)$ إلى مساحة المثلّث XYZ، ورمزنا k إلى نسبة التشابه التي تساوي $\frac{AB}{A_1B_1}$. وعلى هذا تكون مساحة المثلّث ABC أكبر ما يمكن عندما يكون طول الضلع AB أطول ما يمكن.



- ليكن A' مركز الدائرة $\mathcal{C}_A$، وليكن B' مركز الدائرة $\mathcal{C}_B$، ثُمّ لنعرّف M و N المسقطين القائمين للنقطتين A' و B' على المستقيم (AB). عندئذ نستنتج من كون M منتصف $[C_0A]$، ومن كون N منتصف $[BC_0]$ أنّ $AB = 2MN$، ولكنّ الشعاع $\overrightarrow{MN}$ هو المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{A'B'}$ على منحى المستقيم (AB)، وهذا يبرهن أنّ $AB \leq 2A'B'$. وتحدث المساواة إذا وفقط إذا كان $(AB) \parallel (A'B')$.

- إذن تقع النقطتان A و B على المستقيم المار بالنقطة C_0 موازياً خطّ المركزين $(A'B')$.

الإنشاء :

1. ننشئ القوس $\mathcal{C}_A$ الذي تُرى منه القطعة المستقيمة $[C_0B_0]$ تحت زاوية قدرها $\widehat{A_1}$، ومن الجهة المقابلة للرأس A_0، ونعيّن النقطة A' مركز هذه الدائرة.
2. ننشئ كذلك القوس $\mathcal{C}_B$ الذي تُرى منه القطعة المستقيمة $[A_0C_0]$ تحت زاوية قدرها $\widehat{B_1}$، ومن الجهة المقابلة للرأس B_0، ونعيّن النقطة B' مركز هذه الدائرة.
3. ننشئ من C_0 المستقيم δ الموازي لخطّ المركزين $(A'B')$. فيتقاطع δ مع $\mathcal{C}_A$ في A ويتقاطع مع $\mathcal{C}_B$ في B.
4. ننشئ C نقطة تقاطع المستقيمين (AB_0) و (BA_0). ◼

⑤ **نتأمّل أعداداً حقيقيّة** $(a_1,\ldots,a_8)$ **ليست جميعها معدومة. ونعرّف في حالة عددٍ طبيعي** n **المقادير** $(c_n)_{n\geq 1}$ **بالصيغة** $c_n = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n$. **فإذا علمتَ أنّ المجموعة** $\mathcal{Z} = \{n \in \mathbb{N}^* : c_n = 0\}$ **غير منتهية، فعيِّن هذه المجموعة.**

في هذه المسألة، الترميز المُناسبُ يقف وراء الحل. لنعرّف إذن ما يلي :

$$\mathcal{V} = \{|a_k| : 1 \leq k \leq 8\}$$

وفي حالة v من $\mathcal{V}\backslash\{0\}$ نعرّف المجموعتين

$$J_v^- = \{k \in \{1,\ldots,8\} : a_k = -v\} \quad \text{و} \quad J_v^+ = \{k \in \{1,\ldots,8\} : a_k = v\}$$

وأخيراً نضع $\lambda_v^+ = \operatorname{card}(J_v^+)$ و $\lambda_v^- = \operatorname{card}(J_v^-)$. عندئذ

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{2n+1} = \sum_{v \in \mathcal{V}\backslash\{0\}} (\lambda_v^+ - \lambda_v^-) v^{2n+1}$$

لنفترض جدلاً أنّ

$$\mathcal{H} \qquad \mathcal{W} = \left\{v \in \mathcal{V}\backslash\{0\} : \lambda_v^+ \neq \lambda_v^-\right\} \neq \varnothing$$

عندئذ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{2n+1} = \sum_{v \in \mathcal{W}} (\lambda_v^+ - \lambda_v^-) v^{2n+1}$$

وإذا عرّفنا $w = \max \mathcal{W}$ كان لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{c_{2n+1}}{w^{2n+1}} = (\lambda_w^+ - \lambda_w^-) + \sum_{v \in \mathcal{W}\backslash\{w\}} (\lambda_v^+ - \lambda_v^-) \left(\frac{v}{w}\right)^{2n+1}$$

ومن ثَمّ

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{c_{2n+1}}{w^{2n+1}}\right) = \lambda_w^+ - \lambda_w^- \neq 0$$

وهذا يبرهن أنّه توجد قيمة n_0 تُحقّق

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{|c_{2n+1}|}{w^{2n+1}} > 0$$

وخصوصاً $\forall n \geq n_0, c_{2n+1} \neq 0$. ولأنّه لدينا وضوحاً $\forall n \geq 1, c_{2n} \neq 0$ استنتجنا من ذلك أنّ $\forall n \geq 2n_0, c_n \neq 0$، أي $\mathcal{Z} \subset \{1,2,\ldots,2n_0\}$. وهذا يتناقض مع الفرْض $\mathcal{H}$. ويبرهن على أنّ $\mathcal{W} = \varnothing$. ومن ثَمّ

$$\forall v \in \mathcal{V}\backslash\{0\}, \lambda_v^+ = \lambda_v^-$$

وهذا يقتضي، بناءً على $(*)$، أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, c_{2n+1} = 0$. ومن ثَمّ تكون $\mathcal{Z}$ مجموعة جميع الأعداد الفرديّة، أي $\mathcal{Z} = \mathbb{N}\backslash(2\mathbb{N})$.

ملاحظة : يسري هذا الإثبات، في حالة استبدلنا بالعدد 8 أيّ عدد طبيعي.

⑥ **في مسابقة رياضيّة دامت n يوماً جرى توزيع m ميداليّةً. في اليوم الأوّل جرى توزيع ميداليّة واحدة إضافة إلى سُبع عدد الميداليّات المتبقيّة، وفي اليوم الثاني جرى توزيع ميداليّتين اثنتين إضافة إلى سُبع عدد الميداليّات المتبقيّة، وهكذا دواليك ...، وفي اليوم الأخير جرى توزيع الميداليّات المتبقيّة وكان عددها n. فكم ميداليّة وُزِّعت في هذه المسابقة ؟ وكم يوماً دامت ؟**

لنفترض m_k عدد الميداليّات المتوفّرة صباح اليوم k. استناداً إلى النص، لدينا $m_1 = m$ و $m_n = n$. في اليوم k جرى توزيع k ميداليةّ إضافة إلى سُبع الميداليات المتبقيّة أي $k + \frac{m_k - k}{7}$، فعدد الميداليّات المتوفّرة صباح اليوم $k+1$ يساوي

$$m_{k+1} = m_k - \left(k + \frac{m_k - k}{7}\right) = \frac{6}{7} m_k - \frac{6}{7} k$$

نستنتج من الصيغة السابقة أنّ

$$\left(\frac{7}{6}\right)^k m_{k+1} - \left(\frac{7}{6}\right)^{k-1} m_k = -k \left(\frac{7}{6}\right)^{k-1} ; \quad 1 \le k < n$$

وبالجمع نجد

$$\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} m_n - m_1 = -\sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{7}{6}\right)^{k-1}$$

ومنه

$$m = \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{7}{6}\right)^{k-1}$$

ولكن

$$\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)' = \frac{x^n\left((n+1)(x-1) - x\right) + 1}{(x-1)^2}$$

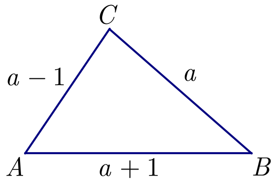
إذن

$$m = \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{7}{6}\right)^{k-1} = 36 + \frac{7^n (n-6)}{6^{n-1}}$$

ولكن $\gcd\left(6^{n-1}, 7^n\right) = 1$ فحتّى يكون m عدداً صحيحاً يجب أن يقسم العددَ 6^{n-1} العددَ $n-6$. ولأنّ $6^{n-1} > n - 6$، استنتجنا من ذلك أنّ $n = 6$، ومن ثَمّ $m = 36$. ■

أولمبياد الرياضيّات العاشر

① **أوجد المثلّثات التي أطوال أضلاعها أعداد طبيعيّة متتالية، وفيها زاوية قياسها يساوي ضعفي قياس زاوية أخرى.**



لنفترض أنّ أطوال أضلاع المثلّث هي $a+1$ ، و a و $a-1$ حيث a عددٌ طبيعي أكبر أو يساوي 2. ولتكن هذه الأضلاع بالترتيب $[AB]$ و $[BC]$ و $[CA]$. عندئذ نرى أنّ

$$\cos\widehat{A} = \frac{(a-1)^2+(a+1)^2-a^2}{2(a-1)(a+1)} = \frac{a^2+2}{2(a^2-1)}$$
$$\cos\widehat{B} = \frac{a^2+(a+1)^2-(a-1)^2}{2a(a+1)} = \frac{a+4}{2(a+1)}$$
$$\cos\widehat{C} = \frac{a^2+(a-1)^2-(a+1)^2}{2a(a-1)} = \frac{a-4}{2(a-1)}$$

ولأنّ $\cos\widehat{C} > -1$ وجب أن يكون $a \geq 3$.

ومن جهة أخرى، نلاحظ أنّ المتراجحة $AC < BC < AB$ تقتضي $\widehat{B} < \widehat{A} < \widehat{C}$ ، إذن يجب أن يكون $\widehat{C} > \frac{\pi}{3}$ لأنّ مجموع زوايا المثلّث يساوي π . وهذا يجعل من المستحيل تحقّق إحدى المساواتين $\widehat{A} = 2\widehat{C}$ أو $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ ، كما إنّه من غير الممكن أن يكون $\widehat{B} = 2\widehat{A}$ ، لأنّ $\widehat{A} < \widehat{B}$. إذن علينا فقط دراسة الحالات الثلاث التالية :

❶ حالة $\widehat{A} = 2\widehat{B}$. عندئذ $2\left(1+\cos\widehat{A}\right) = \left(2\cos\widehat{B}\right)^2$ وهذا يُكافئ

$$\frac{3a^2}{a^2-1} = \left(\frac{a+4}{a+1}\right)^2$$

وتُكتب هذه، بعد الاختصار على $a+1$ والإصلاح، بالشكل

$$3a^2(a+1) = (a-1)(a+4)^2$$

أو $a^3-2a^2-4a+8=0$ ، وهذا يُكافئ $(a+2)(a-2)^2=0$. وهذا لا يوافق حلاً مقبولاً إذ يجب أن يكون $a \geq 3$. (هذا يوافق مثلّثاً فيه $\widehat{A} = \widehat{B} = 0$.)

❷ حالة $\widehat{C} = 2\widehat{A}$. عندئذ $2\left(1+\cos\widehat{C}\right) = \left(2\cos\widehat{A}\right)^2$ وهذا يُكافئ

$$\frac{3(a-2)}{a-1} = \left(\frac{a^2+2}{a^2-1}\right)^2$$

وتُكتب هذه، بعد الاختصار على $a-1$ والإصلاح، بالشكل

$$3(a-2)(a-1)(a+1)^2 = \left(a^2+2\right)^2$$

أو

$$2a^4 - 3a^3 - 13a^2 + 3a + 2 = 0$$

وعليه يجب أن يكون كلُّ حلٍّ a لهذه المعادلة قاسماً للعدد 2. فلا يوجد عددٌ طبيعي a أكبر أو يساوي 3 يُحقّقها.

❸ حالة $\widehat{C} = 2\widehat{B}$. عندئذ $2\left(1+\cos\widehat{C}\right) = \left(2\cos\widehat{B}\right)^2$ وهذا يُكافئ

$$\frac{3(a-2)}{a-1} = \left(\frac{a+4}{a+1}\right)^2$$

وتُكتب هذ، بعد الإصلاح، بالشكل

$$2a^3 - 7a^2 - 17a + 10 = 0$$

نبحث عن الحلول a لهذه المعادلة التي هي أعداد طبيعيّة أكبر أو تساوي 3، ولمّا كانت هذه الحلول يجب أن تكون من بين قواسم العدد 10. استنتجنا التفريق

$$(a-5)\left(2a^2+3a-2\right) = 0$$

ولكن $2a^2 + 3a - 2 = 2\left(a^2-1\right) + 3a \geq 3a > 0$، إذن $a = 5$.

وبالعكس، نتيقّن مباشرة أنّه في المثلّث ABC الذي فيه $AB = 6$، و $BC = 5$، و $CA = 4$ لدينا $\widehat{C} = 2\widehat{B}$، وهو إذن الحلّ الوحيد للمسألة المطروحة. ◼

② أوجد جميع الأعداد الطبيعيّة n التي جداء ضرب خاناتها في الكتابة العشريّة يساوي $n^2 - 10n - 22$.

بملاحظة أنّ الشرط $n \leq 11$ يقتضي

$$n^2 - 10n - 22 = (n+1)(n-11) - 11 < 0$$

نستنتج أنّ كلّ عددٍ n يُحقّق شرط المسألة يجب أن يكون أكبر أو يساوي 12.

ومن جهة أخرى، إذا افترضنا أنّ الكتابة العشريّة للعدد n هي

$$n = (d_m d_{m-1} \dots d_0)_{10} = \sum_{k=0}^{m} d_k 10^k$$

استنتجنا من الفرْض أنّ

$$n^2 - 10n - 22 = d_m \times d_{m-1} \times \cdots \times d_0 \le d_m 9^m < d_m 10^m \le n$$

وهذا يقتضي $n^2 - 11n - 22 < 0$ ومنه $n^2 - 11n - 26 < 0$ أو

$$(n - 13)(n + 2) < 0$$

إذن $n < 13$. وهكذا نرى أنّه إذا وُجِدَ عددٌ n جداءُ ضرب خاناته العشريّة يساوي $n^2 - 10n - 22$ كان هذا العدد هو 12، وبالعكس نتيقّن بسهولة أنّ العدد 12 يُحقّق هذه الخاصّة فهو الحلّ الوحيد للمسألة المطروحة.

③ نتأمّل ثلاثة أعداد حقيقيّة a و b و c تُحقّق $a \neq 0$. ونعرّف $\mathcal{S}$ مجموعة الأشعّة $(x_1, \dots, x_n)$ من $\mathbb{R}^n$ التي تُحقّق

$$a x_k^2 + b x_k + c = x_{k+1} : k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

مع الاصطلاح $x_{n+1} = x_1$. أثبت أنّ $\operatorname{card}(\mathcal{S})$ يساوي 0، أو 1، أو أنّه أكبر تماماً من 1 وذلك تِبعاً لكون المقدار $\delta = (b-1)^2 - 4ac$ سالباً تماماً، أو صفراً، أو موجباً تماماً.

لنعرّف $f(x) = ax^2 + (b-1)x + c$، ولنناقش الحالات التالية :

- حالة $\delta < 0$. إذن يُحافظ المقدار $f(x)$ على إشارة ثابتة، هي إشارة a، وذلك مهما كانت قيمة x، ومن ثَمّ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad af(x) > 0$.

  فإذا كانت $\mathcal{S} \neq \varnothing$ وجدنا عنصراً $(x_1, \dots, x_n)$ من $\mathbb{R}^n$ يكون حلاً للجملة المدروسة، وبملاحظة أنّ $f(x_k) = x_{k+1} - x_k$، استنتجنا مما سبق أنّ

  $$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad a(x_{k+1} - x_k) > 0$$

  وبجمع هذه المتراجحات نجد $a(x_{n+1} - x_1) > 0$ وفي هذا تناقضٌ واضحٌ لأنّ x_{n+1} يساوي x_1. إذن يجب أن يكون $\mathcal{S} = \varnothing$ في هذه الحالة.

- حالة $\delta = 0$. في هذه الحالة، يوجدُ عددٌ حقيقي z يُحقّق $f(x) = a(x-z)^2$ أيّاً كانت قيمة x من $\mathbb{R}$.

فإذا كانت $\mathcal{S} \neq \varnothing$ وجدنا عنصراً $(x_1, \ldots, x_n)$ من $\mathbb{R}^n$ يكون حلاً للجملة المدروسة، وبملاحظة أنّ $f(x_k) = x_{k+1} - x_k$، استنتجنا مما سبق أنّ

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad x_{k+1} - x_k = a(x_k - z)^2$$

وبجمع هذه المساوايات نجد

$$a \times \sum_{k=1}^{n} (x_k - z)^2 = x_{n+1} - x_1 = 0$$

وهذا يقتضي أنّ $x_k = z$ أيّاً كان k من $\{1, \ldots, n\}$. وبالعكس، نتيّقن مباشرة أنّ $\forall k \in \{1, \ldots, n\}, x_k = z$ يُعرّف حلاً من $\mathcal{S}$. إذن $\operatorname{card}(\mathcal{S}) = 1$ في هذه الحالة.

- حالة $\delta > 0$. يوجد إذن عددان حقيقيّان مختلفان z_1 و z_2 يُحقّقان

$$f(x) = a(x - z_2)(x - z_1)$$

عندئذ، نجد في $\mathcal{S}$ عنصرين مختلفين $(x_1, \ldots, x_n)$ و $(y_1, \ldots, y_n)$ هما العنصران المعرّفان كما يلي :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, y_k = z_2 \quad \text{و} \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}, x_k = z_1$$

إذن $\operatorname{card}(\mathcal{S}) > 1$ في هذه الحالة. ◼

④ أثبت أنّه في كلِّ رباعي وجوه يوجد رأس تكوّن أطوال الأحرف المنبثقة منه أطوال أضلاع مثلّث.

لنفترض أنّ هذه النتيجة خطأ. عندئذ يوجد رباعي وجوه لا يُحقّق هذه الخاصّة، أي لا تصلح أطوال الأحرف المنبثقة من أيٍّ من رؤوسه لتكون أطوال أضلاع مثلّث. لنسمِّ رباعي الوجوه هذا $ABCD$ ولنختر $[AB]$ ليكون طوله هو الأطول بين حروف رباعي الوجوه هذا.

عندئذ نستنتج من كون الأطوال AB و AC و AD لا تصلح أطوال أضلاع مثلّث، أنّ أحدها أكبر أو يساوي مجموع طولَي الاثنين الآخرين، وبناءً على طريقة اختيار $[AB]$، هذا يقتضي

$$AB \geq AC + AD \tag{1}$$

وكذلك نستنتج من كون الأطوال BA و BC و BD لا تصلح أطوال أضلاع مثلّث، أنّ أحدها أكبر أو يساوي مجموع طولَي الاثنين الآخرين، وبناءً على طريقة اختيار $[AB]$، هذا يقتضي

$$BA \geq BC + BD \qquad (2)$$

وبجمع المتراجحتين (1) و (2) نجد

$$2AB \geq AC + AD + BC + BD \qquad (3)$$

ولكن في المثلّث ABC لدينا المتراجحة $AC + BC > AB$، وكذلك في المثلّث ABD لدينا أيضاً $AD + BD > AB$، وبجمع هاتين المتراجحتين نجد

$$AC + BC + AD + BD > 2AB$$

وهذه المتراجحة تناقض (3). وهذه التناقض يُثبتُ صحّة الخاصّة المطلوبة. ■

⑤ **نتأمّل تابعاً حقيقيّاً $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ونفترض أنّه يوجد عددٌ حقيقي موجبٌ تماماً a يُحقّق**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$$

أثبت أنّ f دوري، وأعطِ مثلاً عن تابعٍ غير ثابتٍ f يحقّق ما سبق في حالة $a = 1$.

نستنتج من كون الجذر التربيعي معرّفاً أنّ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in [0,1]$، ولأنّ الجذر التربيعي موجبٌ استنتجنا أنّ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in [\frac{1}{2},1]$.

لنعرّف إذن التابع

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 2f(x) - 1$$

فنرى أنّ g يأخذ قيمه في المجال $[0,1]$. كما نرى أنّه في حالة x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$g(x+a) = \sqrt{4f(x) - 4(f(x))^2} = \sqrt{1-(g(x))^2}$$

ومن ثَمّ، مهما تكن x من $\mathbb{R}$، يكن

$$g(x+2a) = \sqrt{1-(g(x+a))^2} = \sqrt{1-\left(1-g^2(x)\right)} = g(x)$$

لأنّ $g(x) \geq 0$. إذن g هو تابعٌ دوري، يقبل العدد $2a$ دوراً. وهذا يقتضي أنّ f هو أيضاً تابعٌ $2a$-دوري.

ونتيقّن مباشرة أنّ التابع $f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|\right)$ يُحقّق المعادلة التابعيّة المعطاة مع $a = 1$. ■

⑥ **احسب في حالة عددٍ طبيعي n المجموع**

$$S_n = \sum_{k\geq 0} \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$$

إذ رمزنا $\lfloor x \rfloor$ إلى الجزء الصحيح للعدد x، أي أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي x.

الملاحظة الأساسيّة هنا هي

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \tfrac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$$

إذن إنّ التابع $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor - \lfloor 2x \rfloor$ يقبل العدد 1 دوراً. وهو معدوم وضوحاً على كلٍّ من المجالين $[0, \frac{1}{2}[$ و $[\frac{1}{2}, 1[$.

ومن جهة أخرى، نرى أنّ المجموع المطلوب هو مجموع عددٍ منتهٍ من الحدود لأنّه في حالة $n < 2^k$ يكون $\left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = 0$. وهكذا نجد أنّ

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k\geq 0} \left\lfloor \frac{n}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \sum_{k\geq 0} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^{k+1}} \right\rfloor \right) \\ &= \sum_{k\geq 0} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor - \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor = n \end{aligned}$$

وهي قيمة المجموع المطلوب. ■

أولمبياد الرياضيّات الحادي عشر

① أثبت أنّه يوجد عددٌ لانهائي من الأعداد الطبيعيّة m التي تجعل جميع الأعداد $n^4 + m$، عندما تتحوّل n في $\mathbb{N}^*$، أعداداً غير أوليّة.

في حالة $m = 4k^4$ و k من $\mathbb{N}^*$، نرى مباشرة أنّ

$$\begin{aligned} n^4 + 4k^4 &= \left(n^2 + 2k^2\right)^2 - 4k^2n^2 \\ &= \left(n^2 + 2kn + 2k^2\right)\left(n^2 - 2kn + 2k^2\right) \\ &= \underbrace{\left((n+k)^2 + k^2\right)}_{1\leq\;\hookleftarrow}\underbrace{\left((n-k)^2 + k^2\right)}_{1\leq\;\hookleftarrow} \end{aligned}$$

وهذا يبرهن أنّه مهما تكن n من $\mathbb{N}$ فالعدد $n^4 + 4k^4$ ليس عدداً أوّلياً. ■

---

② ليكن $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ من $\mathbb{R}^n$. ولنتأمّل التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّف بالصيغة

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(x + a_k)}{2^{k-1}}$$

أثبت أنّ الشرط $f(x_1) = f(x_2) = 0$ يقتضي $x_1 - x_2 \in \pi\mathbb{Z}$.

لنلاحظ أوّلاً أنّ

$$f(x) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\mathrm{i}(x+a_k)}}{2^{k-1}}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{i}x}\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\mathrm{i}a_k}}{2^{k-1}}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{i}x}\omega\right)$$

وقد عرّفنا $\omega = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\mathrm{i}a_k}}{2^{k-1}}$. وهنا نلاحظ أنّ

$$|\omega| \geq \left|e^{\mathrm{i}a_1}\right| - \sum_{k=2}^{n} \frac{\left|e^{\mathrm{i}a_k}\right|}{2^{k-1}} \geq 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} > 0$$

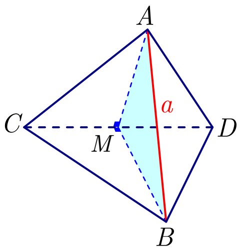
إذن $\omega \neq 0$ فيوجد φ من $[0, 2\pi[$ و r من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّقان $\omega = re^{-\mathrm{i}\varphi}$. وعندها يكون

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = r\cos(x - \varphi)$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي $\{\varphi + \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\}$، والفرق بين أيّ حلّين x_1 و x_2 لهذه المعادلة ينتمي إلى $\pi\mathbb{Z}$. ■

③ **في حالة k من المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$ يُطلب إيجاد الشرط اللازم والكافي على العدد a كي يوجد رباعي وجوه فيه k ضلعاً طول كلٍّ منها يساوي a، و $6-k$ ضلعاً طول كلٍّ منها يساوي 1.**

حالة ❶ $k=1$.



لنتأمّل رباعي وجوه $ABCD$ فيه $AB=a$، وأطوال بقيّة الأحرف تساوي 1. ولنعرّف M منتصف $[CD]$.

لمّا كان كلٌّ من المثلثين BCD و ACD مثلّثاً متساوي الأضلاع وطول ضلعه يساوي 1، استنتجنا أنّ $MB=MA=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ولأنّه في المثلّث AMB لدينا المتراجحة $0<AB<AM+MB$.استنتجنا الشرط اللازم $0<a<\sqrt{3}$.

وبالعكس، في حالة $0<a<\sqrt{3}$، يمكن إنشاء المثلث AMB الذي يُحقّق

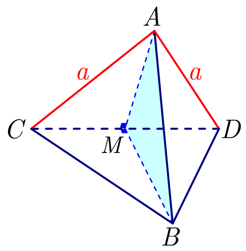
$$AB=a \text{ و } AM=MB=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ثُمّ نختار على المستقيم المار من M عموديّاً على المستوي (AMB) النقطتين C و D اللتين تبعدان عن M مقدار $\frac{1}{2}$. فنحصل على رباعي وجوه $ABCD$ يُحقِّق الخاصّة المرجوّة. فالشرط اللازم والكافي في هذه الحالة هو $0<a<\sqrt{3}$.

حالة ❷ $k=5$.

ليكن $\mathcal{H}_{1/a}$ تحاكياً مركزه نقطة ما ونسبته $\frac{1}{a}$. عندئذ تكون صورة أي رباعي وجوه $ABCD$ فيه خمسة أحرف طول كلٍّ منها a وطول الحرف الأخير 1، رباعيَ وجوه فيه حرفٌ واحدٌ طوله $b=1/a$، وأطوال بقية الأحرف تساوي 1. إذن يجب أن يكون $0<b<\sqrt{3}$ أو $\frac{1}{\sqrt{3}}<a$، فهو شرط لازمٌ إذن. وبالعكس، إذا تحقّق هذا الشرط، حققت $b=1/a$ الشرط $0<b<\sqrt{3}$ فيوجد رباعي وجوه فيه حرفٌ واحدٌ طوله b، وأطوال بقية الأحرف تساوي 1. وعندئذ تكون صورة رباعي الوجوه هذا وفق التحاكي $\mathcal{H}_a=\left(\mathcal{H}_{1/a}\right)^{-1}$ رباعي وجوه فيه خمسة أحرف طول كلٍّ منها a وطول الحرف الأخير 1. فالشرط اللازم والكافي في هذه الحالة هو $\frac{1}{\sqrt{3}}<a$.

❸ **حالة** $k=2$. لنتأمّل رباعي وجوه فيه حرفان طول كلٍّ منهما a وأطوال بقيّة الأحرف تساوي 1. ولنناقش حالتين :



- الحرفان اللذان طول كلٍّ منهما يساوي a يشتركان برأس. نسمّي رباعي الوجوه هذا $ABCD$ على أن يكون طول كلٍّ من AC و AD مساوياً a وأطوال بقيّة الأحرف تساوي 1. لنعرّف كما في السابق M منتصف $[CD]$.

لمّا كان BCD مثلّثاً متساوي الأضلاع استنتجنا أنّ $MB=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
ولمّا كان ACD متساوي الساقين استنتجنا أنّ $MA=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}$. وعلى هذا نستنتج من المثلّث AMB أنّ

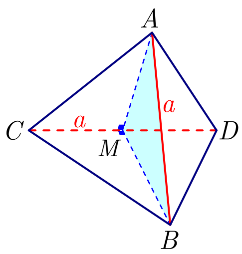
$$|MB-AB|<MA<MB+AB$$

أو

$$1-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}<1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وهذا يُكافئ $2-\sqrt{3}<a^2<2+\sqrt{3}$، ولأنّ $(1\pm\sqrt{3})^2=2(2\pm\sqrt{3})$ نستنتج من ذلك الشرط اللازم التالي :

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}<a<\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$



- الحرفان اللذان طول كلٍّ منهما يساوي a لا يشتركان برأس. نسمّي رباعي الوجوه $ABCD$ على أن يكون طول كلٍّ من AB و CD مساوياً a وأطوال بقيّة الأحرف تساوي 1. لنعرّف كما في السابق M منتصف $[CD]$.

المثلّثان المتساويا الساقين BCD و ACD طبوقان. وفيهما

$$MB=MA=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$$

وعلى هذا نستنتج من المثلّث AMB أنّ $AB<MB+MA$، أي

$$a<2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$$

وهذا يُكافئ $a<\sqrt{2}$.

ولأنّ $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$ استنتجنا مما سبق أنّه في حالة $k = 2$ يلزم أن تحقّق a المتراجحة

$$0 < a < \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

ونبرهن بأسلوب مماثلٍ لحالة $k = 1$، أن هذا الشرط كافٍ، إذ نبدأ بإنشاء AMB، ثُمّ ننشئ C و D. فالشرط اللازم والكافي في هذه الحالة هو $0 < a < \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

❹ **حالة** $k = 4$.

الشرط اللازم والكافي في هذه الحالة هو $a > \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$. ونستنتج ذلك من حالة $k = 2$ بالاستفادة من التحاكي $\mathcal{H}_{1/a}$.

❺ **حالة** $k = 3$.

في هذه الحالة مهما كانت قيمة a من $\mathbb{R}_+^*$، يوجد رباعي وجوه فيه ثلاثة أحرف طول كلّ منها 1، وثلاثة أحرف طول كلٍّ منها يساوي a.

- في حالة $a \leq 1$، أنشئ مثلّثاً متساوي الأضلاع طول ضلعه a، ثُمّ اختر الرأس الرابع على محور المثلّث ليكون بُعده عن بقيّة الرؤوس مساوياً 1.
- في حالة $a > 1$، أنشئ مثلّثاً متساوي الأضلاع طول ضلعه 1، ثُمّ اختر الرأس الرابع على محور المثلّث ليكون بُعده عن بقيّة الرؤوس مساوياً a. ■

④ **نتأمّل نقطة C على نصف دائرة $\mathfrak{C}$ قطرها $[AB]$ ومختلفة عن A و B. ولتكن D المسقط القائم للنقطة C على (AB). ثُمّ نتأمّل الدوائرة $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ و $\mathfrak{C}_3$ المعرّفة كما يلي :**

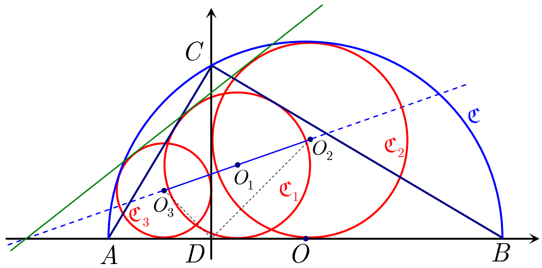
- **$\mathfrak{C}_1$ هي الدائرة المماسّة لأضلاع المثلّث ABC داخلاً.**
- **$\mathfrak{C}_2$ هي الدائرة التي تمسّ نصف الدائرة $\mathfrak{C}$ والقطعتين المستقيمتين $[CD]$ و $[DA]$.**
- **$\mathfrak{C}_3$ هي الدائرة التي تمسّ نصف الدائرة $\mathfrak{C}$ والقطعتين المستقيمتين $[CD]$ و $[DB]$.**

أثبت وجود مستقيم آخر غير (AB) يمس الدوائر $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ و $\mathfrak{C}_3$.

لنرمز بالرمزين O_k و r_k إلى مركز الدائرة ونصف قطر $\mathfrak{C}_k$، في حالة k من $\{1,2,3\}$، ولنرمز بالرمزين O و r إلى مركز الدائرة $\mathfrak{C}$، أي منتصف $[AB]$، ونصف قطرها. يبدو أنّ الحلّ التحليلي هو الأنسب في هذه المسألة. سنفترض كما جرت العادة $AB = c$ و $BC = a$ و $CA = b$، ولأنّ ABC قائم في C كان $a^2 + b^2 = c^2$.

لنتأمّل جملة متعامدة نظاميّة مبدؤها النقطة D يكون فيها $A(-\alpha,0)$ و $B(\beta,0)$ و $C(\gamma,0)$ حيث α و β و γ أعدادٌ موجبة تماماً. ولنلاحظ أنّ

$$\alpha=\frac{b^2}{c} \quad \text{و} \quad \beta=\frac{a^2}{c} \quad \text{و} \quad \gamma=\frac{ab}{c}$$



▫ **تعيين الدائرة $\mathfrak{C}_1$**. لنفترض أنّ (x_1,y_1) هي إحداثيات O_1. نلاحظ أوّلاً ما يلي :

– معادلة (AC) هي $\gamma x-\alpha y+\alpha\gamma=0$.

– معادلة (BC) هي $\gamma x+\beta y-\beta\gamma=0$.

– معادلة (AB) هي $y=0$.

لمّا كانت O_1 تبعد البُعد نفسه r_1 عن المستقيمات الثلاثة السابقة استنتجنا أنّ

$$r_1=|y_1|=\frac{|\gamma x_1-\alpha y_1+\alpha\gamma|}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}=\frac{|\gamma x_1+\beta y_1-\beta\gamma|}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}$$

ولكن O_1 تقع داخل المثلّث أي من جهة D بالنسبة إلى كلٍّ من المستقيمين (AC) و (BC) إذن إشارة $\gamma x_1-\alpha y_1+\alpha\gamma$ تُماثل إشارة $\alpha\gamma$ فهو موجب، وإشارة $\gamma x_1+\beta y_1-\beta\gamma$ تُماثل إشارة $-\beta\gamma$ فهو سالبٌ. وأخيراً $y_1>0$. إذن

$$r_1=y_1=\frac{\gamma x_1-\alpha y_1+\alpha\gamma}{b}=\frac{\beta\gamma-\gamma x_1-\beta y_1}{a}$$

ومنه

$$(\alpha+b)y_1-\gamma x_1=\alpha\gamma \qquad ❶$$

$$(\beta+a)y_1+\gamma x_1=\beta\gamma \qquad ❷$$

فإذا جمعنا المعادلتين ❶ و ❷ واستفدنا من كون $\alpha+\beta=c$ وجدنا

$$y_1=\frac{\gamma c}{a+b+c}=\frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ab\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2}\right)}{2ab}$$

إذن

$$y_1 = \frac{a+b-c}{2}$$

وبالتعويض في ❶ نجد

$$x_1 = \frac{1}{\gamma}(\alpha+b)y_1 - \alpha = \frac{c}{ab}\left(\frac{b^2}{c}+b\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right) - \frac{b^2}{c}$$
$$= \frac{(b+c)(a+b-c)}{2a} - \frac{b^2}{c} = \frac{b+c-a}{2} - \frac{b^2}{c} = \frac{b-a}{2} + \frac{a^2-b^2}{2c}$$

وأخيراً

$$x_1 = \frac{(a-b)(a+b-c)}{2c}$$

إذن نصف قطر $\mathfrak{C}_1$ يساوي $r_1 = \frac{a+b-c}{2}$، وإحداثيّات مركزها O_1 هي

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{(a-b)(a+b-c)}{2c}, \frac{a+b-c}{2}\right)$$

▫ **تعيين الدائرة** $\mathfrak{C}_2$. لنفترض أنّ (x_2, y_2) هي إحداثيات O_2. نلاحظ أوّلاً أنّ O_2 تنتمي إلى منصف الربع الأوّل إذن $y_2 = x_2 = r_2$. وحتّى تمس هذه الدائرةُ الدائرةَ $\mathfrak{C}$ داخلاً يجب أن يكون البُعد بين المركزين مساوياً الفرق بين نصفَي القطرين. أي $OO_2 = r - r_2$، ولأنّ $\left(\frac{\beta-\alpha}{2}, 0\right)$ هما إحداثيّا O، و $r = \frac{c}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$ استنتجنا

$$(OO_2)^2 = \left(\frac{\beta-\alpha}{2} - x_2\right)^2 + x_2^2 = \left(\frac{\beta+\alpha}{2} - x_2\right)^2 = (r-r_2)^2$$

أو

$$x_2^2 = \left(\frac{\beta+\alpha}{2} - x_2\right)^2 - \left(\frac{\beta-\alpha}{2} - x_2\right)^2 = \alpha(\beta - 2x_2)$$

وهذا يُكافئ $(x_2+\alpha)^2 = \alpha\beta + \alpha^2 = c\alpha = b^2$ أو $x_2 = b - \alpha$.

إذن نصف قطر $\mathfrak{C}_2$ يساوي $r_2 = b - \alpha = b - \frac{b^2}{c}$ وإحداثيّات مركزها O_2 هي

$$(x_2, y_2) = \left(b - \frac{b^2}{c}, b - \frac{b^2}{c}\right)$$

ملاحظة : المساواة $x_2 + \alpha = b$ تعني أنّ بُعد A عن نقطة تماس $\mathfrak{C}_2$ مع (AB) يساوي AC.

▫ **تعيين الدائرة $\mathfrak{C}_3$** . لنفترض أنّ (x_3, y_3) هي إحداثيات O_3. نلاحظ أوّلاً أنّ O_3 تنتمي إلى منصف الربع الثاني إذن $y_3 = -x_3 = r_3$. وحتّى تمس هذه الدائرةُ الدائرةَ $\mathfrak{C}$ داخلاً يجب أن يكون البُعد بين المركزين مساوياً الفرق بين نصفَي القطرين. أي $OO_3 = r - r_3$، ومنه

$$(OO_3)^2 = \left(\frac{\beta - \alpha}{2} - x_3\right)^2 + x_3^2 = \left(\frac{\beta + \alpha}{2} + x_3\right)^2 = (r - r_3)^2$$

أو

$$x_3^2 = \left(\frac{\beta + \alpha}{2} + x_3\right)^2 - \left(\frac{\beta - \alpha}{2} - x_3\right)^2 = \beta(\alpha + 2x_3)$$

وهذا يُكافئ $(x_3 - \beta)^2 = \alpha\beta + \beta^2 = c\beta = a^2$ أو $x_3 = \beta - a$. لأنّ $x_3 - \beta$ عددٌ سالبٌ. إذن نصف قطر $\mathfrak{C}_3$ يساوي $r_3 = a - \beta = a - \frac{a^2}{c}$ وإحداثيّات مركزها O_3 هي

$$(x_3, y_3) = \left(\frac{a^2}{c} - a, a - \frac{a^2}{c}\right)$$

ملاحظة : المساواة $x_3 - \beta = a$ تعني أنّ بُعد B عن نقطة تماس $\mathfrak{C}_3$ مع (AB) يساوي BC.

لنعيّن (x_4, y_4) إحداثيّات منتصف القطعة $[O_3O_2]$. في الحقيقة، لدينا

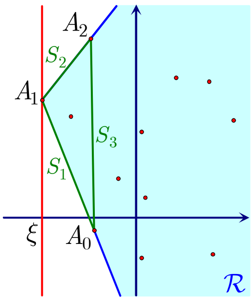
$$x_4 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3) = \frac{1}{2}\left(b - a + \frac{a^2 - b^2}{c}\right) = x_2$$

$$y_4 = \frac{1}{2}(y_2 + y_3) = \frac{1}{2}\left(a + b - \frac{a^2 + b^2}{c}\right) = \frac{a + b - c}{2} = y_2$$

إذن O_1 هي منتصف $[O_2O_3]$. والمستقيم (O_2O_3) هو محور تناظر للدوائرالثلاث $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ و $\mathfrak{C}_3$. وعلى هذا يكون نظير (AB) بالنسبة إلى المستقيم (O_2O_3) مماساً مشتركاً آخر لهذه الدوائر. ◼

⑤ **ليكن n عدداً طبيعيّاً أكبر تماماً من 4، ونُعطى عدداً n من نقاط المستوي. نفترض أنّ أي ثلاث نقاط منها لا تقع على استقامة واحدة. أثبت أنّ هناك على الأقل $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ رباعيّاً محدّباً رؤوسها من بين النقاط المعطاة.**

لنتأمّل n نقطة في المستوي لا تقع أي ثلاث منها على استقامة واحدة. ولتكن A_0 و A_1 و A_2 ثلاث نقاط متتالية من رؤوس أصغر مضلّع محدّب يحوي جميع هذه النقاط.



لنفترض أنّه في جملة متعامدة نظاميّة، كانت إحداثيّات هذه النقاط هي $B_k(x_k, y_k)$ و k عددٌ من $\{1,2,\ldots,n\}$. لنضع

$$\xi = \min\{x_k, 1 \le k \le n\}$$

عندئذ

$$\operatorname{card}(\{k \in \{1,\ldots,n\} : x_k = \xi\}) \in \{1,2\}$$

إذ إن تعريف ξ يضمن كون المجموعة $\{k \in \{1,\ldots,n\} : x_k = \xi\}$ غير خالية، ووجود ثلاثة عناصر فيها يعني وقوع ثلاث نقاط على المستقيم الذي معادلته $x = \xi$. نتأمّل إذن حالتين:

- حالة $\{k \in \{1,\ldots,n\} : x_k = \xi\} = \{k_1\}$. إذن تقع النقاط $(B_k)_{k \ne k_1}$ في نصف المستوي $x > \xi$. وهنا نعرّف في حالة $k \ne k_1$ الأعداد m_k بالصيغة التالية :

$$m_k = \frac{y_k - y_{k_1}}{x_k - x_{k_1}}$$

إنّ هذه الأعداد مختلفة مثنى مثنى لأنّ المساواة $m_r = m_s = m$ تعني وقوع النقاط B_{k_1} و B_r و B_s على المستقيم الذي معادلته $y - y_{k_1} = m(x - x_{k_1})$ وهذا يُخالف الفرضْ، إذن يتيح لنا هذا تعريف الدليلين k_0 و k_1 بالصيغة

$$m_{k_2} = \max\{m_k, k \ne k_1\} \quad \text{و} \quad m_{k_0} = \min\{m_k, k \ne k_1\}$$

ويكفي أن نختار $A_0 = B_{k_0}$ و $A_1 = B_{k_1}$ و $A_2 = B_{k_2}$.

- حالة $\{k \in \{1,\ldots,n\} : x_k = \xi\} = \{k_1, k_2\}$. يمكن أن نفترض أنّ $y_{k_1} < y_{k_2}$. إذن تقع النقاط $(B_k)_{k \notin \{k_1,k_2\}}$ في نصف المستوي $x > \xi$. وهنا نعرّف في حالة $k \ne \{k_1, k_2\}$ الأعداد m_k بالصيغة : $m_k = \dfrac{y_k - y_{k_1}}{x_k - x_{k_1}}$.

وكما سبق نجد هذه الأعداد مختلفة مثنى مثنى، مما يتيح لنا هذا تعريف الدليل k_0 بالصيغة

$$m_{k_0} = \min\{m_k, k \notin \{k_1, k_2\}\}$$

ويكفي أن نختار $A_0 = B_{k_0}$ و $A_1 = B_{k_1}$ و $A_2 = B_{k_2}$.

لنرمز بالرمز $\mathcal{S}$ إلى مجموعة النقاط المتبقيّة وعددها $n-3$. وهي محتواة في منطقة $\mathcal{R}$ هي تقاطع نصفَي مستويين محدّدين بالمستقيمين (A_1A_0) و (A_1A_2). لاحظ أنّ

$$\mathcal{R}\cap(A_0A_1)=\varnothing \text{ و } \mathcal{R}\cap(A_1A_2)=\varnothing \qquad (1)$$

وأنّ

$$[A_0A_2]\backslash\{A_0,A_2\}=\mathcal{R}\cap(A_0A_2) \qquad (2)$$

لنرمز S_1 و S_2 و S_3 إلى القطع المستقيمة $[A_1A_0]$ و $[A_1A_2]$ و $[A_0A_2]$ بالترتيب. لا يمكن لأي مستقيم في المستوي أن يتقاطع مع القطع المستقيمة S_1 و S_2 و S_3 في آن معاً. إذ ما أن يتقاطع هذا المستقيم مع اثنتين منها حتّى يقع رأسان من رؤوس المثلّث في نصف المستوي نفسه، فتقع الضلع التي تصل بينهما في نصف المستوي هذا.

في حالة مجموعة جزئيّة مؤلّفة من عنصرين $\{B,C\}$ من $\mathcal{S}$، نعرّف

$$\ell_{\{B,C\}}=\min\{k:(BC)\cap S_k=\varnothing\}$$

فيكون الرباعي $Q_{\{B,C\}}$ الذي يقبل القطعتين $[BC]$ و $S_{\ell_{\{B,C\}}}$ ضلعين فيه رباعيّاً محدّباً.

- لأنّه، من جهة أولى، لدينا $S_{\ell_{\{B,C\}}}\cap(BC)=\varnothing$.
- ومن جهة ثانية، المستقيم الذي يحمل $S_{\ell_{\{B,C\}}}$ لا يقطع $[BC]$. هذا واضحٌ في حالة $\ell_{\{B,C\}}$ يساوي 1 أو 2 بسبب (1). أمّا عندما $\ell_{\{B,C\}}$ يساوي 3، فهذا ينتج من (2)، لأنّ

$$\begin{aligned}(A_0A_2)\cap[BC]&=(A_0A_2)\cap(\mathcal{R}\cap[BC])\\&=((A_0A_2)\cap\mathcal{R})\cap[BC]\\&=[A_0A_2]\cap[BC]\\&\subset S_3\cap(BC)=\varnothing\end{aligned}$$

من الواضح أنّ التطبيق $\{B,C\}\mapsto Q_{\{B,C\}}$ تطبيقٌ متباينٌ، إذن عددُ الرباعيّات المحدّبة التي رؤوسها من بين النقاط المعطاة أكبر أو يساوي عدد المجموعات الجزئيّة المكوّنة من عنصرين في $\mathcal{S}$، وعددُ هذه يساوي C_{n-3}^2 أي $\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}$. ويتمّ إثبات الخاصّة المطلوبة. ◼

⑥ **نتأمّل أعداداً حقيقيّة** x_1 و x_2 و y_1 و y_2 و z_1 و z_2 **تُحقّق الشروط** $x_1 > 0$ و $x_2 > 0$ و $x_1y_1 > z_1^2$ و $x_2y_2 > z_2^2$، **أثبت أنّ**

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \le \frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}$$

وأعطِ الشرط اللازم والكافي لتتحقّق المساواة.

لنضع $a_k = x_ky_k - z_k^2$ في حالة $k \in \{1,2\}$. ولنضع

$$D = (x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2$$

عندئذ نجد بنشر المقدار السابق أنّ $D = a_1 + a_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2z_1z_2$. ولكن

$$\begin{aligned} x_1y_2 + x_2y_1 &= \frac{x_1}{x_2}(x_2y_2) + \frac{x_2}{x_1}(x_1y_1) = \frac{x_1}{x_2}(z_2^2 + a_2) + \frac{x_2}{x_1}(z_1^2 + a_1) \\ &= x_1x_2\left(\left(\frac{z_2}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{x_1}\right)^2\right) + \frac{x_1a_1}{x_2} + \frac{x_2a_2}{x_1} \\ &= x_1x_2\left(\frac{z_2}{x_2} - \frac{z_1}{x_1}\right)^2 + 2z_1z_2 + \left(\sqrt{\frac{x_1a_1}{x_2}} - \sqrt{\frac{x_2a_2}{x_1}}\right)^2 + 2\sqrt{a_1a_2} \end{aligned}$$

وهكذا نستنتج أنّ

$$\begin{aligned} D &= a_1 + a_2 + 2\sqrt{a_1a_2} + x_1x_2\left(\frac{z_2}{x_2} - \frac{z_1}{x_1}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{x_1a_1}{x_2}} - \sqrt{\frac{x_2a_2}{x_1}}\right)^2 \\ &= 4\sqrt{a_1a_2} + (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 + x_1x_2\left(\frac{z_2}{x_2} - \frac{z_1}{x_1}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{x_1a_1}{x_2}} - \sqrt{\frac{x_2a_2}{x_1}}\right)^2 \end{aligned}$$

إذن نجد بوجه خاصّ أنّ

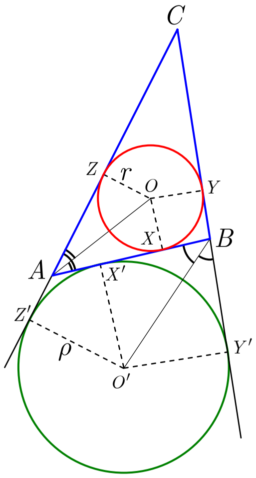
$$D \ge 4\sqrt{a_1a_2} > 0 \qquad (*)$$

مع مساواة إذا وفقط إذا كان $a_1 = a_2$ و $\frac{z_1}{x_1} = \frac{z_2}{x_2}$ و $\frac{x_1a_1}{x_2} = \frac{x_2a_2}{x_1}$ وهذا يكافئ $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$ و $z_1 = z_2$.

وأخيراً، إذا استفدنا من المتراجحة $a_1 + a_2 \ge 2\sqrt{a_1a_2}$، التي تتحقّق فيها المساواة إذا وفقط إذا كان $a_1 = a_2$، استنتجنا من المتراجحة $(*)$ أنّ $(a_1+a_2)D \ge 8a_1a_2$، مع مساواة إذا وفقط إذا كان $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$ و $z_1 = z_2$. ولكنّ هذه المتراجحةَ هي نفسها المتراجحة المطلوبة : $\frac{8}{D} \ge \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1}$. وهكذا يتمّ الإثبات. ◼

أولمبياد الرياضيّات الثاني عشر

① **نتأمّل نقطة** M **من الضلع** $[AB]$ **في مثلّث** ABC. **ولتكن** r **و** r_1 **و** r_2 **أنصاف أقطار الدوائر المماسّة داخلاً في المثلّثات** ABC **و** AMC **و** BMC **بالترتيب. وأخيراً لتكن** ρ **و** ρ_1 **و** ρ_2 **أنصاف أقطار الدوائرالمماسّة خارجاً للمثلّثات** ABC **و** AMC **و** BMC **من الجهة المقابلة للرأس** C **بالترتيب. أثبت أنّ** $r_1 r_2 \rho = r \rho_1 \rho_2$.



نتأمّل في الشكل المجاور الدائرة التي تمسّ أضلاع المثلّث ABC داخلاً، وتلك التي تمسّ أضلاعه خارجاً مقابل الرأس C. نسمّي X و Y و Z نقاط تماس الدائرة الأولى مع المستقيمات (AB) و (BC) و (CA) بالترتيب، ونسمّي كذلك X' و Y' و Z' نقاط تماس الدائرة الثانية مع المستقيمات (AB) و (BC) و (CA) بالترتيب. وأخيراً نرمز كالعادة إلى قياسات زوايا المثلّث ABC بالرموز $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$، وإلى أطوال أضلاعه $AB = c$ و $BC = a$ و $CA = b$، ونكتب p دلالة على نصف محيطه.

- لمّا كان $AX = AZ$ و $BX = BY$ و $CY = CZ$ استنتجنا أنّ

$$AX = p - CY - BY = p - a$$

- ولمّا كان $AX' = AZ'$ و $BX' = BY'$ و $CY' = CZ'$ استنتجنا أنّ

$$a + BX' = b + AX' = \frac{1}{2}\left(a + BX' + b + AX'\right) = p$$

وبوجه خاص $BX' = p - a$.

- بالاستفادة من المثلّث القائم $O'BX'$ ومن كون $\widehat{O'BX'} = \frac{1}{2}\left(\pi - \widehat{B}\right)$ نستنتج أنّ

$$\frac{p-a}{\rho} = \frac{BX'}{O'X'} = \tan\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)$$

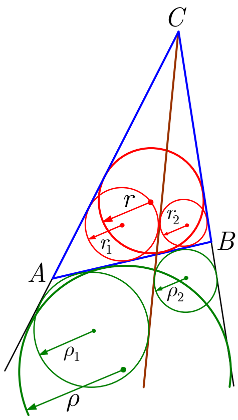
- وبالاستفادة من المثلّث القائم OAX نستنتج أنّ

$$\frac{r}{p-a} = \frac{OX}{AX} = \tan\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)$$

وهكذا نرى أنّ

$$\frac{r}{\rho}=\tan\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)\tan\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)$$

بتطبيق النتيجة السابقة على المثلّث AMC نجد



$$\frac{r_1}{\rho_1}=\tan\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)\tan\left(\frac{\widehat{CMA}}{2}\right)$$

وبتطبيقها على المثلّث BMC نجد

$$\frac{r_2}{\rho_2}=\tan\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)\tan\left(\frac{\widehat{BMC}}{2}\right)$$

ولكن $\widehat{BMC}+\widehat{CMA}=\pi$ إذن

$$\tan\left(\frac{\widehat{BMC}}{2}\right)\tan\left(\frac{\widehat{CMA}}{2}\right)=1$$

ومنه

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}=\tan\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)=\frac{r}{\rho}$$

وهي الخاصّة المطلوبة. ◼

② في حالة عددٍ طبيعي p أكبر تماماً من 1، نكتب التمثيل بالأساس p لعدد طبيعي c بالشكل

$$c=(x_nx_{n-1}\cdots x_0)_p$$

وهذا يعني أنّ الأعداد x_k تنتمي إلى المجموعة $\mathbb{D}_p=\{0,1,\ldots,p-1\}$ وأنّ $x_n>0$ و $c=\sum_{k=0}^{n}x_kp^k$.

نتأمّل عددين طبيعيّين a و b يُحقّقان $a>b\geq 2$. ونتأمّل أعداداً $(x_k)_{0\leq k\leq n}$ من $\mathbb{D}_b$ تُحقّق $x_n>0$ و $x_{n-1}>0$. وأخيراً نعرّف

$$A=(x_nx_{n-1}\cdots x_0)_a\,,\qquad B=(x_nx_{n-1}\cdots x_0)_b$$

$$A'=(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0)_a\,,\quad B'=(x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0)_b$$

أثبت أنّ $A'B<AB'$.

لنلاحظ أنّ $A' = A - x_n a^n$ و $B' = B - x_n b^n$ إذن

$$AB' - BA' = A(B - x_n b^n) - B(A - x_n a^n) = x_n (a^n B - b^n A)$$

ولكن

$$\begin{aligned} a^n B - b^n A &= \sum_{k=0}^{n} x_k \left(a^n b^k - a^k b^n\right) = \sum_{k=0}^{n} x_k a^k b^k \left(a^{n-k} - b^{n-k}\right) \\ &= x_{n-1} a^{n-1} b^{n-1} (a - b) + \sum_{k=2}^{n} x_k a^k b^k \left(a^{n-k} - b^{n-k}\right) \\ &\geq x_{n-1} a^{n-1} b^{n-1} (a - b) \end{aligned}$$

ومنه

$$AB' - BA' \geq x_n x_{n-1} a^{n-1} b^{n-1} (a - b) > 0$$

وهي المتراجحة المطلوبة.

③ **نتأمّل متتالية متزايدة $(a_k)_{k\geq 0}$ من الأعداد الحقيقيّة التي تُحقّق $a_0 = 1$. ونعرّف المتتالية $(b_n)_{n\geq 1}$ بالصيغة**

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}$$

1. أثبت أنّ $0 \leq b_n < 2$ وذلك مهما تكن قيمة n.
2. **أثبت أنّه في حالة c من $[0,2[$ توجد متتالية متزايدة $(a_k)_{k\geq 0}$ تجعل $b_n > c$ بدءاً من دليلٍ معيّن $n = n_0$.**

1. من الواضح أنّ $b_n \geq 0$ بسبب كون المتتالية $(a_k)_{k\geq 0}$ متزايدة. لنلاحظ أنّه في حالة t من المجال $[a_{k-1}, a_k]$ لدينا $\frac{1}{t\sqrt{t}} \leq \frac{1}{a_k\sqrt{a_k}}$ ، ومن ثَمّ

$$\frac{a_k - a_{k-1}}{a_k\sqrt{a_k}} \leq \int_{a_{k-1}}^{a_k} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}$$

ومنه

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k\sqrt{a_k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}} = \int_{a_0}^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}} = \left[-\frac{2}{\sqrt{t}}\right]_1^{a_n} = 2 - \frac{2}{\sqrt{a_n}}$$

وهذا يبرهن أنّ $b_n < 2$.

2. لنتأمّل حالة $a_k = \lambda^{-2k}$ مع $0 < \lambda < 1$. عندئذ نرى مباشرة أنّ

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}(1-\lambda^2)\lambda^k = (1-\lambda^2)\left(\frac{\lambda-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}\right) = (\lambda+\lambda^2)(1-\lambda^n)$$

إذن في حالة $2 > c \geq 0$ ، نختار c' تُحقّق $c < c' < 2$. ولأنّ $\lambda \mapsto \lambda+\lambda^2$ هو تابعٌ مستمرٌّ ومتزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}_+$ ، ويأخذ القيمة 0 عند $\lambda = 0$ والقيمة 2 عند $\lambda = 1$ ، نستنتج وجود قيمة λ_0 من المجال $]0,1[$ تُحقّق $\lambda_0 + \lambda_0^2 = c'$. ثُمّ نجد عدداً طبيعيّاً n_0 يُحقِّق المتراجحة $1 - \frac{c}{c'} > \lambda_0^{n_0}$.

وعليه في حالة المتتالية $(a_k)_{k\geq 0}$ المعرّفة بالصيغة $a_k = \lambda_0^{-2k}$ ، يكون لدينا $b_n > c$ أيّاً كانت قيمة n التي تُحقّق $n \geq n_0$. ■

④ **أوجد جميع الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً n التي تُحقّق الخاصّة التالية : يمكن تجزئة المجموعة $S_n = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ إلى جزأين A_n و B_n على وجه يكون فيه جداء ضرب عناصر A_n مساوياً جداء ضرب عناصر B_n .**

لنفترض وجود عددٍ n يُحقّق الخاصّة المرجوّة. من الواضح أنّ $A_n \neq \varnothing$ و $B_n \neq \varnothing$.

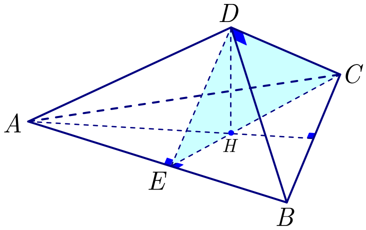
- لنتأمّل عدداً أوّلياً p يقسم أحد عناصر المجموعة S_n . إنّ p يقسم جداء ضرب عناصر A_n أو جداء ضرب عناصر B_n ، ولكنّ هذين المقدارين متساويان، إذن p يقسم عنصراً من A_n ويقسم عنصراً من B_n . وعليه، لا بُدّ أن يقسم p الفرقَ بين هذين العنصرين والذي يساوي عدداً من المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$. إذن $p \in \{2,3,5\}$.
- لنتأمّل I_n مجموعة الأعداد الفرديّة الثلاثة في المجموعة S_n . ولنفترض أنّ اثنين من هذه الأعداد يقبل القسمة على 3 . عندئذ يقبل الفرق بينهما القسمة 3×2 وهذا خُلفٌ. إذن $\operatorname{card}(I_n \cap (3\mathbb{N})) \leq 1$. ونجد بأسلوب مماثلٍ أنّ $\operatorname{card}(I_n \cap (5\mathbb{N})) \leq 1$.
- إذن هناك في I_n عددٌ فرديّ ليس من مضاعفات 3 أو 5 . أي يوجد في S_n عددٌ ليس من مضاعفات 2 أو 3 أو 5 . وبالعودة إلى النقطة الأولى نستنتج أنّ هذا العدد يجب أن يكون 1 . ومن ثَمّ يجب أن يكون $n = 1$.
- وأخيراً، $n = 1$ ليس حلاً للمسألة، إذْ إلى أيِّ الجزأين A_1 أو B_1 ينتمي العدد 5 ؟

وهكذا نرى أنّه لا يوجد عدد طبيعي موجب n يُحقِّق الخاصّة المطلوبة. ■

⑤ **في رباعي الوجوه $ABCD$ لدينا $\widehat{BDC}=\frac{\pi}{2}$ ، والمسقط القائم للنقطة D على المستوي (ABC) هو نقطة تقاطع ارتفاعات المثلّث ABC . أثبت صحّة المساواة**

$$(AB+BC+CA)^2 \le 6\big((AD)^2+(BD)^2+(CD)^2\big)$$

وبيِّن متى تتحقّق المساواة.



لنرمز بالرمز H إلى نقطة تقاطع ارتفاعات المثلّث ABC ، وبالرمز E إلى نقطة تقاطع الارتفاع النازل من C ، أي (CH) ، مع (AB) .

- المستقيم (DH) عمودي على المستوي (ABC) فهو عمودي على جميع المستقيمات فيه، وبوجه خاص نجد $(AB)\perp(DH)$. ولدينا $(AB)\perp(CE)$. لأنّ (CE) ارتفاع في المثلّث ABC .
- نستنتج أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (DEC) . ومنه $(AB)\perp(DE)$.
- من المثلّثات القائمة CEB و CDB و EBD نجد

$$\begin{aligned} CE^2 &= CB^2 - EB^2 && \widehat{CEB}=\tfrac{\pi}{2}\\ &= CD^2+DB^2-EB^2 && \widehat{CDB}=\tfrac{\pi}{2}\\ &= CD^2+DE^2 && \widehat{DEB}=\tfrac{\pi}{2}\end{aligned}$$

وهذا يبرهن على أنّ المثلّث CDE قائم في D . فالمستقيم (CD) عمودي على كلٍّ من المستقيمين (DB) و (DE) فهو إذن عمودي على المستوي (DBE) أي (DBA) ، وبوجه خاص نجد $(DA)\perp(CD)$ أو $\widehat{CDA}=\frac{\pi}{2}$.

- ونبرهن بأسلوب مماثل أنّ $\widehat{BDA}=\frac{\pi}{2}$.
- من المثلّثات ADB و BDC و CDA القائمة في D نجد

$$AB^2+BC^2+CA^2 = 2\big(DA^2+DB^2+DC^2\big)$$

- ولكن من متراجحة كوشي شوارتز لدينا $(a+b+c)^2\le 3\big(a^2+b^2+c^2\big)$ مع مساواة إذا وفقط إذا كان $a=b=c$. إذن

$$(AB+BC+CA)^2 \le 6\big(DA^2+DB^2+DC^2\big)$$

مع مساواة إذا وفقط إذا كان المثلث ABC متساوي الأضلاع. ■

⑥ **نتأمّل 100 نقطة في المستوي، ونفترض أنّ أي ثلاث نقاط منها لا تقع استقامة واحدة. أثبت أنّ نسبة المثلّثات الحادة الزوايا المكوّنة من هذه النقاط لا تزيد على 70%.**

1. لنتأمّل حالة أربعة نقاط A و B و C و D. هناك أربعة مثلّثات رؤوسها من هذه النقاط.

- إذا كانت D تقع داخل المثلّث ABC. عندئذ نستنتج من كون مجموع الزوايا $\widehat{ADB}$ و $\widehat{BDC}$ و $\widehat{CDA}$ يساوي 2π أنّ إحداها على الأقل منفرجة، ومن ثمّ يوجد على الأكثر ثلاثة مثلّثات حادّة الزوايا في هذه الحالة.
- أمّا إذا وقعت D خارج المثلّث ABC. عندئذ لا يمكن أن تكون جميع زوايا الرباعي المحدّب الذي رؤوسه A و B و C و D حادّة لأنّ مجموعها يساوي 2π، فإحداها زاوية غير حادّة والمثلّث الذي يحويها ليس حادّ الزوايا. إذن يوجد على الأكثر ثلاثة مثلّثات حادّة الزوايا في هذه الحالة أيضاً.

2. لنأتِ إلى حالة خمس نقاط. هناك عشرة مثلّثات رؤوسها من هذه النقاط. وهناك خمسة رباعيّات رؤوسها من هذه النقاط. في كلِّ واحدٍ من هذه الرباعيّات ثلاثة مثلّثات حادّة الزوايا على الأكثر. فعدد هذه المثلّثات محدودٌ بالعدد 5×3، ولكننا بذلك نكون قد عدَدْنا كلّ مثلّث حادِّ الزوايا مرتين (لأنّه محتوى في رباعيّين اثنين). إذن عدد المثلّثات الحادة في حالة خمس نقاط محدود من الأعلى بالعدد $7 = \lfloor \frac{15}{2} \rfloor$.

3. لنتأمّل حالة n نقطة مع $n \geq 5$. هناك C_n^3 مثلّثاً رؤوسها من هذه النقاط. وهناك C_n^5 مجموعة جزئيّة مؤلّفة من خمس نقاط. في كلِّ واحدةٍ من هذه المجموعات سبعة مثلّثات حادّة الزوايا على الأكثر. فعدد هذه المثلّثات محدودٌ بالعدد $7\times C_n^5$، ولكننا بذلك نكون قد عدَدْنا كلّ مثلّث حادِّ الزوايا C_{n-3}^2 (إذ هذا هو عدد الخماسيّات التي تحوي هذا المثلّث). إذن عدد المثلّثات الحادة في حالة n نقطة محدود من الأعلى بالعدد $\dfrac{7\times C_n^5}{C_{n-3}^2}$ ونسبتها إلى جميع المثلّثات أصغر أو تساوي

$$\frac{7\times C_n^5}{C_{n-3}^2 C_n^3} = \frac{7}{10}$$

وهذه هي النتيجة المرجوّة. ■

أولمبياد الرياضيّات الثالث عشر

① ليكن n عدداً طبيعيّاً أكبر تماماً من 2. نتأمّل في حالة عنصرٍ $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ من $\mathbb{R}^n$، المقدار $E_n(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ الذي يساوي مجموع n حدّاً هي جداءات الضرب $(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)$ و $(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)$ و... وأخيراً $(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})$. ولتكن $\mathcal{P}_n$ القضيّة

$$«\forall(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n,\quad E_n(a_1,\ldots,a_n)\geq 0»$$

أثبت أنّ $\mathcal{P}_n$ صحيحة إذا وفقط إذا كان $n\in\{3,5\}$.

إذا رمزنا في حالة $A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ من $\mathbb{R}^n$ بالرمز Ω_A إلى كثير الحدود

$$\Omega_A(X)=(X-a_1)\cdots(X-a_n)=\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$$

وجدنا أنّ

$$E_n(A)=E_n(a_1,\ldots,a_n)=\sum_{k=1}^{n}\Omega_A'(a_k)$$

وهذا يبرهن أنّ بوجه خاصّ أنّ $E_n(a_1,\ldots,a_n)=E_n\left(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(n)}\right)$ وذلك أيّاً كان التقابل σ على مجموعة الأعداد $\{1,2,\ldots,n\}$. ومن ثَمّ عند التعامل مع $E_n(a_1,\ldots,a_n)$ يمكن أن نفترض أنّ $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$.

- لنفترض أنّ $n=2m$ مع $m\geq 2$. ولنتأمّل $A=(0,0,\ldots,0,-1)$ من $\mathbb{R}^n$. عندئذ يكون $\Omega_A=X^{2m-1}(X+1)$ ويكون $E_n(A)=-1$. فالقضيّة $\mathcal{P}_{2m}$ خطأ أيّاً كان العدد الطبيعي m الذي يُحقّق $m\geq 2$.

- لنفترض أنّ $n=2m+1$ مع $m\geq 3$. ولنتأمّل $A=\left(0,\ldots,0,1,1,1,\frac{1}{2}\right)$ من $\mathbb{R}^n$. عندئذ يكون $\Omega_A=X^{2m-3}(X-1)^3\left(X-\frac{1}{2}\right)$ ويكون

$$E_n(A)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-3}\left(\frac{1}{2}-1\right)^3=-\frac{1}{2^{2m}}<0$$

فالقضيّة $\mathcal{P}_{2m+1}$ خطأ أيّاً كان العدد الطبيعي m الذي يُحقّق $m\geq 3$.

- لنتأمّل حالة $n = 3$. ولتكن $A = (a_1, a_2, a_3)$ من $\mathbb{R}^3$. يمكن أن نفترض أنّ الأعداد $(a_k)_{1\le k\le 3}$ تُحقّق $a_1 \le a_2 \le a_3$. عندئذ

$$\begin{aligned} E_3(A) &= (a_1-a_2)(a_1-a_3)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)+(a_3-a_1)(a_3-a_2) \\ &= (a_1-a_2)(a_1-a_3-a_2+a_3)+(a_3-a_1)(a_3-a_2) \\ &= (a_1-a_2)^2+(a_3-a_1)(a_3-a_2) \ge 0 \end{aligned}$$

وهذا يبرهن أنّ القضيّة $\mathcal{P}_3$ قضيّة صحيحة.

- لنتأمّل حالة $n = 5$. ولتكن $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ من $\mathbb{R}^5$. يمكن أن نفترض أنّ الأعداد $(a_k)_{1\le k\le 5}$ تُحقّق $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$. عندئذ

$$E_5(A) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$$

مع

$$\begin{aligned} T_1 &= (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_5-a_1) \\ T_2 &= -(a_2-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_5-a_2) \\ T_3 &= (a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_3)(a_5-a_3) \\ T_4 &= -(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_5-a_4) \\ T_5 &= (a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4) \end{aligned}$$

إذ رتّبنا حدود الجداءات لتكون جميعها موجبة.

  - ولكن لأنّ $0 \le a_k - a_2 \le a_k - a_1$ في حالة k من $\{3, 4, 5\}$ نستنتج أنّ

$$(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_5-a_1) \ge (a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_5-a_2)$$

وهذا يبرهن أنّ $T_1 + T_2 \ge 0$.

  - وكذلك لأنّ $0 \le a_4 - a_k \le a_5 - a_k$ في حالة k من $\{1, 2, 3\}$ نستنتج أنّ

$$(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3) \ge (a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)$$

وهذا يبرهن أنّ $T_4 + T_5 \ge 0$.

  - وأخيراً، إذا لاحظنا أنّ T_3 أكبر أو يساوي الصفر استنتجنا أنّ $E_5(A) \ge 0$.

وهذا يبرهن أنّ القضيّة $\mathcal{P}_5$ قضيّة صحيحة. وبذا يتمّ إثبات المطلوب. ■

② **ليكن P_1 مجسّماً محدّباً متعدّد الوجوه له تسعة رؤوس $(A_k)_{1\le k\le 9}$. وليكن P_i صورة P_1 وفق الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{A_1A_i}$. أثبت وجود اثنين من المجسمّات التسعة $(P_i)_{1\le i\le 9}$ يشتركان بنقطة تقع داخل كلٍّ منهما.**

لنتأمّل التحاكي $h = \mathcal{H}_{A_1,2}$ الذي مركزه A_1 ونسبته 2. ثُمّ لنتأمّل المجسّم $Q = h(P_1)$. لنثبت أنّ

$$\forall i \in \{1,\ldots,9\}, \quad P_i \subset Q \qquad (1)$$

لتكن M نقطة من P_i، استناداً إلى تعريف P_i، توجد M_1 من P_1 تُحقّق

$$\overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{A_1A_i} + \overrightarrow{A_1M_1}$$

وإذا كانت N_1 منتصف القطعة $[M_1A_i]$ استنتجنا مما سبق أنّ

$$\overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{A_1A_i} + \overrightarrow{A_1M_1} = 2\overrightarrow{A_1N_1} \qquad (2)$$

ولكن نستنتج من انتماء M_1 و A_i إلى P_1 ومن كون P_1 محدّباً أنّ N_1 تنتمي إلى P_1. وبناءً على (2) لدينا $M = h(N_1)$، إذن $M \in h(P_1) = Q$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ P_i محتوى في Q.

إذا افترضنا أنّ أيّ اثنين من المجسّمات $(P_i)_{1\le i\le 9}$ لا يشترك داخلاهما بنقطة استنتجنا أنّ

$$\mathrm{vol}\Big(\bigcup_{1\le i\le 9} P_i\Big) = \sum_{i=1}^{9} \mathrm{vol}(P_i) = 9\,\mathrm{vol}(P_1)$$

ولكن استناداً إلى (1) لدينا $\bigcup_{1\le i\le 9} P \subset Q$، إذن

$$\mathrm{vol}\Big(\bigcup_{1\le i\le 9} P\Big) \le \mathrm{vol}(Q)$$

وهذا يقتضي أنّ $9\,\mathrm{vol}(P_1) \le \mathrm{vol}(Q)$، ولكنّ Q هي صورة P_1 وفق تحاكٍ نسبته 2 إذن $\mathrm{vol}(Q) = 2^3\,\mathrm{vol}(P_1)$، ونصل بذلك إلى التناقض

$$9\,\mathrm{vol}(P_1) \le 8\,\mathrm{vol}(P_1)$$

فلا بُدّ أن يتقاطع داخلا اثنين من المجسّمات $(P_i)_{1\le i\le 9}$.

لاحظ أنّ حالة المكعّب تبيّن أنّ النتيجة خطأ في حالة ثماني نقاط.

③ **أثبت وجود مجموعة لانهائيّة من أعدادٍ من الصيغة $2^n - 3$، تكون عناصرها أوّليّة فيما بينها مثنى مثنى.**

لنبدأ بإثبات الخاصّة التالية :

خاصّة : إذا كان m عدداً فرديّاً فيوجد عددٌ r يجعل $2^r - 1$ مضاعفاً للعدد m.

في الحقيقة، لا يمكن أن يكون التطبيق

$$\varphi : \{0,1,\ldots,m\} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : k \mapsto 2^k \bmod m$$

متبايناً، فيوجد عددان مختلفان k_1 و k_2 يُحقّقان

$$0 \le k_1 < k_2 \le m$$

و

$$2^{k_1} = 2^{k_2} \bmod m$$

ولأنّ $\gcd(2,m) = 1$ استنتجنا من ذلك أنّ $2^{k_2-k_1} = 1 \bmod m$، ويكفي إذن أن نختار $r = k_2 - k_1$.

لنأتِ إلى مسألتنا ولننشئ متتالية $(n_r)_{r\ge1}$ تُحقّق، في حالة $r \ge 1$، الخاصّة التالية

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,r\},\quad \gcd(2^{n_{r+1}} - 3, 2^{n_k} - 3) = 1$$

- نعرّف $n_1 = 3$ و $n_2 = 4$.
- لنفترض أننا عرّفنا $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ وأنّها تُحقّق $\gcd(2^{n_j} - 3, 2^{n_i} - 3) = 1$ في حالة $1 \le i < j \le r$. عندئذ نعرّف العدد

$$m = \prod_{j=1}^{r} (2^{n_j} - 3)$$

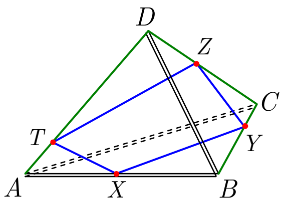
فنجد بناءً على الخاصّة التي بدأنا بإثباتها عدداً n_{r+1} يجعل $2^{n_{r+1}} - 1$ مُضاعفاً للعدد m. فيكون العدد $2^{n_{r+1}} - 3$ أوّلياً مع m وهذا يقتضي أن يكون

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,r\},\quad \gcd(2^{n_{r+1}} - 3, 2^{n_k} - 3) = 1$$

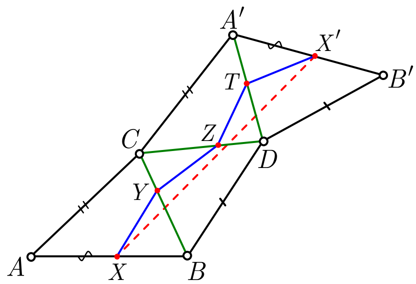
وهكذا نعرّف بالتدريج المتتالية $(n_r)_{r\ge1}$ المطلوبة. فتكون المجموعة $\{2^{n_r} - 3 : r \ge 1\}$ مجموعة لانهائيّة عناصرها أوّليّة فيما بينها مثنى مثنى. ◼

④ **نفترض أنّ جميع وجوه رباعي الوجوه $ABCD$ مثلّثات حادّة الزوايا. نتأمّل نقطة X تنتمي إلى داخل القطعة $[AB]$، ونقطة ثانية Y داخل القطعة $[BC]$، ونقطة ثالثة Z داخل القطعة $[CD]$، وأخيراً، نتأمّل نقطة رابعة T داخل القطعة $[AD]$.**

1. **أثبت أنّه في حالة $\widehat{DAB}+\widehat{BCD}\neq\widehat{CDA}+\widehat{ABC}$ فإنّ الخط المنكسر المغلق $XYZTX$ ليس أصغريّ الطول.**
2. **أثبت كذلك أنّه في حالة $\widehat{DAB}+\widehat{BCD}=\widehat{CDA}+\widehat{ABC}$ يوجد عددٌ لا نهائي من الخطوط المنكسرة المغلقة $XYZTX$ الأصغريّة الطول، وطول كلٍّ منها يساوي $2AC\sin\alpha$ مع $\alpha=\frac{1}{2}\left(\widehat{BAC}+\widehat{CAD}+\widehat{DAB}\right)$.**



لنفترض أنّ رباعي الوجوه $ABCD$ مصنوع من ورق مقوّى، ولنقصّه وفق الأضلاع $[AB]$ و$[BD]$ و$[AC]$، ثُمّ لنبسطه في شكلٍ مستوٍ. نحصل بذلك على المضلّع السداسي الأضلاع $ABDB'A'C$ المبيّن في الشكل التالي :



ونستنتج من كون وجوه $ABCD$ مثلّثات حادّة الزوايا أنّ الرباعيّات $ABDC$ و $BDA'C$ و $DB'A'C$ رباعيّات محدّبة.

□ لنفترض وجود مضلّع منكسر $XYZTX$ ذي طول أصغري. عندئذ نستنتج بالنظر إلى الرباعي $ABDC$ أنّ X و Y و Z تقع على استقامة واحدة، وبالنظر إلى الرباعي $BDA'C$ نستنتج أنّ Y و Z و T تقع أيضاً على استقامة واحدة، وكذلك تقع النقاط Z و T و X' على استقامة واحدة. وعلى هذا تقع النقاط Y و Z و T على المستقيم (XX').

- ولكن إذا كان $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$ مع $0 < t < 1$، كان $\overrightarrow{A'X'} = t\overrightarrow{A'B'}$. وعليه

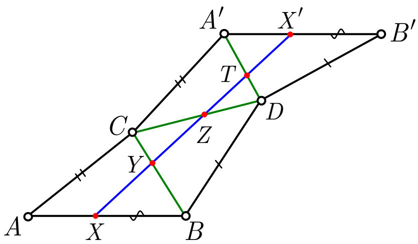
$$\begin{aligned}\overrightarrow{XX'} &= \overrightarrow{AX'} - \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{A'X'} + \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AX}\\ &= \overrightarrow{AA'} + t\left(\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{AB}\right)\end{aligned}$$

وعليه إذا عرّفنا $f(t) = \left\|\overrightarrow{XX'}\right\|^2$ استنتجنا العلاقة التالية :

$$f(t) = t^2\left\|\vec{V}\right\|^2 + 2t\overrightarrow{AA'}\cdot\vec{V} + \left\|\overrightarrow{AA'}\right\|^2 \qquad (1)$$

وقد عرّفنا $\vec{V} = \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{AB}$.

- بملاحظة أنّ المستقيم (XX') يقسم المستوي إلى نصفين أحدهما يحوي A و A' والثاني يحوي B و B'، وأنّ $AB = A'B'$، نرى أنّ المساواة $AA' = BB'$ تكافئ كون كلّ ضلعين متقابلين في الرباعي $ABB'A'$ متساويين، وهذا بدوره يُكافئ علاقة التوازي $(AB) \parallel (A'B')$، ويُكافئ المساواة $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$، وهذه تُكافئ $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.



❶ حالة $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. في هذه الحالة نجد، بناءً على (1)، أنّ $XX' = AA'$ وذلك أيّاً كانت X من داخل القطعة المستقيمة $[AB]$، فيوجد عددٌ لا نهائي من الخطوط المنكسرة $XYZTX$ التي لجميعها طولٌ أصغري $\ell = AA'$. وإذا تأمّلنا المثلّث المتساوي الساقين ACA' استنتجنا أنّ

$$\ell = 2CA\sin\left(\tfrac{1}{2}\widehat{ACA'}\right)$$

❷ حالة $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$. في هذه الحالة لدينا $AA' \neq BB'$، لنفترض على سبيل المثال أنّ $BB' < AA'$. عندئذ بتطبيق العلاقة (1) في حالة $t = 1$ نجد

$$BB'^2 = AA'^2 + \left\|\vec{V}\right\|^2 + 2\overrightarrow{AA'}\cdot\vec{V} < AA'^2$$

ومن ثَمّ $\left\|\vec{V}\right\|^2 + 2\overrightarrow{AA'}\cdot\vec{V} < 0$. وهذا يقتضي أنّ أكبر قيمة للمقدار $f'(t)$ على المجال $[0,1]$ هي قيمة سالبة، فالتابع $t \mapsto f(t)$ تابعٌ متناقصٌ تماماً على المجال $[0,1]$. ومن ثَمّ لا يمكن لهذا التابع أن يبلغ قيمة صغرى حدّيّة عند قيمة تقع داخل هذا المجال.

▫ لنبحث الآن عن الشرط اللازم والكافي ليكون $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$. وذلك بدلالة زوايا رباعي الوجوه.

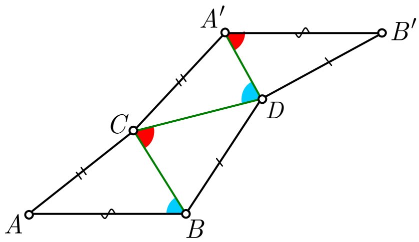
في الحقيقة، لدينا

$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}) &= (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}})+(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}})+(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA'}})+(\widehat{\overrightarrow{DA'},\overrightarrow{A'B'}})\\
&= \pi-\widehat{CBA}+\widehat{BCD}-\pi+\pi-\widehat{ADC}+\widehat{DAB}-\pi\\
&= \widehat{BCD}+\widehat{DAB}-\widehat{CBA}-\widehat{ADC}
\end{aligned}$$

إذن الشرط اللازم والكافي ليكون $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ هو

$$\widehat{BCD}+\widehat{DAB}=\widehat{CBA}+\widehat{ADC} \tag{2}$$

كما هو موضّح بالشكل التالي :



وفي هذه الحالة يكون لدينا

$$\begin{aligned}
\widehat{ACA'} &= 2\pi-\widehat{ACB}-\widehat{BCD}-\widehat{DCA'}\\
&= \left(\pi-\widehat{ACB}\right)+\left(\pi-\widehat{DCA'}\right)-\widehat{BCD}\\
&= \widehat{BAC}+\widehat{CBA}+\widehat{A'DC}+\widehat{CA'D}-\widehat{BCD}\\
&= \widehat{BAC}+\widehat{CAD}+\underbrace{\widehat{CBA}+\widehat{ADC}-\widehat{BCD}}_{\widehat{DAB}}\\
&= \widehat{BAC}+\widehat{CAD}+\widehat{DAB}
\end{aligned}$$

ومن ثّمّ

$$\ell=2AC\sin\left(\frac{\widehat{BAC}+\widehat{CAD}+\widehat{DAB}}{2}\right)$$

وهي النتيجة المرجوّة. ◼

⑤ **أثبت أنّه مهما يكن العدد الطبيعي الموجب تماماً m، توجد في المستوي مجموعة منتهية S من النقاط تُحقّق أنّه مهما تكن النقطة A من S توجد تماماً m نقطة من S تبعد عن A مسافة تساوي 1.**

لنطابق بين نقاط المستوي ومجموعة الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$. ولنرمز بالرمز $\mathbb{N}_m$ إلى مجموعة الأعداد $\{1,2,\ldots,m\}$. ولنكتب $C(a,r)$ دلالة على الدائرة التي مركزها a ونصف قطرها r. وأخيراً في حالة أعدادٍ عقديّة $(u_k)_{k\in\mathbb{N}_m}$ ومجموعة جزئيّة B من $\mathbb{N}_m$ نكتب

$$u_B = \sum_{k\in B} u_k$$ مع الاصطلاح المتعارف $u_\varnothing = 0$.

لنبرهن بالتدريج على العدد m من $\mathbb{N}^*$ صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_m$ التالية.

« توجد متتالية منتهية $(u_k)_{k\in\mathbb{N}_m}$ من عناصر الدائرة $\mathfrak{C}_0 = C(0,1)$ تُحقّق الخاصّتين التاليتين :

❶ التابع $B \overset{\varphi}{\mapsto} u_B$ المعرّف على $\mathcal{P}(\mathbb{N}_m)$، مجموعة أجزاء $\mathbb{N}_m$، ويأخذ قيمه في $\mathbb{C}$ تابعٌ متباينٌ.

❷ مهما تكن B و B' من $\mathcal{P}(\mathbb{N}_m)$ يتحقّق الاقتضاء

$$\operatorname{card}(B\Delta B') > 1 \Rightarrow |u_B - u_{B'}| \neq 1$$. »

- حالة $m = 1$. في هذه الحالة يكفي أن نأخذ $u_1 = 1$، يُعطى التابع φ كما يلي :

$$u_\varnothing = 0 \quad \text{و} \quad u_{\{1\}} = 1 .$$

والشرطان ❶ و ❷ محقّقان في هذه الحالة وضوحاً. إذن $\mathbb{P}_1$ صحيحة.

- حالة $m = 2$. ننطلق من u_1 الذي عرّفناه آنفاً ونسعى إلى تعيين $u_2 = a$ من الدائرة $\mathfrak{C}_0$ بأسلوب تتحقّق فيه الشروط المرجوّة. في هذه الحالة يُعطى التابع φ كما يلي :

$$u_\varnothing = 0,\ u_{\{1\}} = 1,\ u_{\{2\}} = a,\ u_{\{1,2\}} = 1 + a$$

يتحقّق الشرط ❶ إذا وفقط إذا كانت الأعداد $\{0,1,a,1+a\}$ مختلفة مثنى مثنى، وهذا يُكافئ $a+1 \neq 0$ و $a \neq 1$ إذن يتحقّق الشرط ❶ إذا وفقط إذا كان $a \notin \{-1,1\}$.

ويتحقّق الشرط ❷ إذا وفقط إذا كان $\left|u_{\{1,2\}} - u_\varnothing\right| \neq 1$ و $\left|u_{\{1\}} - u_{\{2\}}\right| \neq 1$ أي $|a+1| \neq 1$ و $|a-1| \neq 1$. إذن يتحقّق الشرط ❷ إذا وفقط إذا كان

$$a \notin C(1,1) \cup C(-1,1)$$

ولكن كلٌّ من الدائرتين $C(1,1)$ و $C(-1,1)$ تتقاطع مع $\mathfrak{C}_0$ في نقطتين، فالمجموعة

$$(\{-1,1\}\cup C(-1,1)\cup C(1,1))\cap \mathfrak{C}_0 = \{1,-1,\mathrm{j},\mathrm{j}^2,-\mathrm{j},-\mathrm{j}^2\}$$

مع $\mathrm{j}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$، تحوي ستة عناصر، ويكفي أن نختار a عنصراً من $\mathfrak{C}_0$ لا ينتمي إليها حتّى يتحقّق الشرطان ❶ و ❷ في آن معاً. ومنه نستنتج صحّة القضيّة $\mathbb{P}_2$ صحيحة.

▪ لنثبت صحّة الاقتضاء $\mathbb{P}_m \Rightarrow \mathbb{P}_{m+1}$. نفترض إذن وجود متتالية منتهية $(u_k)_{k\in\mathbb{N}_m}$ من عناصر الدائرة $\mathfrak{C}_0$ تُحقّق الشرطين ❶ و ❷.

ولنبحث عن $u_{m+1}=a$ من الدائرة $\mathfrak{C}_0$ لتُحقّق المتتالية الموسّعة $(u_k)_{k\in\mathbb{N}_{m+1}}$ الشرطين المطلوبين.

▫ يتحقّق الشرط ❶ إذا وفقط إذا كانت المجموعتان

$$\{u_B : B\subset \mathbb{N}_m\} \text{ و } \{a+u_B : B\subset \mathbb{N}_m\}$$

منفصلتين، أي إذا كان

$$a\notin \{u_B-u_{B'} : B\subset \mathbb{N}_m, B'\subset \mathbb{N}_m\}$$

ولكنّ المتتالية $(u_k)_{k\in\mathbb{N}_m}$ تُحقّق الشرط ❷، إذن $u_B-u_{B'}\notin \mathfrak{C}_0$ في حالة $B=B'$ أو $\operatorname{card}(B\Delta B')>1$، فالشرط السابق يُكافئ

$$a\notin \{u_B-u_{B'} : B\subset \mathbb{N}_m, B'\subset \mathbb{N}_m, \operatorname{card}(B\Delta B')=1\}$$

أو $a\notin \mathcal{E}_0$ وقد عرّفنا

$$\mathcal{E}_0=\{\varepsilon u_k : k\in\mathbb{N}_m, \varepsilon\in\{-1,1\}\}$$

▫ ويتحقّق الشرط ❷ إذا وفقط إذا كان $|a+u_B-u_{B'}|\neq 1$ مهما يكن الجزئان المختلفان B و B' من أجزاء $\mathbb{N}_m$. وهذا يُكافئ

$$a\notin \bigcup\{C(u_B-u_{B'},1) : B\subset \mathbb{N}_m, B'\subset \mathbb{N}_m, B\neq B'\}$$

ولكن، كلٌّ واحدة من هذه الدوائر، التي عددها منته، تتقاطع مع $\mathfrak{C}_0$ بنقطتين على الأكثر، فالمجموعة

$$\mathcal{E}_1=\mathfrak{C}_0\cap\left(\bigcup\{C(u_B-u_{B'},1) : B\subset \mathbb{N}_m, B'\subset \mathbb{N}_m, B\neq B'\}\right)$$

مجموعة منتهية. عدد عناصرها يساوي على الأكثر $2(3^m-1)$.

وعليه يكفي أن نختار a أي عنصر من المجموعة غير المنتهية $\mathfrak{C}_0\backslash(\mathcal{E}_0\cup\mathcal{E}_1)$، حتّى تُحقق المتتالية $(u_k)_{k\in\mathbb{N}_{m+1}}$ مع $u_{m+1}=a$ الشرطين المطلوبين. فالقضيّة $\mathbb{P}_{m+1}$ صحيحة أيضاً.

نأتي الآن إلى المسألة المطروحة. نتأمّل في حالة m من $\mathbb{N}^*$، متتاليةً $(u_k)_{1\leq k\leq m}$ من الدائرة $\mathfrak{C}_0$ تُحقّق الشرطين ❶ و ❷. عندئذ نعرّف المجموعة

$$S_m = \{u_B : B \subset \mathbb{N}_m\} = \operatorname{Im}\varphi$$

التي عدد عناصرها يساوي 2^m عنصراً، إذْ إنّ φ يعرّف تقابلاً بين S_m و $\mathcal{P}(\mathbb{N}_m)$، وذلك بناءً على ❶.

لتكن u من S_m. عندئذ توجد مجموعة جزئيّة وحيدة B من $\mathbb{N}_m$ تُحقّق $u = u_B$. عندئذ نعرّف النقاط من S_m المُلازِمة للنقطة u بأنّها عناصر المجموعة

$$\mathcal{N}_u = \left\{u' \in S_m : \operatorname{card}\left(B\Delta\varphi^{-1}(u')\right) = 1\right\}$$

يعرّف التطبيق $\varphi_B : \mathbb{N}_m \to \mathcal{N}_u,\ k \mapsto u_{\{k\}\Delta B}$ تقابلاً، تقابله العكسي هو التطبيق الذي يقرن بكل u' من $\mathcal{N}_B$ العنصرَ الوحيد الموجود في $B\Delta\varphi^{-1}(u')$، إذن

$$\operatorname{card}(\mathcal{N}_u) = m$$

لنتأمّل عنصراً v من S_m مختلفاً عن u. ولنعرّف $B' = \varphi^{-1}(v)$.

- إذا كان $v \notin \mathcal{N}_u$، كان $\operatorname{card}(B\Delta B') > 1$ وبناءً على ❷ استنتجنا

$$|u - v| = |u_B - u_{B'}| \neq 1$$

- وإذا كان $v \in \mathcal{N}_u$، استنتجنا أنّه يوجد k من $\mathbb{N}_m$ يُحقّق $\varphi_B(k) = v$، أي $B' = B\Delta\{k\}$. ومن ثَمّ

$$|u - v| = |u_B - u_{B'}| = |u_k| = 1.$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $\mathcal{N}_u = \{v \in S_m : |u - v| = 1\}$، ومن ثَمّ

$$\forall u \in S_m,\quad \operatorname{card}(\{v \in S_m : |u - v| = 1\}) = m$$

والمجموعة S_m تُحقّق الخاصّة المطلوبة. ◼

⑥ **لتكن $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ مصفوفة مربّعة جميع ثوابتها أعداد طبيعيّة أكبر أو تساوي 0. نفترض أنّه في حالة $a_{ij} = 0$ يكون مجموع ثوابت السطر ذي الدليل i والعمود ذي الدليل j أكبر أو يساوي n. أثبت أنّ مجموع ثوابت المصفوفة A أكبر أو يساوي $\dfrac{n^2}{2}$.**

لنعرّف في حالة (i,j) من $\{1,\ldots,n\}^2$ المقادير

$$C_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \quad \text{و} \quad L_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}$$

ثُمّ لنعرّف $x = \min(L_1, L_2, \ldots, L_n, C_1, C_2, \ldots, C_n)$، يمكن أن نفترض وجود i_0 تُحقّق $x = L_{i_0}$، وإلاّ طبّقنا كامل الدراسة على منقول المصفوفة A، أي تلك التي أسطرها هي أعمدة A وأعمدتها هي أسطر A.

- في حالة $x \geq \frac{n}{2}$، يكون مجموع ثوابت المصفوفة، الذي يساوي $\sum_{i=1}^{n} L_i$، أكبر أو يساوي nx وهذا بدوره أكبر أو يساوي $\frac{n^2}{2}$.
- في حالة $x < \frac{n}{2}$، نعرّف $J = \{j : a_{i_0 j} > 0\}$، ولأنّ $\forall j \in J,\ a_{i_0 j} \geq 1$ نجد

$$\operatorname{card}(J) \leq \sum_{j\in J} a_{i_0 j} = L_{i_0} = x < \frac{n}{2}$$

نعرّف إذن $y = \operatorname{card}(J)$، فيكون $y < \frac{n}{2}$.

لنلاحظ أنّه استناداً إلى الفرْض لدينا

$$\sum_{j\notin J} (C_j + L_{i_0}) \geq n \operatorname{card}(\{1,\ldots,n\}\backslash J) = n(n-y)$$

ومن ثَمّ

$$\sum_{j\notin J} C_j \geq n(n-y) - x(n-y) = (n-x)(n-y)$$

ومن جهة أخرى

$$\sum_{j\in J} C_j \geq x \operatorname{card}(J) = xy$$

وعليه

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} C_j &\geq xy + (n-x)(n-y) \\
&\geq n^2 - (x+y)n + 2xy \\
&\geq \frac{n^2}{2} + \frac{n^2 - 2(x+y)n + 4xy}{2} \\
&\geq \frac{n^2}{2} + \frac{(n-2x)(n-2y)}{2} > \frac{n^2}{2}
\end{aligned}$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أن مجموع ثوابت المصفوفة A أكبر أو يساوي $\frac{n^2}{2}$. ويتم الإثبات.

ملاحظة : تبيّن حالة المصفوفة $A=\left(a_{ij}\right)$ المعرّفة بالصيغة

$$a_{ij}=\frac{1+(-1)^{i+j}}{2}$$

أنّه في هذه الحالة لدينا

$$\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}=\left\lceil\frac{n^2}{2}\right\rceil$$

فالنتيجة السابقة هي أفضل ما يمكن.

أولمبياد الرياضيّات الرابع عشر

① **نتأمّل مجموعة جزئيّة S مؤلّفة من عشرة أعداد طبيعيّة من المجموعة $\{10,11,\ldots,99\}$. أثبت أنّ S تحوي مجموعتين جزئيّتين منفصلتين لهما مجموع العناصر نفسه.**

لتكن S مجموعة جزئيّة من $\{10,11,\ldots,99\}$. ولنفترض أنّ $\operatorname{card}(S)=10$. نرمز إلى مجموعة أجزاء S بالرمز $\mathcal{P}(S)$، ونتأمّل التابع

$$\varphi:\mathcal{P}(S)\to\mathbb{N},\ \varphi(B)=\sum_{b\in S}b$$

مع الاصطلاح $\sum_{b\in\varnothing}b=0$. نلاحظ أنّ

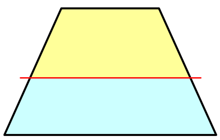
$$\forall B\subset S,\quad 0\le\varphi(B)\le\sum_{k=90}^{99}k=945$$

إذن يأخذ التابع φ قيمه في المجموعة $\{0,1,\ldots,945\}$ التي عدد عناصرها 946 في حين أنّ $\operatorname{card}(\mathcal{P}(S))=2^{10}=1024$، فلا يُمكن أن يكون φ متبايناً. وتوجد في S مجموعتان جزئيّتان مختلفتان A و B تُحقّقان $\varphi(A)=\varphi(B)$، وعليه تكون $A'=A\backslash B$ و $B'=B\backslash A$ مجموعتين جزئيّتين منفصلتين من S تُحقّقان

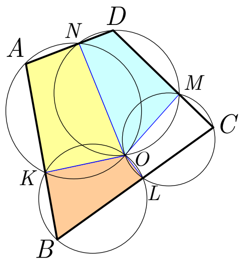
$$\sum_{a\in A'}a=\sum_{b\in B'}b$$

وبالطبع لا يمكن أن يكون هذا المجموع المشترك صفراً وإلاّ نتج من ذلك أنّ $A'=B'=\varnothing$، الأمر الذي يُكافئ $A=B$. وبذا يتمّ إثبات المطلوب.

② **نُعطى عدداً طبيعيّاً n يُحقّق $n>4$. أثبت أنّه يمكن تجزئة كلِّ رباعي دائري إلى n رباعيّاً دائريّاً.**



الفكرة الأولى، هي أنّه في حالة رباعيّ دائريّ، هناك تكافؤ بين وجود ضلعين متوازيين فيه، وبين كونه شبه منحرف متساوي الساقين، وعليه يمكن تجزئة مثل هذا الرباعي الدائري إلى أيّ عدد من الرباعيّات الدائريّة بوساطة مستقيمات توازي قاعدتيه.



أمّا الفكرة الثانية، فهي أنّه في حالة رُباعيّ دائريّ $ABCD$. يمكن تجزئة هذا الرباعي بأساليب متعدّدة إلى أربعة رُباعيّات دائريّة. نبدأ بنقطة O تقع داخل الرباعي، ونختار من حيث المبدأ نقطة ما K على الضلع $[AB]$. فإذا قطعت الدائرة المارّة برؤوس المثلّث OKB الضلع $[BC]$ في L، وقطعت الدائرة المارّة برؤوس المثلّث OLC الضلع $[DC]$ في M، وقطعت الدائرة المارّة برؤوس المثلّث OMD الضلع $[AD]$ في N، كانت الرباعيّات $OKBL$ و $OLCM$ و $OMDN$ و $ONAK$ تجزئة للرباعي $ABCD$ إلى أربعة رُباعيّات دائريّة.

في الحقيقة، علينا فقط أن نتيقّن أنّ الرباعي $ONAK$ رباعي دائري. ولكن

$$\widehat{KOL} = \pi - \widehat{B} \quad \text{و} \quad \widehat{LOM} = \pi - \widehat{C} = \widehat{A} \quad \text{و} \quad \widehat{MON} = \pi - \widehat{D}$$

إذن

$$\begin{aligned}\widehat{NOK} &= 2\pi - \left(\pi - \widehat{B}\right) - \widehat{A} - \left(\pi - \widehat{D}\right)\\ &= \underline{\widehat{B} + \widehat{D}} - \widehat{A} = \pi - \widehat{A}\end{aligned}$$

وهذا يبرهن أنّ الرباعي $ONAK$ دائري أيضاً.

يكفي إذن للإجابة عن السؤال المطروح أن نثبتَ أنّه، في الإنشاء السابق، يمكن دوما اختيار O و K بأسلوب يجعل أحد الرباعيّات الدائريّة في التجزئة السابقة يحوي ضلعين متوازيين.

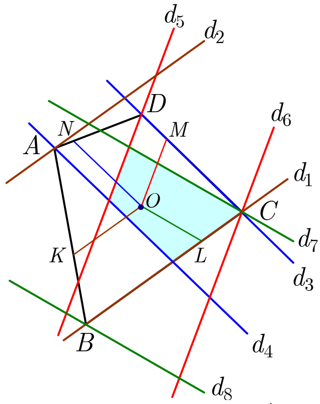
لنفترض أننا نرغب أن يكون $(OK) \parallel (BC)$، إذن إلى جانب اختيار O داخل الرباعي الدائري $ABCD$ يجب علينا تحقيق الشروط التالية :

❶ يجب أن نختار O بين المستقيمين $d_1 = (BC)$ والمستقيم d_2 الذي يوازي d_1 ويمر بالنقطة A. حتّى نضمن وقوع K على القطعة المستقيمة $[AB]$.

❷ في هذه الحالة، لأنّ $\widehat{OKA} = \widehat{B}$ نستنتج أنّ $\widehat{ONA} = \widehat{C}$، ومن ثَمّ $(ON) \parallel (DC)$ فحتّى نضمن وقوع N على القطعة المستقيمة $[AD]$، يجب أن نختار O بين المستقيمين $d_3 = (CD)$ والمستقيم d_4 الذي يوازي d_3 ويمر بالنقطة A.

❸ الرباعي الدائري $OMDN$، شبه منحرف متساوي الساقين، فالزاوية $\widehat{DMO}$ تساوي $\widehat{D}$. فحتّى نضمن وقوع M على القطعة المستقيمة $[CD]$، يجب أن نختار O بين المستقيمين d_5 نظير (AD) بالنسبة إلى المستقيم (CD). والمستقيم d_6 الذي يوازي d_5 ويمر بالنقطة C.

❹ وأخيراً، الرباعي الدائري $OKBL$، شبه منحرف متساوي الساقين، فالزاوية $\widehat{OLB}$ تساوي $\widehat{B}$. فحتّى نضمن وقوع L على القطعة المستقيمة $[BC]$، يجب أن نختار O بين المستقيمين d_7 نظير (AB) بالنسبة إلى المستقيم (BC). والمستقيم d_8 الذي يوازي d_7 ويمر بالنقطة C.



وهنا نتيقّن بسهولة أنّه يمكن دوماً اختيار النقطة O في جوار الرأس C، لتقع في تقاطع المناطق السابقة، فنحصل على الإنشاء المطلوب. بل إذا كانت $\widehat{C}$ أصغر زوايا المضلع، وقعت جميع نقاط المضلّع القريبة من O في تقاطع المناطق السابقة.

③ أثبت أنّه في حالة عددين طبيعيّين n و m، يكون العدد $(2m)!(2n)!$ دوماً من مضاعفات العدد $m!n!(n+m)!$.

لنتأمّل في حالة (n,m) من $\mathbb{N}^2$ النسبة

$$A_{n,m} = \frac{(2n)!(2m)!}{n!m!(n+m)!}$$

ولنبحث عن علاقة تدريجيّة تفيد في تعريف الحدود $(A_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$. نلاحظ مباشرة أنّ

$$A_{n,m+1} = \frac{2(2m+1)}{n+m+1}A_{n,m} \quad \text{و} \quad A_{n+1,m} = \frac{2(2n+1)}{n+m+1}A_{n,m}$$

ومن ثَمّ

$$A_{n+1,m} + A_{n,m+1} = \left(\frac{2(2n+1)}{n+m} + \frac{2(2m+1)}{n+m}\right)A_{n,m} = 4A_{n,m}$$

وهكذا نكون فد أثبتنا العلاقة التدريجيّة البسيطة التالية :

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2,\quad A_{n+1,m}=4A_{n,m}-A_{n,m+1} \tag{1}$$

لنتأمّل في حالة n من $\mathbb{N}$ الخاصّة $\mathbb{P}_n$ التالية «$\forall m\in\mathbb{N},\ A_{n,m}\in\mathbb{N}$».

- الخاصّة $\mathbb{P}_0$ صحيحة وضوحاً لأنّ

$$A_{0,m}=\frac{(2m)!}{(m!)^2}=C_{2m}^{m}\in\mathbb{N}$$

- كما إنّه من الواضح من العلاقة (1) أنّ $\mathbb{P}_{n+1}\Rightarrow\mathbb{P}_n$، لأنّ الأعداد $A_{n,m}$ موجبة.

وهكذا نكون قد أثبتنا بالتدريج أنّ $\mathbb{P}_n$ صحيحة أيّاً كان العدد n. وهي الخاصّة المطلوبة. ■

④ **أوجد جميع الحلول الموجبة تماماً لجملة المتراجحات**

$$\begin{aligned}
(x_1^2-x_3x_5)(x_2^2-x_3x_5)&\le 0\\
(x_2^2-x_4x_1)(x_3^2-x_4x_1)&\le 0\\
(x_3^2-x_5x_2)(x_4^2-x_5x_2)&\le 0\\
(x_4^2-x_1x_3)(x_5^2-x_1x_3)&\le 0\\
(x_5^2-x_2x_4)(x_1^2-x_2x_4)&\le 0
\end{aligned}$$

لنضع $x_i=x_{i-5}$ في حالة $6\le i\le 10$. وليكن $\mathcal{S}$ المجموع التالي :

$$\mathcal{S}=\sum_{i=1}^{5}(x_i^2-x_{i+2}x_{i+4})(x_{i+1}^2-x_{i+2}x_{i+4})$$

فيكون لدينا استناداً إلى الفرْض $\mathcal{S}\le 0$. ولكن لدينا من جهة أخرى

$$\mathcal{S}=\sum_{i=1}^{5}(x_i^2x_{i+1}^2-x_i^2x_{i+2}x_{i+4}-x_{i+1}^2x_{i+2}x_{i+4}+x_{i+2}^2x_{i+4}^2)$$

ومن ثَمّ

$$2\mathcal{S}=2\sum_{i=1}^{5}x_i^2x_{i+1}^2-2\sum_{i=1}^{5}x_i^2x_{i+2}x_{i+4}-2\sum_{i=1}^{5}x_{i+1}^2x_{i+2}x_{i+4}+2\sum_{i=1}^{5}x_{i+2}^2x_{i+4}^2$$

ولكن

$$\sum_{i=1}^{5}x_{i+2}^2x_{i+4}^2=\sum_{i=1}^{5}x_i^2x_{i+2}^2 \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{5}x_i^2x_{i+1}^2=\sum_{i=1}^{5}x_{i+4}^2x_i^2$$

وكذلك

$$\sum_{i=1}^{5} x_{i+2}^2 x_{i+4}^2 = \sum_{i=1}^{5} x_{i+3}^2 x_i^2 \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{5} x_{i+1}^2 x_{i+2} x_{i+4} = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 x_{i+1} x_{i+3}$$

إذن

$$2\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \left(x_{i+4}^2 - 2x_{i+2}x_{i+4} + x_{i+2}^2 \right) + \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \left(x_{i+1}^2 - 2x_{i+1}x_{i+3} + x_{i+3}^2 \right)$$

أو

$$2\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \left(x_{i+2} - x_{i+4} \right)^2 + \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \left(x_{i+1} - x_{i+3} \right)^2$$

وأخيراً نستنتج من كون $\mathcal{S} \leq 0$ أنّ $\forall i \in \{1,\ldots,5\},\ x_i = x_{i+2}$ أي

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$$

وبالعكس، نتيقّن مباشرة أنّه في مثل هذه الحالة تتحقّق المتراجحات المعطاة. فهذه هي مجموعة حلول الجملة المعطاة. ■

⑤ **نتأمّل تابعين حقيقيّين $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ونفترض ما يلي**

❶ **مهما تكن (x,y) من $\mathbb{R}^2$ يكن** $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$.

❷ f **غير معدوم ومهما تكن x من $\mathbb{R}$ يكن** $|f(x)| \leq 1$.

أثبت أنّ $|g(x)| \leq 1$ وذلك مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

سنعرض حلّين.

1. استناداً إلى الفرْض يوجد عددٌ b يُحقّق $f(b) \neq 0$. نثبّتُ عدداً y من $\mathbb{R}$ ونتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالصيغة : $u_n = f(b+ny) + f(b-ny)$. فنلاحظ أن

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_{n-1} &= f(b+(n+1)y) + f(b-(n+1)y) \\ &\quad + f(b-(n-1)y) + f(b+(n-1)y) \\ &= f(b+ny+y) + f(b+ny-y) \\ &\quad + f(b-ny+y) + f(b-ny-y) \\ &= 2f(b+ny)g(y) + 2f(b-ny)g(y) = 2u_n g(y) \end{aligned}$$

إذن

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + u_{n-1} = 2\lambda u_n$$

مع $\lambda = g(y)$ و $u_0 = 2f(b)$ و $u_1 = 2\lambda f(b)$.

لنفترض على سبيل الجدل أنّ $|g(y)| > 1$، عندئذ نبرهن بالتدريج على العدد n أنّ

$$u_n = f(b)\left(\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^n + \left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^n\right)$$

ولكن في حالة $\lambda > 1$ لدينا $\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} > 1$ و $0 < \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1} < 1$، أمّا في حالة $\lambda < -1$ فلدينا $\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1} < -1$ و $-1 < \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} < 0$. إذن نستنتج مباشرة أنّ

$$|u_n| \sim |f(b)|\left(|\lambda| + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^n$$

ومن ثَمّ $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = +\infty$ وهذا يتناقض مع كون التابع f محدوداً.

2. لنأتِ إلى الحلّ الثاني. لنعرّف $m = \sup_{\mathbb{R}} |f(x)| > 0$. عندئذ نستنتج مباشرة

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x)||g(y)| = \frac{|f(x+y) + f(x-y)|}{2} \le m$$

وعليه، بأخذ الحدّ الأعلى على جميع قيم x نجد

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad m|g(y)| \le m$$

أو $\forall y \in \mathbb{R}, \quad |g(y)| \le 1$. وهي الخاصّة المطلوبة.

لاحظ أننا في هذين الحلّين استفدنا فقط من كون التابع f محدوداً، وليس بالعدد 1 بالضرورة. ◪

⑥ نُعطى أربعةُ مستويات متوازية. أثبت وجود رباعي وجوه منتظم، يحوي كلٌّ واحدٍ من هذه المستويات الأربعة رأساً من رؤوسه.

لنفترض أنّ $A_0A_1A_2A_3$ رباعي وجوه منتظم يحقّق الخاصّة المطلوبة، ولنرمز $\mathcal{P}_k$ إلى المستوي من بين المستويات الأربعة الذي يحوي الرأس A_k، ولنتأمّل شعاعاً ناظماً $\vec{n}$ عموديّاً على هذه المستويات. يمكن أن نختار تسمية الرؤوس على نحوٍ تتعيّن فيه هذه المستويات كما يلي :

$$\mathcal{P}_k = \left\{ M : \overrightarrow{A_0M} \cdot \vec{n} = d_k \right\} \qquad (*)$$

مع $d_0 = 0 < d_1 < d_2 < d_3$.

يمكن إعادة صياغة المسألة كما يلي. نثبّت رباعي وجوه منتظم $A_0B_1B_2B_3$ ، ونبحث عن شعاع واحدة $\vec{n}$، وعن تحاك $\mathcal{H}_{A_0,r}$ مركزه A_0 ونسبته r، يجعل $A_k = \mathcal{H}_{A_0,r}(B_k)$ تنتمي إلى المستوي $\mathcal{P}_k$ المعرّف بالعلاقة (∗).

لنتأمّل إذن في الفضاء $\mathbb{R}^3$ رباعي الوجوه المنتظم $A_0B_1B_2B_3$ الذي رؤوسه النقاط

$$B_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \text{ و } B_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \text{ و } B_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \text{ و } A_0 = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

فيكون المطلوب تعيين r وشعاع الواحدة $\vec{n}$ لتتحقّق جملة المعادلات

$$\overrightarrow{A_0A_k} \cdot \vec{n} = d_k, \quad 1 \le k \le 3$$

أو

$$r\overrightarrow{A_0B_k} \cdot \vec{n} = d_k, \quad 1 \le k \le 3$$

وإذا رمزنا $r\vec{n} = [\alpha,\beta,\gamma]^T$. أخذت الجملة السابقة الشكل

$$\begin{aligned} 4\alpha + \beta + \gamma &= 3d_1 \\ \alpha + 4\beta + \gamma &= 3d_2 \\ \alpha + \beta + 4\gamma &= 3d_3 \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} \alpha &= d_1 - \frac{d_1 + d_2 + d_3}{6} \\ \beta &= d_2 - \frac{d_1 + d_2 + d_3}{6} \\ \gamma &= d_3 - \frac{d_1 + d_2 + d_3}{6} \end{aligned}$$

وهذا يعيِّن تعييناً كاملاً العدد $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ والشعاع $\vec{n} = \frac{1}{r}[\alpha,\beta,\gamma]^T$، ويُثبت صحّة الخاصّة المرجوّة. ◼

أولمبياد الرياضيّات الخامس عشر

① **نتأمّل أشعّةَ واحدةٍ** $\left(\overrightarrow{OP_k}\right)_{1\le k\le 2n+1}$ **في المستوي، ونفترض أنّ النقاط** $(P_k)_{1\le k\le 2n+1}$ **تقع في جهة واحدة بالنسبة إلى مستقيم يمرّ بالنقطة** O. **أثبت أنّ**

$$\left\|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_{2n+1}}\right\|\ge 1$$

سنبرهن صحّة هذه الخاصّة بالتدريج على العدد n.

- من جهة أولى، هذه الخاصّة صحيحة في حالة $n=0$ وضوحاً.
- ومن جهة ثانية، لنفترض صحّة هذه الخاصّة في حالة $n-1$. ولنتأمّل في المستوي، أشعّةَ واحدةٍ $\left(\overrightarrow{OP_k}\right)_{1\le k\le 2n+1}$ تقع جميعاً في جهة واحدة بالنسبة إلى مستقيم يمرُّ بالنقطة O. نُطابق بين المستوي ومجموعة الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$ وعندئذ يمكن، دون الإخلال بصحّة الإثبات، أن نعيد تسميّة النقاط $(P_k)_{1\le k\le 2n+1}$ لتحقّق الأعداد العقديّة $\left(e^{\mathrm{i}\theta_k}\right)_{1\le k\le 2n+1}$ التي تمثّل الأشعّة $\left(\overrightarrow{OP_k}\right)_{1\le k\le 2n+1}$ المتراجحة : $0\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_{2n+1}\le\pi$.

المجموعة $\left\{re^{\mathrm{i}\theta}:\theta_1\le\theta\le\theta_{2n+1}\right\}$ هي مجموعة محدّبة تحوي النقاط $(P_k)_{2\le k\le 2n}$ فهي تحوي مركز ثقلها G، إذن يمكن تمثيل الشعاع $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=2}^{2n}\overrightarrow{OP_k}$ بعددٍ عقدي $\frac{r}{2n}e^{\mathrm{i}\varphi}$ مع r من $\mathbb{R}_+$ و φ من $[\theta_1,\theta_{2n+1}]$. فيكون $re^{\mathrm{i}\varphi}$ التمثيل العقدي للشعاع $\sum_{k=2}^{2n}\overrightarrow{OP_k}$.

واستناداً إلى فرْض التدريج لدينا $\left\|\sum_{k=2}^{2n}\overrightarrow{OP_k}\right\|\ge 1$ أي $r\ge 1$. لنعرّف إذن العدد العقدي Z الذي يمثّل الشعاع $\vec{V}=\sum_{k=1}^{2n+1}\overrightarrow{OP_k}$. عندئذ $Z=e^{\mathrm{i}\theta_1}+e^{\mathrm{i}\theta_{2n+1}}+re^{\mathrm{i}\varphi}$ أو

$$Z=\exp\left(\mathrm{i}\frac{\theta_1+\theta_{2n+1}}{2}\right)\left(2\cos\left(\frac{\theta_{2n+1}-\theta_1}{2}\right)+r\exp\left(\mathrm{i}\left(\varphi-\frac{\theta_1+\theta_{2n+1}}{2}\right)\right)\right)$$

ومنه

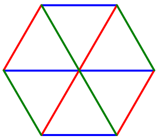
$$|Z|=\left|2\cos\theta+re^{\mathrm{i}\psi}\right|$$

مع $\theta=\frac{\theta_{2n+1}-\theta_1}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ و $\psi=\varphi-\frac{\theta_{2n+1}+\theta_1}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. ومنه

$$|Z|^2=r^2+4\cos^2\theta+4r\cos\theta\cos\psi\ge r^2\ge 1$$

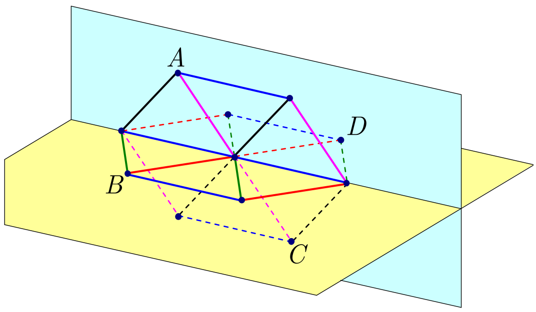
وهذا يقتضي أنّ $\left\|\vec{V}\right\|\ge 1$ ويبرهن صحّة الخاصّة المطلوبة في حالة n. ∎

② **أيمكن إيجاد مجموعة منتهية من نقاط غير واقعة في مستوٍ واحدٍ، وتحقّق أنّه أياً كانت النقطتان A و B منها، توجد فيها نقطتان أخريان C و D تجعلان المستقيمين (AB) و (CD) متوازيين ومختلفين ؟**



من الواضح أنّ رؤوس مضلّعٍ سداسيٍّ منتظمٍ في المستوي تُحقّق الخاصّة المطلوبة ولكنّها تقع في مستوٍ واحدٍ.

للانتقال إلى الفراغ نتأمّل رؤوس الشكل $\mathcal{S}$ الناتج من مضلّعين سداسيين منتظمين يشتركان بقطرٍ وموجودان في مستويين متعامدين.



فإذا اخترنا A و B رأسين من المضلّع السداسي نفسه كنّا في الحالة المستوية، ووجدنا في الشكل نفسه رأسين C و D يجعلان المستقيمين (AB) و (CD) متوازيين ومختلفين.

وإذا اخترنا A و B رأسين من مضلّعين سداسيّين مختلفين، اخترنا C النقطة المقابلة قطريّاً للنقطة A في المسدّس المنتظم الذي تنتمي إليه A، واخترنا D النقطة المقابلة قطريّاً للنقطة B في المسدّس المنتظم الذي تنتمي إليه B، عندئذ يكون الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع لتناصف قطريه، وينتج من ذلك توازي المستقيمين (AB) و (CD) واختلافهما. فالشكل $\mathcal{S}$ يُحقّق الخاصّة المطلوبة.

تحليليّاً يمكن أن نختار

$$\mathcal{S} = \{a, -a, b, -b, c, -c, a+b, -a-b, a+c, -a-c\}$$

مع

$$a = (1,0,0) \text{ و } b = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \text{ و } b = \left(-\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

③ **لتكن $\mathcal{D}$ مجموعة الثنائيّات (a,b) من $\mathbb{R}^2$ التي تجعل المعادلة**

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

تقبل حلاً حقيقيّاً واحداً على الأقلّ. أوجد $\delta=\inf\{a^2+b^2:(a,b)\in\mathcal{D}\}$.

لنلاحظ أوّلاً أنّه إذا كان x حلاً حقيقيّاً للمعادلة

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0 \qquad (\mathcal{E})$$

كان $x\neq 0$، وكان من ثَمّ العدد $y=x+\dfrac{1}{x}$ من $\mathbb{R}\backslash]-2,2[$ حلاً للمعادلة

$$y^2+ay+b-2=0 \qquad (\mathcal{E}')$$

وبالعكس، إذا كان y من $\mathbb{R}\backslash]-2,2[$ حلاً للمعادلة $(\mathcal{E}')$ كان العدد الحقيقي x المعطى بالصيغة $x=\frac{1}{2}\left(y+\sqrt{y^2-4}\right)$ ، وهو جذرٌ للمعادلة $x+\dfrac{1}{x}=y$ ، حلاً حقيقيّاً للمعادلة $(\mathcal{E})$. إذن

$$\mathcal{D}=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:\exists y\in(\mathbb{R}\backslash]-2,2[),\ y^2+ay+b-2=0\right\}$$

ولأنّ جذرا المعادلة $y^2+ay+b-2=0$ هما $\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{\Delta}\right)$ و $\frac{1}{2}\left(-a-\sqrt{\Delta}\right)$ في حالة $\Delta=a^2+8-4b\geq 0$ استنتجنا أنّ

$$(a,b)\in\mathcal{D}\Leftrightarrow(\Delta\geq 0)\wedge\left(\left\{\tfrac{-a+\sqrt{\Delta}}{2},\tfrac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}\right\}\backslash\,]-2,2[\,\neq\varnothing\right)$$

أو

$$(a,b)\in\mathcal{D}\Leftrightarrow(\Delta\geq 0)\wedge\left(\left(\tfrac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}\geq 2\right)\vee\left(\tfrac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}\leq -2\right)\right)$$

أو

$$(a,b)\in\mathcal{D}\Leftrightarrow\left(a^2+8\geq 4b\right)\wedge\left(\sqrt{a^2+8-4b}\geq 4-|a|\right)$$

ونجد بالتربيع أنّ

$$\sqrt{a^2+8-4b}\geq 4-|a|\Leftrightarrow(|a|\geq 4)\vee\left(|a|\geq 1+\frac{b}{2}\right)$$

ولأنّ $(|a|-4)^2\geq 0$ يقتضي $a^2+8\geq 8(|a|-1)$، نستنتج أن $|a|\geq 1+\frac{b}{2}$ يقتضي $a^2+8\geq 4b$، وعليه

$$(a,b)\in\mathcal{D}\Leftrightarrow\left(\left(a^2+8\geq 4b\right)\wedge(|a|\geq 4)\right)\vee\left(|a|\geq 1+\frac{b}{2}\right)$$

لتكن إذن (a,b) من $\mathcal{D}$.

- إمّا أن يكون $|a| \geq 4$ ومن ثَمّ $a^2+b^2 \geq 16$.
- وإمّا أن يكون $b \leq -2$ ومن ثَمّ $a^2+b^2 \geq 4$.
- أو أن يكون $0 < \frac{b}{2}+1 \leq |a|$ ومن ثَمّ

$$a^2+b^2 \geq 1+b+\frac{5}{4}b^2 = \frac{4}{5}+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{2}b\right)^2 \geq \frac{4}{5}$$

إذن $\delta \geq \frac{4}{5}$.

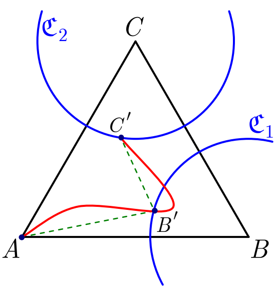
ولكن في حالة $a_0 = \frac{4}{5}$ و $b_0 = -\frac{2}{5}$ نرى مباشرة أنّ

$$(a_0,b_0) \in \mathcal{D} \quad \text{و} \quad a_0^2+b_0^2 = \frac{4}{5}$$

إذن، في الحقيقة لدينا $\delta = \frac{4}{5}$. وهي القيمة المرجوّة. ■

④ **يرغب جندي باستكشاف مواقع الألغام في منطقة لها شكل مثلّث متساوي الأضلاع. يحمل الجندي جهازاً كاشفاً نصف قطره الفعّال يساوي نصف ارتفاع المثلّث. يبدأ الجندي عمله انطلاقاً من أحد رؤوس المثلّث. ما أقصر طريق يمكن للجندي أن يتبعه لينجز عمله بالكامل ؟**

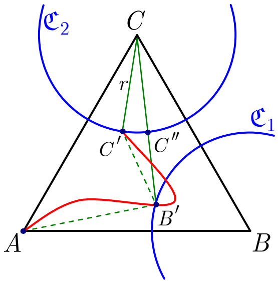
لنفترض أنّ طول ضلع المثلّث ABC يساوي a، عندئذ يساوي طول نصف ارتفاعه $r = \frac{\sqrt{3}}{4}a$. ولنفترض أنّ الجندي ينطلق لبدء عمله من الرأس A. حتّى يتمكّن الجندي من استكشاف المنطقة حتّى الرأسين C و D لا بُدّ أن يمر طريقه بنقطة من الدائرة $\mathfrak{C}_1 = \mathcal{C}(B,r)$، التي مركزها B ونصف قطرها r، وبنقطة من الدائرة $\mathfrak{C}_2 = \mathcal{C}(C,r)$ التي مركزها C ونصف قطرها r، ويمكن بسبب تناظر المسألة أن نفترض أنّ يمر أوّلاً بنقطة B' على الدائرة $\mathfrak{C}_1$، ثُمّ يصل إلى نقطة C' من الدائرة $\mathfrak{C}_2$.



فالطول L لطريق أمثلي يمكن أن يسلكه الجندي أطول أو يساوي طول أي طريق $\Gamma_{AB'C'}$ له شكل خطٍّ منكسر : $\Gamma_{AB'C'} = [AB'] \cup [B'C']$ مع $B' \in \mathfrak{C}_1$ و $C' \in \mathfrak{C}_2$.

وعليه نرى أنّ

$$L \geq \inf\{AB' + B'C' : B' \in \mathfrak{C}_1, C' \in \mathfrak{C}_2\}$$



لنلاحظ أنّه في حالة B' من $\mathfrak{C}_1$، و C' من $\mathfrak{C}_2$، لدينا استناداً إلى متراجحة المثلّث :

$$B'C' \geq B'C - \underbrace{C'C}_{r} = B'C - r$$

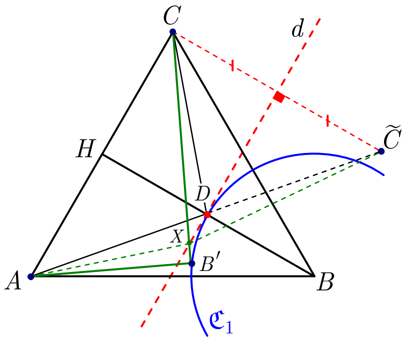
وتحدث المساواة إذا وفقط إذا انطبقت C' على النقطة C'' وهي نقطة تقاطع القطعة المستقيمة $[B'C]$ مع الدائرة $\mathfrak{C}_2$، إذن

$$L \geq \inf\{AB' + B'C - r : B' \in \mathfrak{C}_1\}$$

أو

$$L + r \geq \inf\{AB' + B'C : B' \in \mathfrak{C}_1\}$$

لتكن D نقطة تقاطع الارتفاع $[BH]$، النازل من الرأس B، مع الدائرة $\mathfrak{C}_1$. وليكن d المستقيم المار بالنقطة D عمودياً على (BH) وأخيراً لتكن $\widetilde{C}$ نظيرة C بالنسبة إلى d.



النقطتان A و C متناظرتان بالنسبة إلى (BH) إذن فهو إذن منصّف للزاويّة $\widehat{ADC}$ وهذا المنصّف عمودي على d منصّف الزاوية $\widehat{CD\widetilde{C}}$، إذن $\widehat{AD\widetilde{C}} = \pi$ والنقاط A و D و $\widetilde{C}$ تقع على استقامة واحدة.

لنتأمّل نقطة B' من $\mathfrak{C}_1$، ولتكن X نقطة تقاطع $(B'C)$ مع d.

- من المثلّث $AB'X$ نجد $AB' + B'X \geq AX$ مع مساواة فقط في حالة $B' = D$.
- ومن المثلّث $AX\widetilde{C}$ لدينا $AX + X\widetilde{C} \geq A\widetilde{C}$ مع مساواة فقط في حالة $X = D$.

وهذا يُكافئ $AX + XC \geq AD + DC$ مع مساواة فقط في حالة $X = D$.

▫ نستنتج إذن أنّ

$$\begin{aligned} AB' + B'C &= \underline{AB' + B'X} + XC \\ &\geq AX + XC \geq AD + DC \end{aligned}$$

أي

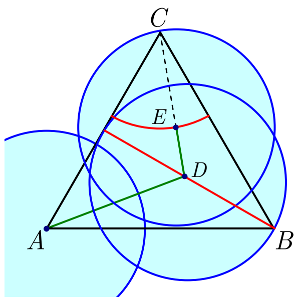
$$\forall B' \in \mathfrak{C}_1, \quad AB' + B'C \geq AD + DC = 2AD$$

وتحدث المساواة فقط إذا انطبقت B' على D نقطة تقاطع الارتفاع النازل من B مع الدائرة $\mathfrak{C}_1$، وهي منتصف الارتفاع $[BH]$ النازل من H.

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$L \geq L_0 = 2AD - r$$

التركيب : لنتأمّل الطريق $\Gamma_{ADE} = [AD] \cup [DE]$ وقد عرّفنا D نقطة تقاطع الارتفاع النازل من الرأس B مع الدائرة $\mathfrak{C}_1$ التي مركزها B ونصف قطرها r، وعرّفنا E نقطة تقاطع القطعة المستقيمة $[DC]$ مع الدائرة $\mathfrak{C}_2$ التي مركزها C ونصف قطرها r. إنّ طول هذا الطريق يساوي L_0، يكفي أن نثبتَ أنّ الجندي إذا سلك هذا الطريق تمكّن من إنجاز مهمته إنجازاً كاملاً ليكون طول L_0 هو طول أقصر الطرق التي يمكن أن يسلكها الجندي لإنجاز مهمّته.



في الحقيقة، نتيقّن دون عناء تقريباً، وبالحساب المباشر، أنّ المثلّث ABC محتوى داخل اجتماع الأقراص التي مراكزها A و D و E ونصف قطر كلٍّ منها يساوي r. فالطريق Γ_{ADE} هو أقصر طريق يمكن للجندي أن يسلكه ليحقّق المهمّة الملقاة على عاتقه. وطول هذا الطريق يساوي $\frac{2\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}\,a$. وبذا يكتمل الإثبات. ■

⑤ **في حالة عددٍ حقيقي غير معدوم a وعدد حقيقي b نكتب $f_{a,b}$ دلالة على التابع الأفيني $f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_{a,b}(x)=ax+b$. ونرمز بالرمز $\mathcal{A}$ إلى مجموعة جميع التوابع الأفينيّة:**

$$\mathcal{A}=\{f_{a,b}:(a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\}$$

من الواضح أنّ $\mathcal{A}$ زمرة بالنسبة إلى قانون تركيب التوابع $\circ$. فإذا كان f و g من $\mathcal{A}$ كان $f\circ g$ عنصراً من $\mathcal{A}$. ولكلِّ عنصرٍ $f_{a,b}$ من $\mathcal{A}$ مقلوب $f_{1/a,-b/a}$ ينتمي إلى $\mathcal{A}$. نتأمّل زمرة جزئيّة $\mathcal{G}$ من $\mathcal{A}$ ، (أي مجموعة جزئيّة غير خالية مغلقة بالنسبة إلى عمليّة تركيب التطبيقات والمقلوب.) ونفترض أنّ لكلّ عنصرٍ f من $\mathcal{G}$ نقطةً ثابتةً، أي عدداً حقيقيّاً x_f يُحقِّق $f(x_f)=x_f$. أثبت وجود نقطة ثابتة مشتركة لكلِّ عناصر $\mathcal{G}$.

لنلاحظ أوّلاً أنّه في حالة (a,b) و (c,d) من $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ لدينا

$$f_{a,b}\circ f_{c,d}=f_{ac,ad+b}$$

وأنّ التابع $f_{a,b}$ يقبل نقطة ثابتة إذا وفقط إذا كان $a\neq 1$ أو كان $f_{a,b}=\mathrm{id}=f_{1,0}$.

- في حالة $\mathcal{G}=\{\mathrm{id}\}$ ، الخاصّة المطلوبة تافهة.
- نفترض إذن وجود عنصرٍ $f=f_{a,b}$ من $\mathcal{G}$ مختلفٍ عن id . إذن $a\neq 1$ ، والنقطة الثابتة للتابع f هي $x_0=\dfrac{b}{1-a}$.

ليكن $g=f_{\alpha,\beta}$ عنصراً ما من $\mathcal{G}$. فإذا كان $g=\mathrm{id}$ كان $g(x_0)=x_0$. وإذا كان $g\neq\mathrm{id}$ ، استنتجنا من كونه يقبل نقطة ثابتة أنّ $\alpha\neq 1$ ، وأنّ النقطة الثابتة الوحيدة للتابع g هي $x_g=\dfrac{\beta}{1-\alpha}$.

لنتأمّل العنصر $h=g^{-1}\circ f^{-1}\circ g\circ f$ من $\mathcal{G}$ فنجد

$$\begin{aligned} h&=f_{\frac{1}{\alpha},-\frac{\beta}{\alpha}}\circ f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}\circ f_{\alpha,\beta}\circ f_{a,b}\\ &=f_{\frac{1}{\alpha a},-\frac{a\beta+b}{\alpha a}}\circ f_{\alpha a,\alpha b+\beta}=f_{1,\frac{\alpha b+\beta-a\beta-b}{\alpha a}}\end{aligned}$$

ولأنّ h يقبل نقطة ثابتة وجب أن يكون $\alpha b+\beta-a\beta-b=0$ وهذا يُكافئ

$$x_g=\frac{\beta}{1-\alpha}=\frac{b}{1-a}=x_0$$

إذن $g(x_0)=x_0$. فنكون قد أثبتنا أنّ x_0 نقطة ثابتة مشتركة لجميع عناصر $\mathcal{G}$. ويتمّ إثبات الخاصّة المرجوّة. ∎

⑥ **نُعطى عدداً q من المجال $]0,1[$ ، ونعطى n عدداً حقيقياً موجباً تماماً $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$، مع $n \geq 2$. أثبت وجود أعدادٍ حقيقيّة $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ تُحقّق الشروط التالية :**

❶ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad a_i < b_i$.

❷ $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad q < \dfrac{b_{i+1}}{b_i} < \dfrac{1}{q}$.

❸ $b_1 + b_2 + \cdots + b_n < \dfrac{1+q}{1-q}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.

لنعرّف في حالة $1 \leq k \leq n$ العدد b_k بالصيغة

$$b_k = \sum_{j=1}^{n} q^{|j-k|} a_j = q^{k-1} a_1 + \cdots + q a_{k-1} + a_k + q a_{k+1} + \cdots + q^{n-k} a_n$$

- الخاصّة ❶ محقّقةٌ وضوحاً.
- ليكن i من المجموعة $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ عندئذ نرى مباشرة أنّ

$$b_{i+1} - q b_i = \left(1 - q^2\right)\left(a_{i+1} + q a_{i+2} + \cdots + q^{n-i-1} a_n\right) > 0$$

$$b_i - q b_{i+1} = \left(1 - q^2\right)\left(q^{i-1} a_1 + \cdots + q a_{i-1} + a_i\right) > 0$$

وهذا يبرهن على أنّ $q < \dfrac{b_{i+1}}{b_i} < \dfrac{1}{q}$، وهي الخاصّة ❷ .

- لنلاحظ أنّه في حالة $1 \leq j \leq n$ لدينا

$$\sum_{k=1}^{n} q^{|j-k|} = \underline{q^{j-1} + \cdots + q + 1} + \underline{q + \cdots + q^{n-j}}$$

$$< \sum_{\ell=0}^{\infty} q^{\ell} + \sum_{\ell=1}^{\infty} q^{\ell} = \frac{1}{1-q} + \frac{q}{1-q} = \frac{1+q}{1-q}$$

ومن ثَمّ

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} q^{|j-k|} a_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} q^{|j-k|}\right)}_{<\frac{1+q}{1-q}} a_j < \frac{1+q}{1-q} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)$$

فالخاصّة ❸ محقّقة أيضاً. ويتمّ الإثبات. ◼

① **يلعب ثلاثة لاعبين اللعبة التالية : هناك ثلاث بطاقات مكتوبٌ على كلٍّ منها عددٌ طبيعي موجبٌ تماماً، وهذه الأعداد الثلاثة متباينة. في كلِّ مرحلة يجري توزيع البطاقات عشوائيّاً على اللاعبين، ويتلقّى كلُّ لاعبٍ عدداً من قطع النقود بمقدار الرقم المكتوب على البطاقة التي تلقّاها. بعد مرحلتين أو أكثر من اللعب، وصل عدد قطع النقود التي جمعها أحد اللاعبين إلى 20 قطعةً، وعدد القطع التي جمعها لاعبٌ آخر إلى 10 قطعٍ، ووصل عدد تلك التي جمعها اللاعب الثالث إلى 9 قطعٍ. فإذا علمتَ أنّه في هذه المرحلة تلقّى اللاّعب الذي جمع عشر قطع نقود أكبر عددٍ من قطع النقود. فمَن هو اللاعب الذي تلقّى البطاقة التي تحمل العدد الأوسط في المرحلة الأولى ؟**

لنرمز A و B و C إلى اللاعبين الذين وصلت، في المرحلة الأخيرة، حصيلة قطع النقود التي بحوزة كلٍّ منهم إلى 20 و 10 و 9 بالترتيب. ولنفترض أنّ الأعداد المسجّلة على البطاقات هي a_1 و a_2 و a_3 مع $a_1 < a_2 < a_3$.

- في كلِّ مرحلة يجري توزيع $s = a_1 + a_2 + a_3$ قطعة نقود على اللاعبين الثلاثة. فإذا وصلنا إلى الحصيلة المبيّنة في النصّ بعد k مرحلة، وجب أن يكون
$$k \cdot s = 9 + 10 + 20 = 39$$
ولكن، من الواضح أنّ $s \geq 1 + 2 + 3 = 6$.
وعليه لدينا $k \cdot s = 39$ مع $k \geq 2$ و $s \geq 6$. إذن $k = 3$ و $s = 13$.
- نستنتج من كون مجموع ما حصل عليه A في المراحل الثلاث يساوي 20 أنّ $3a_3 \geq 20$ ، ومن ثَمّ أنّ $a_3 \geq 7$.
- لنرمز a_x و a_y إلى المبلغَين اللذين حصل عليهما B في المرحلتين الأولى والثانية بالترتيب، نستنتج من كونه حصل على a_3 في المرحلة الثالثة أنّ $a_x + a_y + a_3 = 10$. ولأنّ $a_x + a_y \geq 2$ نستنتج أنّ $a_3 \leq 10 - 2 = 8$.
- إذا كان $a_3 = 7$ ، اقتضى هذا أنّ $a_x + a_y = 3$ ، ومن ثَمّ أنّ $a_x \neq a_y$ ، أي $\{a_x, a_y\} = \{a_1, a_2\}$ ، ونصل إلى $a_1 + a_2 + a_3 = 10$. وهذا خُلفٌ واضحٌ، إذن $a_3 = 8$. وعندئذ يكون $a_x + a_y = 2$ وهذا يقتضي $a_x = a_y = 1$.

- نستنتج مما سبق أنّ $(a_1, a_2, a_3) = (1,4,8)$ لأنّ المجموع يساوي 13. كما نستنتج أنّ B حصل على البطاقة التي تحمل الرقم 1 في المرحلتين الأولى والثانية.
- لنفترض أنّ C حصل على البطاقة التي تحمل العدد 8 في إحدى المراحل الثلاث. عندئذ يكون مجموع ما حصل عليه في المرحلتين الأخريين يساوي 1 وهذا غير ممكن لأنّه يحصل في كلِّ مرة على قطعة نقود واحدة على الأقل.
- إذن في المرحلتين الأولى والثانية، لم يحصل C على البطاقة التي تحمل العدد 1، لأنها كانت من نصيب B، ولم يحصل على البطاقة التي تحمل العدد 8. فهو إذن مَن حصل على البطاقة التي تحمل العدد 4 في هاتين المرحلتين.

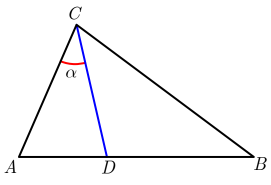
في الحقيقة، كان توزيع النتائج في المراحل الثلاث كما يلي :

	نصيب A	نصيب B	نصيب C
المرحلة الأولى	8	1	4
المرحلة الثانية	8	1	4
المرحلة الثالثة	4	8	1

وبذا يتمّ الإثبات. ■

② **نتأمّل مثلّثاً ABC. أثبت أنّ الشرط اللازم والكافي لنجد على الضلع $[AB]$ نقطة D تجعل الطول DC يساوي المتوسّط الهندسي للطولين AD و DB، هو أن تتحقّق المتراجحة**

$$\sin \widehat{A} \cdot \sin \widehat{B} \leq \sin^2 \left(\frac{\widehat{C}}{2} \right)$$



لتكن النقطة D نقطةً كيفيّة من الضلع $[AB]$، تتعيّن بالزاوية $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}}\right)$ من المجال $[0, \widehat{C}]$ المحتوى في $[0, \pi]$.

عندئذ استناداً إلى علاقة الجيب في المثلّثين ADC و DBC نجد

$$\frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{CD}{\sin \widehat{A}} \quad \text{و} \quad \frac{DB}{\sin(\widehat{C} - \alpha)} = \frac{CD}{\sin \widehat{B}}$$

وعليه يكون

$$\frac{\sin \alpha \sin(\widehat{C} - \alpha)}{\sin \widehat{A} \sin \widehat{B}} = \frac{AD \cdot DB}{CD^2}$$

إذن الشرط اللازم والكافي حتّى نجد D على $[AB]$ تُحقّق $CD^2 = AD \cdot DB$ هو أن نجد α من المجال $[0, \widehat{C}]$ تُحقّق $\sin \widehat{A} \sin \widehat{B} = \sin\alpha \sin(\widehat{C} - \alpha)$.

لنتأمّل إذن التابع

$$f : [0, \widehat{C}] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x \sin(\widehat{C} - x)$$

فيكون الشرط اللازم والكافي حتّى نجد D على $[AB]$ تُحقّق $CD^2 = AD \cdot DB$ هو أن يوجد عددٌ α من المجال $[0, \widehat{C}]$ يُحقّق $f(\alpha) = \sin \widehat{A} \sin \widehat{B}$، أي أن ينتمي العدد $\sin \widehat{A} \sin \widehat{B}$ إلى المجموعة $f\left([0, \widehat{C}]\right)$ وهي صورة المجال $[0, \widehat{C}]$ وفق التابع f.

ولكن $f'(x) = \sin(\widehat{C} - 2x)$، ومنه جدول التحولات البسيط التالي للتابع f

x	0		$\frac{\widehat{C}}{2}$		$\widehat{C}$
$f'(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	
$f(x)$	0		$\sin^2\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)$		0

إذن $f\left([0, \widehat{C}]\right) = \left[0, \sin^2\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)\right]$. وهكذا نرى أن الشرط اللازم والكافي حتّى نجد D على $[AB]$ تُحقّق $CD^2 = AD \cdot DB$ هو أن يكون $\sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \le \sin^2\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)$. وهي الخاصّة المطلوبة. ■

③ **أثبت أنّ المجموع** $A_n = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \cdot 2^{3k}$ **لا يقبل القسمة على العدد 5 وذلك مهما كانت قيمة** n **من** $\mathbb{N}$. **نذكّر أنّ** C_r^s **هو ثابتُ ثنائي الحدّ المعرّف بالصيغة** $\frac{r!}{s!(r-s)!}$.

لنلاحظ أنّ $\sqrt{8}A_n = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \left(\sqrt{8}\right)^{2k+1}$، فإذا عرّفنا $B_n = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} \left(\sqrt{8}\right)^{2k}$ من $\mathbb{N}$، كان لدينا

$$B_n + \sqrt{8}A_n = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k} \left(\sqrt{8}\right)^{k} = \left(1 + \sqrt{8}\right)^{2n+1}$$

$$B_n - \sqrt{8}A_n = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k} \left(-\sqrt{8}\right)^{k} = \left(1 - \sqrt{8}\right)^{2n+1}$$

ومن ثَمّ، بضرب العلاقتين السابقتين طرفاً بطرف، نجد

$$B_n^2 - 8A_n^2 = -7^{2n+1} \qquad (1)$$

ولكن $-7^{2n+1} \equiv -2\left(2^2\right)^n \bmod 5 \equiv 3(-1)^n \bmod 5$ إذن

$$-7^{2n+1} \bmod 5 \in \{2,3\}$$

وبوجه خاصّ، لمّا كان $Q_5 = \left\{x^2 \bmod 5 : x \in \mathbb{N}\right\} = \{0,1,4\}$ استنتجنا أنّ مما سبق

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad m^2 \neq -7^{2n+1} \bmod 5 \qquad (2)$$

فإذا افترضنا أنّ 5 يقسم A_n استنتجنا من (1) أنّ $B_n^2 = -7^{2n+1} \bmod 5$ وهذا يتناقض مع الخاصّة (2). وهذا التناقض يُثبتُ أنّ $5 \nmid A_n$ وذلك مهما كانت n من $\mathbb{N}$. ■

④ نتأمّل رقعة شطرنج أبعادها 8×8. يجري تقسيمها إلى مستطيلات (وفق الخطوط التي تفصل بين المربّعات) عددها p. ونفترض أنّ كلاً من هذه المستطيلات فيه العدد نفسه من المربّعات البيضاء والمربّعات السوداء، وأنّ أعداد المربعات في المستطيلات المختلفة مختلفة. أوجد أكبر قيمة ممكنة للعدد p، وأعطِ جميع مجموعات القياسات الممكنة لهذه المستطيلات.

أن يكون عدد المربّعات البيضاء مساوياً عدد المربعات السوداء في مستطيل يكافئ كون عدد المربّعات في المستطيل زوجيّاً. وإذا رمزنا إلى أعداد المربّعات في المستطيلات $(a_k)_{1\le k\le p}$ استنتجنا من كونها تجزئة للرقعة أنّ $\sum_{k=1}^{p} a_k = 64$. ولأنّ الأعداد $(a_k)_{1\le k\le p}$ أعداد زوجيّة ومتباينة استنتجنا أنّ

$$2 + 4 + \cdots + 2p \le \sum_{k=1}^{p} a_k = 64$$

ومنه $p(p+1) \le 64$ وهذا يقتضي أنّ $p \le 7$.

لنفترض وجود حلول في حالة $p = 7$. ولنرمز كما سبق إلى أعداد المربّعات في المستطيلات بالرمز $(a_k)_{1\le k\le 7}$. ولمّا كانت هذه الأعداد متباينة أمكننا أن نفترض أنّ

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_7$$

نضع إذن $b_k = \dfrac{a_k}{2} - k$.

فيكون لدينا من جهة أولى

$$\sum_{k=1}^{7} b_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7} a_k - 28 = 4$$

ومن جهة ثانية، إذا تذكّرنا أنّ الأعداد $(a_k)_{1\le k\le 7}$ أعداد زوجيّة، استنتجنا أنّ

$$b_{k+1} - b_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{2} - 1 \ge 0$$

فنكون قد أثبتنا أنّ

$$0 \le b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_7 \quad \text{و} \quad b_1 + b_2 + \cdots + b_7 = 4$$

وعليه نرى أنّ $(b_1, b_2, \ldots, b_7)$ يأخذ واحدة من القيم الخمس التالية :

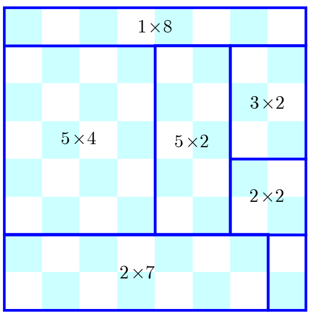
❶ $(0,0,0,0,0,0,4)$ ❹ $(0,0,0,0,1,1,2)$
❷ $(0,0,0,0,0,1,3)$ ❺ $(0,0,0,1,1,1,1)$
❸ $(0,0,0,0,0,2,2)$

وهذا بالمقابل يُعطي للمجموعة $\{a_1, a_2, \ldots, a_7\}$ واحدة من القيم التالية

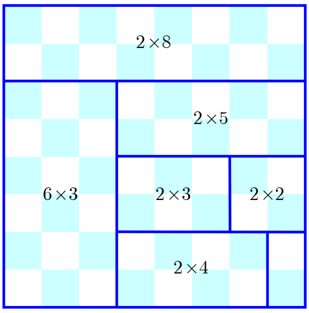
❶ $\{2,4,6,8,10,12,22\}$
❷ $\{2,4,6,8,10,14,20\}$
❸ $\{2,4,6,8,10,16,18\}$
❹ $\{2,4,6,8,12,14,18\}$
❺ $\{2,4,6,10,12,14,16\}$

- الحالة ❶ غير ممكنة، إذ لا يوجد مستطيل فيه 22 مربّعاً، (ومن ثَمّ بُعداه 1×22 أو 2×11)، على الرقعة.

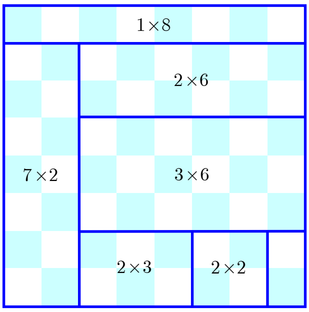
- الحالة ❷ الموافقة للقياسات $\{2,4,6,8,10,14,20\}$ حالةٌ ممكنة، كما هو مبيّن في الشكل التالي :



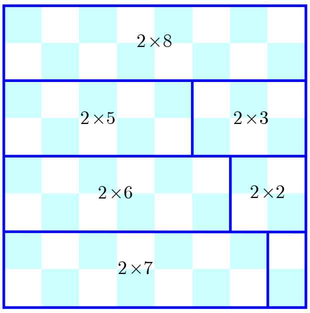
- الحالة ❸ الموافقة للقياسات $\{2,4,6,8,10,16,18\}$ حالةٌ ممكنة، كما في الشكل التالي:



- الحالة ❹ الموافقة للقياسات $\{2,4,6,8,12,14,18\}$ حالةٌ ممكنة، كما في الشكل التالي:



- الحالة ❺ الموافقة للقياسات $\{2,4,6,10,12,14,16\}$ حالةٌ ممكنة، كما في الشكل التالي :



وهكذا نرى أنّ $p=7$ هي أكبر قيمة ممكنة لتحقيق المطلوب، وأنّ مجموعات قياسات المستطيلات الموافقة هي

$$\{2,4,6,8,10,16,18\},\quad \{2,4,6,8,10,14,20\}$$
$$\{2,4,6,10,12,14,16\},\quad \{2,4,6,8,12,14,18\}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ◼

⑤ **عيّن جميع القيم التي يأخذها المقدار**

$$\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}$$

عندما تتحول الأعداد a و b و c و d في مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة تماماً.

لنعرّف في حالة (a,b,c,d) من $(\mathbb{R}_+^*)^4$ المقدار

$$F(a,b,c,d)=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}$$

المطلوب تعيين المجموعة $I=F\left((\mathbb{R}_+^*)^4\right)$ التي هي مجال من $\mathbb{R}$ لأنّ التابع F تابعٌ مستمرٌ والمجموعة $(\mathbb{R}_+^*)^4$ مجموعة محدّبة، فهي، بوجه خاصّ، مترابطة.

▫ بملاحظة أنّه في حالة (a,b,c,d) من $(\mathbb{R}_+^*)^4$ لدينا

$$\frac{a}{a+b+d}>\frac{a}{a+b+c+d} \quad \text{و} \quad \frac{b}{b+c+a}>\frac{b}{a+b+c+d}$$

$$\frac{c}{c+d+b}>\frac{c}{a+b+c+d} \quad \text{و} \quad \frac{d}{d+a+c}>\frac{d}{a+b+c+d}$$

استنتجنا بجمع هذه المتراجحات طرفاً مع طرفٍ أنّ

$$\forall(a,b,c,d)\in(\mathbb{R}_+^*)^4,\quad F(a,b,c,d)>1 \tag{1}$$

▫ لتكن (a,b,c,d) من $(\mathbb{R}_+^*)^4$. بملاحظة أنّ أيّ تبديل دائري $\begin{smallmatrix} & b & \\ c & & a \\ & d & \end{smallmatrix}$ لا يغيّر قيمة المقدار $F(a,b,c,d)$ يمكننا أن نفترض أنّ $a\geq\max(b,c,d)$. وعندئذ يكون لدينا

$$\frac{d}{d+a+c}\leq\frac{d}{d+b+c} \quad \text{و} \quad \frac{b}{b+c+a}\leq\frac{b}{b+c+d}$$

وعليه يكون

$$\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}\leq\frac{b+c+d}{b+c+d}=1$$

إذن

$$\begin{aligned}F(a,b,c,d)&=\frac{a}{a+b+d}+\underline{\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}}\\&\leq\frac{a}{a+b+d}+1<2\end{aligned}$$

فنكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall(a,b,c,d)\in(\mathbb{R}_+^*)^4,\quad F(a,b,c,d)<2 \tag{2}$$

▫ نلاحظ في حالة x من $\mathbb{R}_+^*$ أنّ

$$F(x,x,1,1)=\frac{2x}{2x+1}+\frac{2}{2+x}$$

ولأنّ $\lim_{x\to 0^+} F(x,x,1,1)=1$ استنتجنا $\inf I\le 1$.

▫ وكذلك في حالة x من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا

$$F(x,1,x,1)=\frac{2x}{x+2}+\frac{2}{1+2x}$$

ولأنّ $\lim_{x\to 0^+} F(x,1,x,1)=2$ استنتجنا أنّ $\sup I\ge 2$.

الخلاصة : لقد أثبتنا في (1) و (2) أنّ $I\subset \left]1,2\right[$، ووجدنا أيضاً أنّ $\inf I\le 1$ وأنّ $\sup I\ge 2$ مما يُثبتُ أنّ $I=\left]1,2\right[$ وهي النتيجة المرجوّة. ■

⑥ **نتأمّل كثير حدود P أمثاله أعداد صحيحة، ودرجته d أكبر تماماً من 0. ونتأمل المجموعة**

$$\mathcal{Z}=\{x\in\mathbb{Z}:(P(x)=1)\vee(P(x)=-1)\}$$

أثبت أنّ $\operatorname{card}(\mathcal{Z})\le d+2$.

لنعرّف المجموعتين

$$\mathcal{Z}_{-1}=\{x\in\mathbb{Z}:P(x)=-1\}\quad \text{و}\quad \mathcal{Z}_1=\{x\in\mathbb{Z}:P(x)=1\}$$

هاتان المجموعتان منفصلتان واجتماعهما $\mathcal{Z}_1\cup\mathcal{Z}_{-1}$ يساوي $\mathcal{Z}$. ليكن $\alpha=\min(\mathcal{Z})$.

▫ حالة $\alpha\in\mathcal{Z}_1$. ليكن γ عنصراً ما من $\mathcal{Z}_{-1}$، عندئذ يكون

$$P(\alpha)-P(\gamma)=2 \qquad (*)$$

ولكن، لمّا كان $P(X)=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k\in\mathbb{Z}[X]$ استنتجنا أنّ

$$P(\alpha)-P(\gamma)=\sum_{k=1}^{d}a_k\left(\alpha^k-\gamma^k\right)=(\alpha-\gamma)\sum_{k=1}^{d}a_k\left(\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^{k-1-j}\gamma^j\right)$$

وينتج من $(*)$ أنّ العدد الموجب $\alpha-\gamma$ يقسم 2، ومن ثَمّ $\gamma\in\{\alpha,\alpha+1\}$. إذن لقد أثبتنا أنّ $\mathcal{Z}_{-1}\subset\{\alpha+1,\alpha+2\}$. ومنه $\operatorname{card}(\mathcal{Z}_{-1})\le 2$. ونستنتج، من جهة أخرى، أنّ $\operatorname{card}(\mathcal{Z}_1)\le\deg(P)=d$، إذن $\operatorname{card}(\mathcal{Z})\le d+2$.

▫ حالة $\alpha\in\mathcal{Z}_2$. هذه الحالة تُعالَج بأسلوب مماثل، أو بتطبيق ما سبق على $-P$. ■

① **نتأمّل متتاليتين منتهيتين** $(x_k)_{1\le k\le n}$ **و** $(y_k)_{1\le k\le n}$ **من الأعداد الحقيقيّة. ونفترض أنّ** $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n$ **وكذلك** $y_1 \ge y_2 \ge \cdots \ge y_n$ **. أثبت أنّه مهما يكن التبديل** σ **من** $\mathfrak{S}_n$ **، أي مجموعة التقابلات على المجموعة** $\{1,2,\ldots,n\}$ **، يكن**

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 \le \sum_{k=1}^{n}\left(x_k - y_{\sigma(k)}\right)^2$$

سنثبت هذه النتيجة بالتدريج على العدد n .

- حالة $n = 1$ صحيحة وضوحاً وتافهة.
- حالة $n = 2$. في هذه الحالة تتكوّن $\mathfrak{S}_2$ من التبديل المطابق، ومن المُناقلة $\tau = (1,2)$.
  إذن في حالة $x_1 \ge x_2$ و $y_1 \ge y_2$ علينا إثبات المتراجحة

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \le (x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2$$

ولكن إذا وضعنا

$$\Delta = (x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2 - (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$

رأينا مباشرة

$$\begin{aligned}\Delta &= 2(x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1)\\ &= 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \ge 0\end{aligned}$$

- لنفترض إذن صحّة النتيجة في حالة $n-1$. ولنتأمّل متتاليتين منتهيتين $(x_k)_{1\le k\le n}$ و $(y_k)_{1\le k\le n}$ من الأعداد الحقيقيّة، تُحقّقان $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n$ وكذلك $y_1 \ge y_2 \ge \cdots \ge y_n$. وليكن σ تبديلاً ما من $\mathfrak{S}_n$. وهنا نناقش حالتين :
  - حالة $\sigma(n) = n$. عندئذ نعرّف $\tilde{\sigma}$ من $\mathfrak{S}_{n-1}$ بالعلاقة $\tilde{\sigma}(k) = \sigma(k)$ في حالة $1 \le k \le n-1$. واعتماداً على فرْض التدريج لدينا

$$\sum_{k=1}^{n-1}(x_k - y_k)^2 \le \sum_{k=1}^{n-1}\left(x_k - y_{\tilde{\sigma}(k)}\right)^2$$

وبجمع المقدار $(x_n - y_n)^2$ إلى الطرفين نجد المتراجحة المطلوبة :

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 \le \sum_{k=1}^{n}\left(x_k - y_{\sigma(k)}\right)^2$$

▫ حالة $\sigma(n) \neq n$. نعرّف $r = \sigma^{-1}(n)$ و $m = \sigma(n)$، ثُمّ نتأمّل المُناقلة $\tau = (n,m)$ وهي التبديل الذي يُثبّت جميع القيم عدا n و m، ويُبادل بين هاتين القيمتين. ونعرّف $\sigma' = \tau \circ \sigma$ فنلاحظ أنّ $\sigma'(n) = n$، إذن، استناداً إلى الحالة السابقة مطبّقةً على σ'، نجد

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{n}\left(x_k - y_{\sigma'(k)}\right)^2 \qquad (*)$$

ولكن $\sigma'(k) = \sigma(k)$ في حالة $\sigma(k) \notin \{n,m\}$، أي $k \notin \{r,n\}$، ولدينا $\sigma'(r) = m$ و $\sigma'(n) = n$.

إذن تُكتب المتراجحة $(*)$ بالشكل

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 \leq \sum_{k \notin \{r,n\}}\left(x_k - y_{\sigma(k)}\right)^2 + (x_r - y_m)^2 + (x_n - y_n)^2$$

ولكن بملاحظة أنّ $x_r \geq x_n$ و $y_m \geq y_n$، وبالاستفادة من حالة $n = 2$ نجد

$$\begin{aligned}(x_r - y_m)^2 + (x_n - y_n)^2 &\leq (x_r - y_n)^2 + (x_n - y_m)^2 \\ &\leq (x_r - y_{\sigma(r)})^2 + (x_n - y_{\sigma(n)})^2\end{aligned}$$

إذن

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{n}\left(x_k - y_{\sigma(k)}\right)^2$$

وهي المتراجحة المطلوبة.

وهكذا نكون قد أنجزنا الإثبات بالتدريج على العدد n. ■

② **نتأمّل متتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً من الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً. أثبت أنّه أيّاً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً i فهناك عدد لا نهائي من الحدود a_n التي تُكتب بالشكل $a_n = ra_i + sa_j$ مع $j > i$ و r و s عددان طبيعيّان موجبان تماماً.**

لتكن i من $\mathbb{N}^*$، ولنعرّف في حالة r من المجموعة $\{0,1,\ldots,a_i-1\}$

$$A_r = \{k \in \mathbb{N}^* : a_k \bmod a_i = r\}$$

تؤلّف الجماعة $(A_r)_{0\le r<a_i}$ تجزئة لمجموعة الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً $\mathbb{N}^*$. فلا بُدّ أنّ إحدى هذه المجموعات، ولتكن A_s، مجموعة غير منتهية. نختار إذن عدداً j من $A_s\cap]i,+\infty[$، ونتأمّل المجموعة غير المنتهية $B_{ij}=A_s\cap]j,+\infty[$. عندئذ

$$\forall n\in B_{ij},\quad a_n = a_j \bmod a_i$$

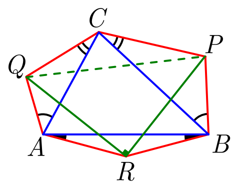
أو

$$\forall n\in B_{ij},\exists r\in\mathbb{N}^*\quad a_n = a_j + ra_i$$

وهذه هي الخاصّة المطلوبة.

③ **نتأمّل مثلّثاً ABC. وننشئ خارجه المثلّثات ABR و BCP و CAQ على نحوٍ يكون للزوايا في هذه المثلّثات القياسات التالية : $\widehat{PBC}=\frac{\pi}{4}$ و $\widehat{PCB}=\frac{\pi}{6}$ و $\widehat{QAC}=\frac{\pi}{4}$ و $\widehat{QCA}=\frac{\pi}{6}$ و $\widehat{RAB}=\frac{\pi}{12}$ و $\widehat{RBA}=\frac{\pi}{12}$. أثبت أنّ**

$$QR = RP \;\text{ و }\; \widehat{QRP}=\frac{\pi}{2}$$



حلّ حسابي : لنضع $\lambda=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$، ولنرمز كالعادة :

$$CA=b \text{ و } BC=a \text{ و } AB=c$$

استناداً إلى علاقة الجيب في المثلّث BCP لدينا

$$\frac{BP}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{CP}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{CB}{\sin\frac{5\pi}{12}}$$

ولكن $\sin\frac{5\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}=\lambda$، إذن

$$CP=\frac{a}{\sqrt{2}\lambda} \text{ و } BP=\frac{a}{2\lambda} \qquad (1)$$

ونجد بالأسلوب نفسه من المثلّث CAQ أنّ

$$CQ=\frac{b}{\sqrt{2}\lambda} \text{ و } AQ=\frac{b}{2\lambda} \qquad (2)$$

وفي المثلّث المتساوي الساقين ABR لدينا $\frac{AB}{2AR}=\cos\frac{\pi}{12}=\lambda$ إذن

$$BR=AR=\frac{c}{2\lambda} \qquad (3)$$

لنحسب إذن أطوال أضلاع المثلّث PQR، وذلك بالاستفادة من (1) و (2) و (3).

- باستخدم علاقة التجيب في المثلّث BPR نجد

$$PR^2 = BP^2 + BR^2 - 2BP \cdot BR \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{3} + \widehat{B}\right)$$

ومنه

$$PR^2 = \frac{1}{4\lambda^2}\left(a^2 + c^2 - 2ac\cos\left(\tfrac{\pi}{3} + \widehat{B}\right)\right)$$

ولكن $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \widehat{B}\right) = \frac{1}{2}\cos\widehat{B} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\widehat{B}$، كما إنّ $\frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$ يساوي مساحة المثلّث ABC التي سنرمز إليها $\mathcal{A}$. وعليه

$$PR^2 = \frac{1}{4\lambda^2}\left(a^2 + c^2 - ac\cos\widehat{B} + 2\sqrt{3}\mathcal{A}\right)$$

كما نستنتج من علاقة التجيب في المثلّث ABC أنّ $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac\cos\widehat{B}$ إذن

$$PR^2 = \frac{1}{4\lambda^2}\left(\frac{a^2 + c^2 + b^2}{2} + 2\sqrt{3}\mathcal{A}\right) = \frac{1}{8\lambda^2}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\mathcal{A}\right)$$

- لحساب QR يكفي أن نبادل بين a و b في العلاقة السابقة فنجد

$$QR^2 = \frac{1}{8\lambda^2}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\mathcal{A}\right) = PR^2$$

إذن $QR = RP$.

- لنحسب الآن PQ من المثلّث PQC فنجد أنّ

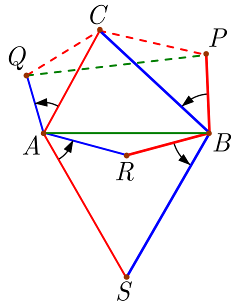
$$PQ^2 = CP^2 + CQ^2 - 2CP \cdot CQ \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{3} + \widehat{C}\right)$$

ومنه

$$\begin{aligned}
PQ^2 &= \frac{1}{2\lambda^2}\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\tfrac{\pi}{3} + \widehat{C}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2\lambda^2}\left(a^2 + b^2 - ab\cos\widehat{C} + \sqrt{3}ab\sin\widehat{C}\right)\\
&= \frac{1}{2\lambda^2}\left(a^2 + b^2 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} + 2\sqrt{3}\mathcal{A}\right)\\
&= \frac{1}{4\lambda^2}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\mathcal{A}\right)
\end{aligned}$$

وهكذا نرى أنّ $PQ^2 = PR^2 + QR^2$ فالزاوية $\widehat{PRQ}$ قائمة. ويتمّ الإثبات.

حلٌّ هندسي :



- لمّا كان $\widehat{PBC} = \frac{\pi}{4}$ و $BC = 2\lambda \cdot BP$، حيث رمزنا كما في السابق $\lambda = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$، استنتجنا أنّ C هي صورة P وفق التحويل الهندسي $\mathcal{T}_1$ المكوّن من دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{4}$، متبوعٍ بتحاكٍ مركزه B ونسبته 2λ.

- لتكن النقطة S صورة R وفق $\mathcal{T}_1$. عندئذ $BS = 2\lambda \cdot BR = BA$. وكذلك

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BS}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BR}) + (\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BS}) = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$$

وهذا يبرهن على أنّ المثلّث BAS مثلّثٌ متساوي الأضلاع.

- وكذلك لمّا كان $\widehat{CAQ} = \frac{\pi}{4}$ و $AQ = \frac{1}{2\lambda} AC$، استنتجنا أنّ Q هي صورة C وفق التحويل الهندسي $\mathcal{T}_2$ المكوّن من دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$، متبوعٍ بتحاكٍ مركزه A ونسبته $\frac{1}{2\lambda}$. ولكنّ المستقيم (RS) هو محور تناظر المثلّث BAS، إذن

$$AR = \frac{1}{2\lambda} AS \quad \text{و} \quad (\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AR}) = (\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BS}) = \frac{\pi}{4}$$

وهذا يبرهن أنّ $\mathcal{T}_2(S) = R$.

- لنتأمّل إذن التحويل الهندسي $\mathcal{R} = \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$. لمّا كان جداء ضرب نسبتي التحاكي في $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ يساوي 1، ومجموع زاويتي الدورانين في $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ يساوي $\frac{\pi}{2}$، استنتجنا أنّ $\mathcal{R}$ دورانٌ زاويته $\frac{\pi}{2}$. أمّا مركز هذا الدورن فهو النقطة R لأنّ $\mathcal{R}(R) = R$. ولكن $\mathcal{R}(P) = Q$. وهذا يبرهن في آن واحد أنّ

$$\widehat{PRQ} = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad RP = RQ$$

وبذا يتمّ الإثبات. ◼

④ **ليكن A مجموع الأرقام في الكتابة العشرية للعدد 4444^{4444}، وليكن B مجموع الأرقام في الكتابة العشريّة للعدد A. أوجد C مجموع الأرقام في الكتابة العشريّة للعدد B.**

لنكتب $N = 4444^{4444}$. لمّا كان $4444 < 10^4$ استنتجنا أنّ

$$N < 10^{4\times 4444} = 10^{17776}$$

إذن يُكتب N باستخدام 17776 رقماً عشريّاً على الأكثر، وهذا يقتضي أنّ

$$A \leq 9 \times 17776 = 159984 < 199999$$

وهذا يقتضي أنّ

$$B \leq 5 \times 9 = 45$$

وأخيراً نستنتج أنّ $C \leq 12$.

ومن جهة أخرى، نلاحظ أنّ

$$N \bmod 9 = A \bmod 9 = B \bmod 9 = C \bmod 9$$

ولكن

$$4444^{4444} \bmod 9 = (-2)^{4444} \bmod 9 = 16^{1111} \bmod 9 = 7^{1111} \bmod 9$$

ولدينا $7^3 = 1 \bmod 9$ و $1111 = 3\times 370 + 1$ إذن

$$4444^{4444} = \left(7^3\right)^{370} \times 7 \bmod 9 = 7 \bmod 9$$

إذن C هو عددٌ أصغر من 12 وباقي قسمته على 9 يساوي 7، فهو إذن يساوي 7. وهي النتيجة المطلوبة.

⑤ **أوجد 1975 نقطةً على الدائرة المثلثيّة، أي التي مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها 1، على أن تكون المسافات بين أي نقطتين منها أعداداً عاديّة، أو أثبت استحالة تحقيق هذا الأمر.**

لنلاحظ أوّلاً أنّ $e^{i\theta} - e^{i\varphi} = 2i\exp\left(i\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$ ومن ثَمّ

$$\left|e^{i\theta} - e^{i\varphi}\right| = 2\left|\sin\left(\tfrac{\theta-\varphi}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\varphi}{2}\right)\right|$$

وعليه نرى أنّه إذا كانت الأعداد $\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)$ أعداداً عاديّة كانت المسافة بين $e^{i\theta}$ و $e^{i\varphi}$ عدداً عاديّاً.

لنعرّف إذن

$$\forall n \geq 1, \quad \theta_n = 2\arcsin\left(\frac{2n}{n^2+1}\right) \in [0,\pi]$$

فيكون

$$\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = \frac{n^2-1}{n^2+1} \quad \text{و} \quad \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = \frac{2n}{n^2+1}$$

ومن ثَمّ، في حالة n و m من $\mathbb{N}^*$ يكون

$$\begin{aligned}\left|e^{i\theta_n} - e^{i\theta_m}\right| &= 2\left|\frac{2n}{n^2+1}\cdot\frac{m^2-1}{m^2+1} - \frac{n^2-1}{n^2+1}\cdot\frac{2m}{m^2+1}\right|\\ &= \frac{4(nm+1)|m-n|}{(n^2+1)(m^2+1)}\end{aligned}$$

وهذا يُثبت أنّ النقاط $\left(e^{i\theta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ مختلفة مثنى مثنى وأنّ المسافة بين أيِّ اثنتين منها هي عددٌ عادي. يكفي إذن أن نأخذ $\left\{e^{i\theta_k} : 1 \leq k \leq 1975\right\}$ لنحصل على مجموعة النقاط المطلوبة.

وبذا يتمّ الإثبات. ■

⑥ **أوجد جميع كثيرات الحدود بمتحولين $P(X,Y)$ التي تُحقّق الشرطين التاليين :**

1. **يوجد عددٌ طبيعي موجبٌ تماماً n يُحقّق $P(tx,ty) = t^n P(x,y)$ وذلك أيّاً كانت الأعداد الحقيقيّة t و x و y.**
2. **$P(1,0) = 1$ ، وأيّاً كانت الأعداد الحقيقيّة x و y و z كان**

$$P(y+z,x) + P(z+x,y) + P(x+y,z) = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

بوضع $z = 1 - x - y$ في العلاقة $(\mathcal{E})$ نجد

$$P(1-x,x) + P(1-y,y) + P(x+y,1-x-y) = 0 \qquad (1)$$

وذلك مهما كان x و y من $\mathbb{R}$. لنعرّف كثير الحدود بمتحوّل واحد

$$Q(X) = P(X,1-X)$$

عندئذ نستنتج من (1) أنّ $Q(X+Y) = -Q(1-X) - Q(1-Y)$، وهذا يبرهن على أنّ

$$Q''(X+Y) = -\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y}(Q(1-X,X) + Q(1-Y,Y)) = 0$$

إذن $Q'' = 0$، ومن ثَمّ يوجد عددان حقيقيّان a و b يُحقّقان $Q(X) = aX + b$ أي

$$P(X, 1 - X) = aX + b$$

بالتعويض في العلاقة (1) نجد

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a(1 - x) + b + a(1 - y) + b + a(x + y) + b = 0$$

أو $2a + 3b = 0$. كما نستنتج من $P(1, 0) = 1$ أنّ $a + b = 1$. إذن بالحلّ المشترك لجملة المعادلتين $2a + 3b = 0$ و $a + b = 1$ نجد $a = 3$ و $b = -2$. إذن

$$P(X, 1 - X) = 3X - 2$$

ليكن (x, y) من $\mathbb{R}^2$ ولنفترض أنّ $t = x + y \neq 0$ عندئذ

$$\begin{aligned} P(x, y) &= t^n P\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) = (x + y)^n P\left(\frac{x}{t}, 1 - \frac{x}{t}\right) \\ &= (x + y)^n \left(3\frac{x}{x + y} - 2\right) = (x + y)^{n-1}(x - 2y) \end{aligned}$$

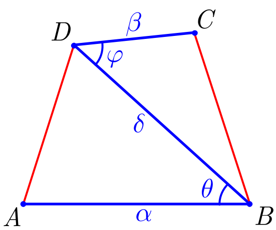
وعليه يكون

$$P(X, Y) = (X + Y)^{n-1}(X - 2Y)$$

وبالعكس، نتيقّن مباشرة أنّ كثير الحدود هذا يُحقّق جميع الخواص المطلوبة، فهو الحلّ الوحيد للمسألة المطروحة.

أولمبياد الرياضيّات الثامن عشر

① **نتأمّل رباعيّاً محدّباً مساحته 32 ، ومجموع أطوال ضلعين متقابلين وقطر فيه يساوي 16.**
أوجد جميع الأطوال الممكن أن يأخذها القطر الثاني.



لنسمِّ الرباعي المدروس $ABCD$ ، ولنفترض أنّ

$$CD = \beta \text{ و } BD = \delta \text{ و } AB = \alpha$$

ولنعرّف الزاويتين

$$\varphi = \widehat{BDC} \text{ و } \theta = \widehat{DBA}$$

استناداً إلى الفرْض لدينا

$$\alpha + \beta + \delta = 16 \qquad (1)$$

وكذلك

$$\alpha\delta \sin\theta + \beta\delta \sin\varphi = 64 \qquad (2)$$

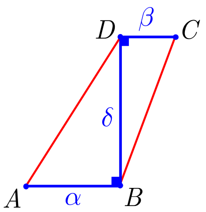
بضرب (1) بالعدد δ ، ثُمّ طرح (2) من الناتج نجد

$$\alpha\delta(1 - \sin\theta) + \beta\delta(1 - \sin\varphi) + \delta^2 - 16\delta + 64 = 0$$

أو

$$\alpha\delta(1 - \sin\theta) + \beta\delta(1 - \sin\varphi) + (\delta - 8)^2 = 0$$

ولكنّ المقادير في المجموع السابق موجبة، إذن يجب أن يكون



$$\sin\theta = \sin\varphi = 1 \quad \text{و} \quad \delta = 8$$

ومنه $\theta = \varphi = \frac{\pi}{2}$ ، و $\alpha + \beta = 8$. وبالاستفادة من

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$$

نجد

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BD^2 + DC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= \alpha^2 + \delta^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \\ &= (\alpha + \beta)^2 + \delta^2 \\ &= 8^2 + 8^2 = 2 \times 8^2 \end{aligned}$$

ومنه $AC = 8\sqrt{2}$. وهي القيمة الوحيدة الممكنة القطر الثاني.

② **نتأمّل كثير الحدود** $P_1(X) = X^2 - 2$. **ثُمّ نعرّف كثيرات الحدود** $(P_n)_{n\geq 1}$ **بالصيغة** $P_{n+1}(X) = P_1(P_n(X))$. **أثبت أنّ جذور المعادلة** $P_n(x) = x$ **هي جذور حقيقيّة ومختلفة مثنى مثنى.**

نبرهن بالتدريج أنّ $\deg P_n(X) = 2^n$ وذلك أيّاً كانت قيمة n . وكذلك نبرهن بالتدريج على العدد n أنّ

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(2\cos x) = 2\cos(2^n x)$$

وذلك باستخدام الخاصّة $(2\cos\theta)^2 - 2 = 2\left(2\cos^2\theta - 1\right) = 2\cos^2(2x)$. وهنا نجد أنّ المعادلة $P_n(x) = x$ تؤول إلى $\cos(2^n\theta) = \cos(\theta)$. وعليه إذا عرّفنا

$$x_k = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{2^n - 1}\right) \quad \text{و} \quad y_k = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{2^n + 1}\right)$$

استنتجنا من كون التابع cos متناقصاً تماماً على المجال $[0,\pi]$ أنّ

$$1 = x_0 > y_1 > x_1 > \cdots > x_{2^{n-1}-1} > y_{2^{n-1}} \geq -1$$

وأنّ $P_n(x_k) = x_k$ إذا $0 \leq k < 2^{n-1}$، و $P_n(y_k) = y_k$ إذا $1 \leq k \leq 2^{n-1}$، فنكون بذلك قد وجدنا 2^n جذراً حقيقيّاً مختلفاً للمعادلة $P_n(x) = x$. إلاّ أنّ هذه هي جميع جذور المعادلة $P_n(x) = x$ لأنّ $\deg(P_n(X) - X) = 2^n$. وبذا يتمّ المطلوب. ◼

③ **نتأمّل علبة بهيئة متوازي مستطيلات يُمكن مَلْؤها تماماً بمكعّبات حجم كلٍّ منها يساوي 1. وإذا حاولنا ملأها بمكعبات حجم كلٍّ منها يساوي 2، وحروفها توازي أضلاع العلبة، ووضعنا فيها أكبر عددٍ ممكن من هذه المكعّبات، تمكّنا من ملء 20% من العلبة فقط. عيِّن الأبعاد الممكنة للعلبة.**

لنفترض أنّ أبعاد العلبة هي a و b و c مع $a = \min(a,b,c)$. ولنعرّف

$$\gamma = \left\lfloor \frac{c}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor \quad \text{و} \quad \beta = \left\lfloor \frac{b}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor \quad \text{و} \quad \alpha = \left\lfloor \frac{a}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor$$

عندئذ يكون الحجم الأعظمي الذي يمكن ملؤه بمكعّبات حجمها 2 مساوياً $\alpha\beta\gamma$. والمطلوب تعيين الأعداد a و b و c ليكون

$$5\alpha\beta\gamma = abc \qquad (1)$$

- بحساب مكعّب الأطراف في المتراجحات التالية نلاحظ ما يلي :

$$\frac{17}{10} < \sqrt[3]{5} < \frac{12}{7} \quad \text{و} \quad \frac{5}{4} < \sqrt[3]{2} < \frac{19}{15}$$

وعليه يكون

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{5}} &= \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{10}} = \frac{5-2}{\sqrt[3]{10}\left(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{10}\right)}\\ &= \frac{3}{5\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{100}}\\ &> \frac{3}{5 \times \frac{19}{15} + 2 \times \frac{12}{7} + 5} = \frac{63}{310}\end{aligned}$$

- لنلاحظ ما يلي :

$$\forall m \geq 5, \quad \frac{m}{\sqrt[3]{2}} - \frac{m}{\sqrt[3]{5}} > m\frac{63}{310} \geq 5 \times \frac{63}{310} = \frac{63}{62} > 1$$

ومنه $\forall m \geq 5, \quad \frac{m}{\sqrt[3]{2}} > \frac{m}{\sqrt[3]{5}} + 1$ ، وهذا يبرهن على أنّ

$$\forall m \geq 5, \quad \left\lfloor \frac{m}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor > \frac{m}{\sqrt[3]{5}}$$

كما إنّ

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor - \frac{3}{\sqrt[3]{5}} &= 2 - \frac{3}{\sqrt[3]{5}} > 2 - \frac{30}{17} = \frac{4}{17} > 0\\ \left\lfloor \frac{4}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor - \frac{4}{\sqrt[3]{5}} &= 3 - \frac{4}{\sqrt[3]{5}} > 3 - \frac{40}{17} = \frac{11}{17} > 0\\ \left\lfloor \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor - \frac{5}{\sqrt[3]{5}} &= 3 - \frac{5}{\sqrt[3]{5}} > 3 - \frac{50}{17} = \frac{1}{17} > 0\end{aligned}$$

إذن

$$\forall m \geq 3, \quad \left\lfloor \frac{m}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor > \frac{m}{\sqrt[3]{5}} \tag{2}$$

- تذكّر أنّ $a = \min(a, b, c)$. فإذا افترضنا أنّ $a \geq 3$ استنتجنا من (2) أنّ

$$\gamma > \frac{1}{\sqrt[3]{5}}c \quad \text{و} \quad \beta > \frac{1}{\sqrt[3]{5}}b \quad \text{و} \quad \alpha > \frac{1}{\sqrt[3]{5}}a$$

وكان من ثَمّ $\alpha\gamma\beta > \frac{1}{5}abc$ ، وهذا يتناقض مع (1). ولمّا كان $a = 1$ يقتضي $\alpha = 0$ ، وهذا أيضاً أمرٌ غير مقبول، استنتجنا أنّ $a = 2$ و $\alpha = 1$.

■ أصبحت العلاقة (1) من الصيغة

$$5\beta\gamma = 2bc \qquad (3)$$

إذن يجب أن يقسمَ العددُ 5 أحد العددين b أو c، يمكننا أن نفترض دون الإقلال من عموميّة الدراسة أنّ $b \mid 5$. فإمّا أن يكون $b = 5$ أو أن يكون $b \geq 10$.

■ لنفترض أنّ $b \geq 10$ عندئذ نستنتج مباشرة أنّ

$$\frac{\beta}{b} = \frac{1}{b}\left\lfloor \frac{b}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{b} > \frac{15}{19} - \frac{1}{10} = \frac{131}{190}$$

وبناءً على العلاقة (3) نجد

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{2}{5} \times \frac{b}{\beta} < \frac{2}{5} \times \frac{190}{131} = \frac{76}{131}$$

وهنا نلاحظ أنّ $\frac{7}{12} - \frac{76}{131} = \frac{5}{12\times131} > 0$، وكنّا قد رأينا أنّ $\frac{1}{\sqrt[3]{5}} < \frac{7}{12}$، نستنتج إذن من المتراجحة السابقة أنّ $\frac{\gamma}{c} < \frac{7}{12} < \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$، أي $\left\lfloor \frac{c}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor < \frac{c}{\sqrt[3]{5}}$. وبالعودة إلى (2) نستنتج أنّ $c = 2$ ومن ثَمّ $\gamma = 1$، وعندها من العلاقة (3) نجد

$$\frac{4}{5} = \frac{\beta}{b} = \frac{1}{b}\left\lfloor \frac{b}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

وهذا تناقض واضحٌ لأنّ $\frac{4}{5} < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

■ إذن يجب أن يكون $b = 5$، ومن ثَمّ $\beta = 3$. ومن العلاقة (3) نستنتج ما يلي :

$$\frac{2}{3} = \frac{\gamma}{c} = \frac{1}{c}\left\lfloor \frac{c}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{c} > \frac{15}{19} - \frac{1}{c}$$

ومنه

$$\frac{1}{c} > \frac{15}{19} - \frac{2}{3} = \frac{45-38}{57} = \frac{7}{57}$$

أي $c < \frac{57}{7}$ أو $c \leq 8$. وهنا نتأمّل الجدول التالي :

c	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{\gamma}{c}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$

الذي يُبيِّن أنّ c يمكن أن تأخذ فقط إحدى القيمتين 3 أو 6.

■ نستنتج من الدراسة السابقة أنّ أبعاد العلبة يجب أن تكون واحدة من المجموعتين

$$\{2,3,5\} \text{ أو } \{2,5,6\}$$

ونتيقن مباشرة أنّ كِلا العلبتين يُعطي حلاً للمسألة. فهما الحلاّن الوحيدان لها، ويتمّ المطلوب. ■

④ **عيّن أكبر عددٍ يساوي جداء ضرب أعداد طبيعيّة موجبة تماماً مجموعها** 1976.

لنكتب $N = 1976$، في حالة r من $\mathbb{N}^*$، نلاحظ أنّ المجموعة

$$A_{r,N} = \{(x_1,\ldots,x_r) \in (\mathbb{N}^*)^r : x_1 + \cdots + x_r = N\}$$

مجموعة منتهية، (عدد عناصرها أصغر من N^r)، كما إنّها **خالية** في حالة $N > r$. فيوجد في حالة $1 \le r \le N$ عددٌ P_r يساوي

$$P_r = \max\left(\prod_{j=1}^{r} x_j : (x_1,\ldots x_r) \in A_{r,N}\right)$$

ونسعى إلى تعيين العدد $P = \max(P_1,\ldots,P_N)$.

استناداً إلى ما سبق يوجد ℓ من المجموعة $\{1,2,\ldots,N\}$ وتوجد $(x_1,\ldots,x_\ell)$ من $A_{\ell,N}$ تُحقّق $P = x_1 x_2 \cdots x_\ell$. ويمكن أن نفترض بعد إعادة ترتيب الحدود إذا لزم الأمر أن

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_\ell$$

- من الواضح أنّ $P \ge N$ لأنّ $A_{1,N} = \{N\}$.
- لنفترض جدلاً أنّ $x_1 = 1$. عندئذ نعرّف $k = \max\{j : x_j = 1\}$، بالطبع لا يمكن أن تكون $k = N$ وإلاّ كان $P = 1$ وهذا خُلفٌ. نتأمّل إذن العنصر $Y = (k + x_{k+1}, x_{k+2},\ldots,x_\ell)$ فنرى أنّه ينتمي $A_{\ell-k,N}$ ويُحقّق

$$(k + x_{k+1})x_{k+2}\cdots x_\ell > x_{k+1}x_{k+2}\cdots x_\ell = P$$

هذا التناقض يبرهن على أنّ $x_1 \ge 2$.

- لنفترض أنّ $x_\ell \ge 5$، عندئذ بملاحظة أنّ

$$\forall p \ge 5, \quad p < 2(p-2)$$

نستنتج أنّ العنصر $Y = (x_1, x_2, \ldots x_{\ell-1}, 2, x_\ell - 2)$ من $A_{\ell+1,N}$ يُحقّق

$$x_1 \cdots x_{\ell-1} \times 2(x_\ell - 2) > x_1 x_2 \cdots x_\ell = P$$

هذا التناقض يبرهن على أنّ $x_\ell \le 4$.

- لنفترض أنّ $x_{\ell-1} = 4$، عندئذ يكون $x_\ell = 4$ أيضاً، وبملاحظة أنّ

$$4 \times 4 < 2 \times 3 \times 3$$

نستنتج أنّ العنصر $Y = (x_1, x, \ldots x_{\ell-2}, 2, 3, 3)$ من $A_{\ell+1,N}$ يُحقّق

$$x_1 \cdots x_{\ell-2} \times 2 \times 3 \times 3 > x_1 x_2 \cdots x_\ell = P$$

هذا التناقض يبرهن على أنّ $x_{\ell-1} \le 3$.

- لنفترض أنّ $x_1 = 2$ و $x_\ell = 4$. عندئذ بملاحظة أنّ $3 \times 3 > 2 \times 4$ نستنتج أنّ العنصر $Y = (x_2, \ldots x_{\ell-1}, 3, 3)$ من $A_{\ell,N}$ يُحقّق

$$x_2 \cdots x_{\ell-1} \times 3 \times 3 > x_1 x_2 \cdots x_\ell = P$$

هذا التناقض يبرهن أنّه لا يمكن أن يكون لدينا في آن واحد $x_1 = 2$ و $x_\ell = 4$.

- فإذا كان $x_\ell = 4$ وجب أن يكون $x_1 = x_2 = \cdots = x_{\ell-1} = 3$ ، ومن ثَمّ

$$N = 3(\ell - 1) + 4 = 3\ell + 1 \quad \text{و} \quad P = 2^2 \times 3^{\ell-1}$$

- وإذا كان $x_\ell = 3$ ناقشنا حالتين :
  - إمّا أن يكون $x_1 = 3$ ، وعندئذ $x_1 = x_2 = \cdots = x_\ell = 3$ ، ومن ثَمّ

$$N = 3\ell \quad \text{و} \quad P = 3^\ell$$

  - أو أن يكون $x_1 = 2$. وهنا
    - إذا كان $x_2 = 2$ استنتجنا من كون P يساوي $x_3 x_4 \cdots x_\ell 4$ أنّه في هذه الحالة يكون $x_3 = \cdots = x_\ell = 3$ ، لأنّها تشابه حالة $x_\ell = 4$ التي درسناها آنفاً، ومن ثَمّ

$$N = 3(\ell - 2) + 4 = 3(\ell - 1) + 1 \quad \text{و} \quad P = 2^2 \times 3^{\ell-2}$$

    - وإذا كان $x_2 = 3$ استنتجنا أنّ $x_2 = \cdots = x_\ell = 3$ ، ومن ثَم

$$N = 3(\ell - 1) + 2 \quad \text{و} \quad P = 2 \times 3^{\ell-1}$$

النتيجة : تتعلّق النتيجة بباقي قسمة N على العدد 3 .

1. في حالة $N \bmod 3 = 0$ ، التي توافق $N = 3q$ ، يكون 3^q أكبر عددٍ يساوي جداء ضرب أعداد طبيعيّة موجبة تماماً مجموعها N .
2. وفي حالة $N \bmod 3 = 1$ ، التي توافق $N = 3q + 1$ ، يكون $2^2 \times 3^{q-1}$ أكبر عددٍ يساوي جداء ضرب أعداد طبيعيّة موجبة تماماً مجموعها N .
3. وأخيراً في حالة $N \bmod 3 = 2$ ، التي توافق $N = 3q + 2$ ، يكون 2×3^q أكبر عددٍ يساوي جداء ضرب أعداد طبيعيّة موجبة تماماً مجموعها N .

ولمّا كان $1976 = 3 \times 658 + 2$ ، استنتجنا أنّ 2×3^{658} هو أكبر عددٍ يساوي جداء ضرب أعداد طبيعيّة موجبة تماماً مجموعها 1976. ◼

⑤ **نتأمّل عدداً طبيعيّاً موجباً تماماً** n **، ونضع** $m = 2n$ **. ثُمّ نتأمّل مصفوفة مستطيلة** A **من** $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ **أي** $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_m}$ **، نفترض أنّ** $a_{ij} \in \{-1,0,1\}$ **وذلك أيّاً كانت** i **من** $\mathbb{N}_n$ **و** j **من** $\mathbb{N}_m$ **. (نذكّر بالرمز** $\mathbb{N}_k = \{1,2,\ldots,k\}$ **.) وأخيراً نتأمّل جملة المعادلات**

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m = 0, \quad i \in \mathbb{N}_n$$

بالمجاهيل $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_m}$ **. أثبت أن هذه الجملة تقبل في المجموعة** $\mathbb{Z}^m\backslash\{(0,\ldots,0)\}$ **حلاً** $Z = (z_1,\ldots,z_m)$ **يُحقّق الشرط** $\forall k \in \mathbb{N}_m, |z_k| \le m$.

لنتامّل المجموعة

$$\begin{aligned} P &= \Big\{(x_1,\ldots,x_m) : \forall k \in \mathbb{N}_m, -n \le x_k \le n\Big\} \\ &= \{-n,\ldots,-1,0,1,\ldots,n\}^m \end{aligned}$$

ولنعرّف على P التطبيق

$$\varphi : P \to \mathbb{Z}^n, X = (x_1,\ldots,x_m) \mapsto \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j\right)_{i\in\mathbb{N}_n}$$

في حالة $X = (x_1,\ldots,x_m)$ من P لدينا

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \qquad \left|\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j\right| \le \sum_{j=1}^m |a_{ij}||x_j| \le \sum_{j=1}^m |x_j| \le nm = 2n^2$$

إذن

$$\varphi(P) \subset \Big\{(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{Z}^n : \forall k \in \mathbb{N}_n, |y_k| \le 2n^2\Big\}$$

وهكذا نرى أنّ

$$\operatorname{card}(P) = (2n+1)^m = (2n+1)^{2n} = \left(4n^2+4n+1\right)^n$$

$$\operatorname{card}(\varphi(P)) \le \left(4n^2+1\right)^n$$

إذن $\operatorname{card}(\varphi(P)) < \operatorname{card}(P)$ ولا يمكن أن يكون φ متبايناً. فيوجد في P عنصران **مختلفان** X_1 و X_2 يُحقّقان $\varphi(X_1) = \varphi(X_2)$.

عندئذ يُحقِّق العنصر $Z = X_1 - X_2 = (z_1,\ldots,z_m)$ من المجموعة $\mathbb{Z}^m\backslash\{(0,\ldots,0)\}$ الخاصّتين $\varphi(Z) = 0$ و $\forall k \in \mathbb{N}_m, |z_k| \le m$. وهو المطلوب إثباته. ■

⑥ **نعرّف المتتالية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **تدريجيّاً كما يلي :**

$$u_0 = 2,\ u_1 = \frac{5}{2},\quad \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = u_n\left(u_{n-1}^2 - 2\right) - u_1$$

أثبت أنّ $\lfloor u_n \rfloor = 2^{(2^n-(-1)^n)/3}$، **وقد رمزنا** $\lfloor x \rfloor$ **إلى الجزء الصحيح للعدد** x.

لنعرّف المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالصيغة $a_n = 2^{(2^n-(-1)^n)/3}$، وذلك في حالة n من $\mathbb{N}$. ثُمّ لنعرّف كذلك $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة $b_n = a_n + 1/a_n$. عندئذ نلاحظ في حالة $n \geq 1$ ما يلي :

$$b_{n-1}^2 - 2 = a_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} = 2^{(2^n+2(-1)^n)/3} + 2^{-(2^n+2(-1)^n)/3}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} b_n\left(b_{n-1}^2 - 2\right) &= \left(2^{(2^n-(-1)^n)/3} + 2^{-(2^n-(-1)^n)/3}\right) \times \\ &\quad \left(2^{(2^n+2(-1)^n)/3} + 2^{-(2^n+2(-1)^n)/3}\right) \\ &= 2^{\left(2^{n+1}-(-1)^{n+1}\right)/3} + 2^{-\left(2^{n+1}-(-1)^{n+1}\right)/3} + 2^{-(-1)^n} + 2^{(-1)^n} \\ &= b_{n+1} + 2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

إذن

$$\forall n \geq 1,\quad b_{n+1} = b_n\left(b_{n-1}^2 - 2\right) - \frac{5}{2}$$

كما نجد مباشرة أنّ $b_0 = 2$ وأنّ $b_1 = \frac{5}{2}$. وهذا يتيح لنا أن نثبت بالتدريج أنّ $b_n = u_n$ أيّاً كانت قيمة n.

ولكن بملاحظة أنّ $2^n = (-1)^n \bmod 3$ نستنتج أنّ $\frac{2^n-(-1)^n}{3} \in \mathbb{N}$، فالعدد a_n هو عددٌ طبيعي، كما إنّ $n > 0 \Rightarrow a_n > 2$. إذن

$$\forall n \geq 1,\ a_n < u_n < a_n + \frac{1}{2}$$

وهذا يعني أنّ $\lfloor u_n \rfloor = a_n$ في حالة $n \geq 1$، وهذه المساواة صحيحة أيضاً في حالة $n = 0$ وضوحاً. إذن

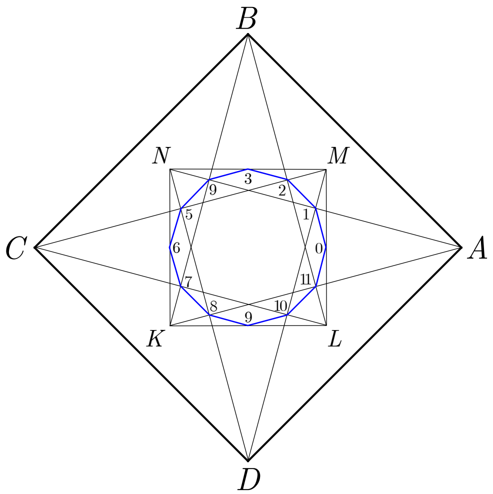
$$\forall n \geq 0,\ \lfloor u_n \rfloor = 2^{(2^n-(-1)^n)/3} = 2^{\mathrm{round}(2^n/3)}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ∎

أولمبياد الرياضيّات التاسع عشر

① **أنشئ مثلّثات متساوية الأضلاع** ABK و BCL و CDM و DAN **داخل مربّع** $ABCD$. **أثبت أنّ منتصفات القطع المستقيمة** $[KL]$ و $[LM]$ و $[MN]$ و $[NK]$ **و منتصفات القطع المستقيمة** $[AK]$ و $[BK]$ و $[BL]$ و $[CL]$ و $[CM]$ و $[DM]$ و $[DN]$ و $[AN]$ **تُؤلّف مضلّعاً اثني عشرياً منتظماً.**

لنطابق بين المستوي ومجموعة الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$. ولنفترض أنّ الأعداد التي تمثّل النقاط A و B و C و D هي بالترتيب $\alpha = 1$ و $\beta = \mathrm{i}$ و $\gamma = -1$ و $\delta = -\mathrm{i}$.



- النقطة K هي صورة B وفق الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$ إذن العدد العقدي κ الذي يمثّل النقطة K يُحقّق

$$\kappa = 1 + e^{\mathrm{i}\pi/3}(\mathrm{i}-1) = 1 + \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\mathrm{i}-1)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+\mathrm{i})$$

وأخيراً

$$\kappa = -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\exp\left(\mathrm{i}\tfrac{\pi}{4}\right)$$

- لّما كانت المثلثات BCL و CDM و DAN هي صور المثلّث ABK وفق الدورانات التي مركزها O (أي مركز المربّع) وزواياها $\frac{\pi}{2}$ و π و $\frac{3\pi}{2}$ بالترتيب، استنتجنا أنّ الأعداد العقديّة λ و μ و ν التي تمثّل النقاط L و M و N بالترتيب تعطى بالصيغ

$$\nu = -\mathrm{i}\kappa \text{ و } \mu = -\kappa \text{ و } \lambda = \mathrm{i}\kappa$$

- وعلى هذا إذا رمزنا z_0 إلى العدد العقدي الذي يمثّل منتصف $[LM]$ كان

$$z_0 = \frac{1}{2}(\lambda+\mu) = -\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\kappa = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

- ولأنّ القطع المستقيمة $[MN]$ و $[NK]$ و $[KL]$ هي صور القطعة المستقيمة $[LM]$ وفق الدورانات التي مركزها O وزواياها $\frac{\pi}{2}$ و π و $\frac{3\pi}{2}$ بالترتيب، استنتجنا أنّ الأعداد العقديّة z_3 و z_6 و z_9 التي تمثّل منتصفات القطع المستقيمة $[MN]$ و $[NK]$ و $[KL]$ تُعطى بالصيغ

$$z_9 = -\mathrm{i}\,z_0 \text{ و } z_6 = -z_0 \text{ و } z_3 = \mathrm{i}\,z_0$$

- وإذا رمزنا z_1 إلى العدد العقدي الذي يمثّل منتصف $[AN]$ كان

$$z_1 = \frac{1}{2}(\alpha+\nu) = \frac{1}{2}(1-\mathrm{i}\kappa)$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = z_0\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{6}\right)$$

إذن $z_1 = \omega z_0$ مع $\omega = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{6}\right)$.

- ولأنّ القطع المستقيمة $[BK]$ و $[CL]$ و $[DM]$ هي صور القطعة المستقيمة $[AN]$ وفق الدورانات التي مركزها O، وزواياها $\frac{\pi}{2}$ و π و $\frac{3\pi}{2}$ بالترتيب، استنتجنا أنّ الأعداد العقديّة z_4 و z_7 و z_{10} التي تمثّل منتصفات القطع المستقيمة $[BK]$ و $[CL]$ و $[DM]$ تُعطى بالصيغ

$$z_{10} = -\mathrm{i}\,z_1 = \omega^{10}z_0 \text{ و } z_7 = -z_1 = \omega^7 z_0 \text{ و } z_4 = \mathrm{i}\,z_1 = \omega^4 z_0$$

وقد استفدنا من كون $\omega^3 = \mathrm{i}$.

- وإذا رمزنا z_2 إلى العدد العقدي الذي يمثّل منتصف $[BL]$ كان

$$z_2 = \frac{1}{2}(\beta+\lambda) = \frac{1}{2}(\mathrm{i}+\mathrm{i}\kappa) = z_0\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{3}\right) = \omega^2 z_0$$

▪ ولأنّ القطع المستقيمة $[CM]$ و $[DN]$ و $[AK]$ هي صور القطعة المستقيمة $[BL]$ وفق الدورانات التي مركزها O، وزواياها $\frac{\pi}{2}$ و π و $\frac{3\pi}{2}$ بالترتيب، استنتجنا أنّ الأعداد العقديّة z_5 و z_8 و z_{11} التي تمثّل منتصفات القطع المستقيمة $[CM]$ و $[DN]$ و $[AK]$ تُعطى بالصيغ

$$z_5 = \mathrm{i}\, z_2 = \omega^5 z_0 \quad \text{و} \quad z_8 = -z_2 = \omega^8 z_0 \quad \text{و} \quad z_{11} = -\mathrm{i}\, z_2 = \omega^{11} z_0$$

بالنتيجة نرى أنّ رؤوس المضلّع المدروس ممثّلة بالأعداد العقديّة $(z_k)_{0\le k\le 11}$ هي رؤوس مضلّع اثني عشري منتظم لأنّ $z_k = z_0\omega^k$ و $\omega = \exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{6})$. ■

② **نتأمّل متتالية منتهية من الأعداد الحقيقيّة، ونفترض أنّ مجموع أي سبعة حدود متتالية منها سالبٌ تماماً ومجموع أي أحد عشر حدّاً متتالياً منها موجبٌ تماماً. فعيّن العدد الأعظمي لحدود هذه المتتالية.**

لنفترض وجود متتالية منتهية $Z = (z_1,\ldots,z_n)$ من $\mathbb{R}^n$ تُحقّق الشروط المذكورة. ولنتأمّل الأشعّة $(U_k)_{1\le k\le n-6}$ و $(V_k)_{1\le k\le n-10}$ من $\mathbb{R}^n$ المعرّفة كما يلي :

$$\begin{aligned} U_k &= (\underbrace{0,\ldots,0}_{k-1},\underbrace{1,1,\ldots,1}_{7},0,\ldots,0) \quad &: 1\le k\le n-6 \\ V_k &= (\underbrace{0,\ldots,0}_{k-1},\underbrace{1,1,\ldots,1}_{10},0,\ldots,0) \quad &: 1\le k\le n-10 \end{aligned}$$

نزوّد الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$ بالجداء السلّمي المتعارَف $\langle X,Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ في حالة $X = (x_1,\ldots,x_n)$ و $Y = (y_1,\ldots,y_n)$.

ونعرّف كالعادة الأساس القانوني $(\varepsilon_k)_{1\le k\le n}$ للفضاء $\mathbb{R}^n$، حيث ε_k هو الشعاع الذي جميع مركّباته أصفار ما عدا المركّبة ذات الدليل k التي تساوي 1.

عندئذ يمكن التعبير عن كون Z تُحقّق شروط المسألة بكتابة

$$\begin{aligned} &\forall k\in\{1,2,\ldots,n-6\}, \quad \langle Z,U_k\rangle < 0 \\ &\forall k\in\{1,2,\ldots,n-10\}, \quad \langle Z,V_k\rangle > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

لنفترض على سبيل الجدل أنّ $n \geq 17$. نلاحظ أنّ

$$\sum_{k=1}^{11} U_k = \sum_{k=1}^{11}\left(\sum_{j=k}^{k+6} \varepsilon_j\right) = \sum_{j=1}^{17} \lambda_j \varepsilon_j$$

مع

$$\begin{aligned}\lambda_j &= \mathrm{card}(\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 11, k \leq j \leq k+6\}) \\ &= \mathrm{card}(\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 11, j-6 \leq k \leq j\}) \\ &= \mathrm{card}(\{k \in \mathbb{N} : \max(1, j-6) \leq k \leq \min(11, j)\}) \\ &= \min(11, j) - \max(0, j-7)\end{aligned}$$

ومنه

$$\lambda_j = \begin{cases} j & : \quad 1 \leq j < 7 \\ 7 & : \quad 7 \leq j \leq 11 \\ 18-j & : \quad 11 < j \leq 17 \end{cases}$$

كما نجد بأسلوب مماثلٍ أنّ

$$\sum_{k=1}^{7} V_k = \sum_{k=1}^{7}\left(\sum_{j=k}^{k+10} \varepsilon_j\right) = \sum_{j=1}^{17} \mu_j \varepsilon_j$$

مع

$$\begin{aligned}\mu_j &= \mathrm{card}(\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 7, k \leq j \leq k+10\}) \\ &= \mathrm{card}(\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 7, j-10 \leq k \leq j\}) \\ &= \mathrm{card}(\{k \in \mathbb{N} : \max(1, j-10) \leq k \leq \min(6, j)\}) \\ &= \min(7, j) - \max(0, j-11)\end{aligned}$$

وبمناقشة ثلاث حالات نجد أنّ $\mu_j = \lambda_j$، فنكون قد أثبتنا أنّ

$$\sum_{k=1}^{11} U_k = \sum_{k=1}^{7} V_k$$

وبحساب الجداء السلّمي لطرفَي المساواة السابقة بالشعاع Z نصل إلى تناقض واضحٍ مع الفرْض (1)، وهذا التناقض يبرهن على أنّ $n \leq 16$.

لنفترض الآن أنّ $n = 16$ ، ولنبحث عن شعاع $Z = (z_k)_{1 \le k \le 16}$ يُحقّق

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,10\}, \quad \langle Z, U_k \rangle = -1$$

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,6\}, \quad \langle Z, V_k \rangle = +1$$

يُكافئ هذا الشرط جملة المعادلات

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\\ z_5\\ z_6\\ z_7\\ z_8\\ z_9\\ z_{10}\\ z_{11}\\ z_{12}\\ z_{13}\\ z_{14}\\ z_{15}\\ z_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\\ -1\\ -1\\ -1\\ -1\\ -1\\ -1\\ -1\\ -1\\ -1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{bmatrix}$$

وهي على كِبَرها ليست صعبة الحلّ إذ نجد بطرح كلٍّ معادلة من التي تسبقها أنّ

$$z_1 = z_2 = z_4 = z_5 = z_6 = z_8 = z_{10} = z_{11} = z_{12} = z_{13} = z_{15} = z_{16}$$
$$z_3 = z_7 = z_{10} = z_{14}$$

ثُمّ من المعادلتين الأولى والحادية عشرة نجد

$$5z_1 + 2z_3 = -1$$

$$8z_1 + 3z_3 = 1$$

ومنه $z_1 = 5$ و $z_3 = -13$. إذن الشعاع Z التالي

$$Z = (-5,-5,13,-5,-5,-5,13,-5,-5,13,-5,-5,-5,13,-5,-5)$$

يُعطي حلاً للمسألة في حالة $n = 16$. فالعدد 16 هو العدد الأعظمي لحدود متتالية منتهية تُحقّق الشرط المعطى. وبذا يكتمل الحل. ■

③ **نُعطى عدداً طبيعيّاً n يُحقّق $n > 2$. ولتكن V_n المجموعة**

$$V_n = \{1 + kn : k \in \mathbb{N}^*\}$$

نقول إن العدد m من V_n «غير قابل للتفريق في V_n» إذا لم يكن بالإمكان كتابته جداءَ ضرب عنصرين من V_n. أثبت أنّه يوجد في V_n عنصرٌ يمكن تفريقه في V_n لجداء عناصر غير قابلة للتفريق من V_n وذلك بأسلوبين مختلفين اختلافاً جوهرياً. (لا ننظر إلى تفريقين يختلفان فقط في ترتيب العناصر على أنهما مختلفان اختلافاً جوهريّاً.)

الفكرة الأساسيّة للحلّ هي في إجاد هذا العدد بالصيغة $N = abcd$ بعد أن نختار الأعداد a و b و c و d مساوية $-1 \bmod n$، وعلى نحوٍ تكون فيه جداءات الضرب ab و cd و ac و bd التي هي بالضرورة أعدادٌ من V_n غير قابلة للتفريق في V_n. سنرى فيما يلي طريقتين لتحقيق ذلك.

طريقة أولى : يمكن أن نستفيد من مبرهنة Dirichlet التي تنصّ على وجود عددٍ لا نهائي من الأعداد الأوليّة بين حدود المتتالية $(kn-1)_{k\in\mathbb{N}^*}$. نتأمّل إذن عدداً أوّلياً p يُحقّق $p \equiv -1 \bmod n$ و $p \neq n-1$. ونعرّف

$$N = (n-1)^2\, p^2 = ((n-1)\,p)^2$$

فتكون الأعداد $(n-1)^2$ و p^2 و $(n-1)\,p$ عناصر متباينة من V_n. بقي أن نتيقّن أنّ كلاً من هذه العناصر غير قابل للتفريق في V_n.

- لو كان $(n-1)^2 = u \cdot v$ مع u و v من V_n، (إذن كلٌّ منهما أكبر من $n+1$) كان $(n-1)^2 \geq (n+1)^2$ وهذا خُلفٌ واضحٌ.
- وكذلك لو كان $p^2 = u \cdot v$ مع u و v من V_n، استنتجنا أنّ p يقسم أحد العددين u أو v، لنفترض جدلاً أنّ $u = kp$. فيكون $p = kv$، ولأنّ p أوّلي و $v \neq 1$ استنتجنا من ذلك أنّ $v = p$ وهذا يناقض طريقة اختيارنا للعدد p لأنّ $v \equiv 1 \bmod n$، و $n \neq 2$.
- وأخيراً لو كان $(n-1)\,p = u \cdot v$ مع u و v من V_n، استنتجنا أنّ p يقسم أحد العددين u أو v، لنفترض جدلاً أنّ $u = kp$. فيكون $n-1 = kv$ ولأنّ v أكبر أو يساوي $n+1$ استنتجنا من ذلك أنّ $n-1 \geq n+1$ وهذا خُلفٌ أيضاً.

فالعدد N أعلاه يُحقّق الخاصّة المرجوّة.

طريقة ثانية : بدلاً من الاعتماد على مبرهنة Dirichet وهي مبرهنة صعبة، يمكن أن نستبدل بالعدد p أوّل عدد يلي $n-1$ ويساوي -1 بالقياس n أي $2n-1$، ولكن يجب أن نكون حذرين قليلاً. لنتأمّل إذن الأعداد

$$z=(n-1)(2n-1) \quad \text{و} \quad y=(2n-1)^2 \quad \text{و} \quad x=(n-1)^2$$

فتكون الأعداد x و y و z عناصر متباينة من V_n، والعدد $N=xy=z^2$ يقبل تفريقين مختلفين كجداء عناصر من V_n. ولكن أتكون هذه العناصر غير قابلة للتفريق في V_n ؟

- لقد رأينا أنّ x لا يقبل التفريق في V_n.
- لنفترض أنّ $z=(\alpha n+1)\cdot(\beta n+1)$ مع (α,β) من $\mathbb{N}^{*2}$. عندئذ

$$\alpha+\beta+3=(2-\alpha\beta)n$$

وهذه المساواة تقتضي أنّ $\alpha\beta=1$ و $\alpha+\beta+3=n$. أي $\alpha=\beta=1$ و $n=5$. فإذا كان $n\neq 5$ كان z عنصراً غير قابل للتفريق في V_n.

- لنفترض أنّ $y=(\alpha n+1)\cdot(\beta n+1)$ مع (α,β) من $\mathbb{N}^{*2}$. عندئذ

$$\alpha+\beta+4=(4-\alpha\beta)n$$

ومنه $1\leq\alpha\beta\leq 3$.

  - في حالة $\alpha\beta=1$ يكون $\alpha+\beta=2$ ومنه $n=2$، وهذا يُخالف الفرْض.
  - وفي حالة $\alpha\beta=2$ يكون $\alpha+\beta=3$ ومنه $7=2n$ وهذا خُلفٌ أيضاً.
  - وفي حالة $\alpha\beta=3$ يكون $\alpha+\beta=4$ ومنه $n=8$.

وعليه إذا كان $n\neq 8$ كان y عنصراً غير قابل للتفريق في V_n.

وهكذا نكون قد أثبتا أنّه في حالة $n\notin\{5,8\}$ يُحقّق العدد $N=(n-1)^2(2n-1)^2$ الخاصّة المطلوبة. أمّا في حالة $n=5$ فيمكن أن نختار $N=4^2\times 19^2$ وذلك باتّباع الطريقة الأولى، وفي حالة $n=8$ نختار $N=7^2\times 23^2$. وبذا يتمّ الإثبات. ■

④ **الأعداد** (a,b,A,B) **أعدادٌ حقيقيّة معطاة. نتأمّل التابع**

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos(2x)-B\sin(2x)$$

نفترض أنّ $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geq 0$. **أثبت أنّ**

$$A^2+B^2\leq 1 \quad \text{و} \quad a^2+b^2\leq 2$$

لنعرّف $\zeta = a - \mathrm{i}\, b = |\zeta| e^{\mathrm{i}\theta}$، و $\xi = A - \mathrm{i}\, B = |\xi| e^{\mathrm{i}\varphi}$. عندئذ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{Re}\left(1 - \zeta e^{\mathrm{i}\, x} - \xi e^{2\mathrm{i}\, x}\right)$$

وهكذا نتأمّل $g(x) = 1 - \zeta e^{\mathrm{i}\, x} - \xi e^{2\mathrm{i}\, x}$ ليكون $f = \operatorname{Re}(g)$.

- نلاحظ أنّ $g(x+\pi) = 1 + \zeta e^{\mathrm{i}\, x} - \xi e^{2\mathrm{i}\, x}$، ومنه

$$g(x) + g(x+\pi) = 2\left(1 - \xi e^{2\mathrm{i}\, x}\right)$$

ومن ثَمّ

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - |\xi| \cos(2x + \varphi) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x+\pi)) \geq 0$$

يكفي أن نختار $x = -\frac{1}{2}\varphi$، لنستنتج أنّ $|\xi| \leq 1$، أي

$$A^2 + B^2 \leq 1$$

- كما نلاحظ أنّ

$$g\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \zeta e^{\mathrm{i}\, x} e^{\mathrm{i}\pi/4} - \mathrm{i}\, \xi e^{2\mathrm{i}\, x}$$
$$g\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \zeta e^{\mathrm{i}\, x} e^{-\mathrm{i}\pi/4} + \mathrm{i}\, \xi e^{2\mathrm{i}\, x}$$

ومن ثَمّ

$$g\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + g\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{2}\zeta e^{\mathrm{i}\, x}$$

إذن

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2} - |\zeta| \cos(x + \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \geq 0$$

يكفي إذن أن نختار $x = -\theta$ لنستنتج أنّ $|\zeta| \leq \sqrt{2}$، أي

$$a^2 + b^2 \leq 2$$

وبذا يتمّ الإثبات.

⑤ في حالة عددين طبيعيّين موجبين تماماً a و b، نرمز $Q_{a,b}$ إلى خارج قسمة $a^2 + b^2$ على العدد $a + b$، ونرمز $R_{a,b}$ إلى باقي هذه القسمة. عيِّن جميع الأزواج (a,b) من $(\mathbb{N}^*)^2$ التي تُحقّق $(Q_{a,b})^2 + R_{a,b} = 1977$.

لنتأمّل (a,b) من $(\mathbb{N}^*)^2$ يُحقّقان $(Q_{a,b})^2 + R_{a,b} = 1977$. نلاحظ أنّ

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\big((a+b)^2 + (a-b)^2\big)$$

إذن

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{a+b}{2} + \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$$

وهذا يبرهن على أنّ

$$\left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{a^2+b^2}{a+b} \right\rfloor = Q_{a,b} \leq \sqrt{1977}$$

ولأنّ $44^2 = 1936$ و $45^2 = 2025$ استنتجنا من المتراجحة السابقة أنّ

$$\frac{a+b}{2} - 1 < \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor \leq 44$$

ومن ثَمّ $a+b < 90$. ولأنّ $R_{a,b}$ هو باقي قسمة a^2+b^2 على $a+b$ استنتجنا أنّ

$$0 \leq R_{a,b} < a+b < 90$$

وعليه نستنتج من $(Q_{a,b})^2 = 1977 - R_{a,b}$ أنّ

$$1977 - 90 \leq (Q_{a,b})^2 \leq 1977$$

ولأنّ $43^2 = 1849$ استنتجنا مما سبق أنّ $43^2 < (Q_{a,b})^2 < 45^2$ إذن $Q_{a,b} = 44$.
ومن ثَمّ

$$R_{a,b} = 1977 - (Q_{a,b})^2 = 1977 - 1936 = 41$$

وهكذا نستنتج أنّ

$$a^2 + b^2 = 44(a+b) + 41$$

وهذه المساواة تُكافئ

$$(a-22)^2 + (b-22)^2 = 1009$$

ولكن باستعراض المربّعات التي هي أصغر من 1009 نجد أنّ 1009 يُكتب بأسلوب وحيد مجموع مربّعين هما 28^2 و 15^2. وهذا يُعطي للمسألة حلّين ممكنين فقط هما

$$\{a,b\} = \{37,50\} \quad \text{و} \quad \{a,b\} = \{7,50\}$$

ونتيقّن بالعكس، أنّ $\{(7,50),(50,7),(37,50),(50,37)\}$ هي حلولٌ للمسألة المطروحة فهي تمثّل مجموعة حلول المسألة. ■

⑥ **نتأمّل تابعاً** $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$. **ونفترض أنّ**

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad f(n+1)>f(f(n))$$

أثبت أنّ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad f(n)=n$.

لنعرّف المتتالية $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ بالصيغة $q_n=\min\{f(k):k\geq n\}$. ولتكن $\mathbb{P}_n$ القضيّة:

«المتتالية المنتهية $(q_k)_{1\leq k\leq n+1}$ متزايدة تماماً.»

سنبرهن بالتدريج على العدد n أنّ $\mathbb{P}_n$ صحيحة مهما كانت قيمة n .

- إنّ $\mathbb{P}_1$ صحيحة. ليكن k عدداً يُحقّق $k\geq 2$. عندئذ نستنتج من أنّ $f(k-1)\geq 1$

$$f(k)>f(f(k-1))\geq\min\{f(j):j\geq 1\}=q_1$$

إذن $\forall k\geq 2,\ f(k)\geq 1+q_1$ وهذا يبرهن أنّ $q_2\geq 1+q_1$ ، ومنه صحّة $\mathbb{P}_1$.

- كما إنّ $\mathbb{P}_n\Rightarrow\mathbb{P}_{n+1}$. لنفترض أنّ $\mathbb{P}_n$ صحيحة. عندئذ يكون $q_{n+1}\geq n+1$ لأنّ

$$q_{n+1}-q_1=\sum_{k=1}^{n}(q_{k+1}-q_k)\geq\sum_{k=1}^{n}1=n$$

ليكن k عدداً طبيعيّاً يُحقّق $k\geq n+2$. عندئذ $k-1\geq n+1$ ، واستناداً إلى تعريف q_{n+1} يكون $f(k-1)\geq q_{n+1}$ ، ومن ثَمّ $f(k-1)\geq n+1$ ، وهذا يبرهن على أنّ

$$f(k)>f(f(k-1))\geq\min\{f(j):j\geq n+1\}\geq q_{n+1}$$

إذن $\forall k\geq n+2,\ f(k)\geq 1+q_{n+1}$ ، أي إنّ $q_{n+2}\geq 1+q_{n+1}$. ومنه صحّة $\mathbb{P}_{n+1}$. إذن لقد أثبتنا أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad q_n<q_{n+1}\qquad(1)$$

ولكن، في حالة n من $\mathbb{N}^*$ ، لدينا $q_n=\min(f(n),q_{n+1})$ ، والمتراجحة (1) تقتضي أنّ $q_n=f(n)$. إذن لقد أثبتنا أنّ f تابعٌ متزايدٌ تماماً أي

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad f(n)<f(n+1)\qquad(2)$$

وبوجه، خاص نستنتج من (2) أنّ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f(n)\geq n$.

وبالعكس، في حالة n من $\mathbb{N}^*$ ، لدينا $f(n+1)>f(f(n))$ ، ولكنّ التابع f تابعٌ متزايدٌ تماماً، إذن $n+1>f(n)$ أو $n\geq f(n)$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f(n)=n$$

وهي الخاصّة المطلوبة. ◼

① **m و n عددان طبيعيّان موجبان تماماً ويُحقّقان $m<n$. نفترض أنّ أصغر ثلاث خانات في الكتابة العشريّة للعدد 1978^m تساوي أصغر ثلاث خانات في الكتابة العشريّة للعدد 1978^n. أوجد n و m إذا علمتَ أنّ لمجموعهما $n+m$ أصغر قيمة ممكنة.**

لنتأمّل عددين طبيعيّين m و n يُحقّقان $1\leq m<n$. ولنفترض أنّ

$$1978^n = 1978^m \bmod (1000)$$

هذا يُكافئ أنّ

$$1000 \mid 1978^m (1978^{n-m} - 1) \tag{1}$$

ولأنّ $1000 = 8\times 125$ و $1978^{n-m}-1$ عددٌ فردي، استنتجنا مما سبق أنّ العدد 8 يقسم $1978^m = 2^m \times 989^m$، ومن ثَمّ $m\geq 3$.

وعليه يُكافئ الشرط (1) الشرط التالي

$$125 \mid \left(989^3 \times 1978^{m-3} \times (1978^{n-m}-1)\right)$$

ولكنّ $\gcd\left(125, 989^3 \times 1978^{m-3}\right) = 1$، أي إنّ العددين $989^3 \times 1978^{m-3}$ و 125 أوّليّان فيما بينهما، إذن الشرط السابق يُكافئ الشرط التالي

$$125 \mid (1978^{n-m}-1)$$

أو $1978^{n-m} = 1 \bmod 5^3$، ولأنّ $1978 = -22 \bmod 5^3$، استنتجنا أنّ الشرط (1) يُكافئ الشرط التالي :

$$(-22)^{n-m} = 1 \bmod 5^3 \tag{2}$$

لنبحث إذن عن رتبة العدد $a=-22$ في الزمرة الضربيّة $\left(\mathbb{Z}/(5^3\mathbb{Z})\right)^\times$، أي عن أصغر عدد طبيعي موجبٍ تماماً r يُحقِّق $(-22)^r = 1 \bmod 5^3$.

ولّما كان عدد عناصر الزمرة $\left(\mathbb{Z}/(5^3\mathbb{Z})\right)^\times$ يساوي 100، (لأنّه يساوي عدد الأعداد التي لا تقبل القسمة على 5 في المجموعة $\{0,1,\ldots,124\}$) استنتجنا أنّ $r \mid 100$. فإذا كان $r<100$ وجب أن يكون r قاسماً لأحد العددين 50 أو 20.

لنلاحظ أوّلاً أنّ $125 = 2^2 + 11^2$ ، ومن ثَمّ $11^2 = -2^2 \bmod 5^3$. وعليه يمكننا أن نكتب

$$a^5 = -2^5 \times 11^4 \times 11 = -\underbrace{2^5 \times 2^4}_{512} \times 11 = -12 \times 11 = -132 \bmod 5^3$$

إذن $a^5 = -7 \bmod 5^3$. وهذا يقتضي أنّ $a^{10} = 49 \bmod 5^3$. ومنه

$$a^{20} = (50-1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 26 \bmod 5^3$$

إذن $20 \nmid r$. وكذلك نجد أنّ

$$a^{40} = \left(a^{20}\right)^2 = (25+1)^2 = 51 \bmod 5^3$$

ومن ثَمّ

$$a^{50} = a^{40} \times a^{10} = (50+1)(50-1) = 2500 - 1 = -1 \bmod 5^3$$

إذن لدينا أيضاً $50 \nmid r$. وهكذا نكون قد برهنّا أنّ $r = 100$ ، أي

$$\min\left\{k : a^k = 1 \bmod 5^3\right\} = 100$$

وعليه نستنتج أنّ الشرط (2) يُكافئ $100 \mid (n-m)$. ولأنّ $n > m \geq 3$ استنتجنا أنّ

$$n = m + 100k \geq 3 + 100 = 103$$

ومنه $n + m \geq 106$ ، وتحدث المساواة فقط في حالة $(m,n) = (3,103)$. وهي تمثّل إذن الحلّ المطلوب.

② **لتكن P نقطة واقعة داخل كرة S . تقطع ثلاثة أنصاف مستقيمات منبعثة من P ومتعامدة مثنى مثنى، الكرة S في U و V و W . ولتكن Q الرأس المقابل قطريّاً للنقطة P في متوازي السطوح الذي يقبل $[PU]$ و $[PV]$ و $[PW]$ أضلاعاً. أوجد المحلّ الهندسي للنقطة Q عندما تتحوّل أنصاف المستقيمات المنبعثة من P . (مع بقائها بالطبع متعامدة مثنى مثنى.)**

لنرمز بالرمز O إلى مركز الكرة S ، ولنكتب R دلالة على نصف قطرها. ولنعرّف $\rho = OP$.

لنتأمّل أشعّة واحدة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ توجّه أنصاف المستقيمات $[PU)$ و $[PV)$ و $[PW)$. عندئذ تكوّن الجملة $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ أساساً متعامداً للفضاء.

لنرمز أيضاً (α,β,γ) إلى مركّبات الشعاع $\overrightarrow{PO}$ في الجملة $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. أي

$$\overrightarrow{PO}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}$$

ولمّا كان $OP=\rho$ استنتجنا أنّه عندما تتحوّل الجملة $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ مع بقائها متعامدة، يأخذ الشعاع (α,β,γ) جميع القيم من المجموعة $\mathcal{A}$ التالية

$$\mathcal{A}=\left\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 : \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\rho^2\right\}$$

- نعلم أنّ $\overrightarrow{PU}=x\vec{u}$ مع x من $\mathbb{R}_+^*$. ومن ثَمّ

$$\overrightarrow{OU}=\overrightarrow{PU}-\overrightarrow{PO}=(x-\alpha)\vec{u}-\beta\vec{v}-\gamma\vec{w}$$

ولكن $OU=R$، وهذا يُكافئ

$$(x-\alpha)^2+\beta^2+\gamma^2=R^2$$

ولأنّ $\beta^2+\gamma^2=\rho^2-\alpha^2$ استنتجنا مما سبق، ومن كون $x>0$، أنّ

$$x=\sqrt{R^2-\rho^2+\alpha^2}+\alpha$$

- كما نعلم أنّ $\overrightarrow{PV}=y\vec{v}$ و $\overrightarrow{PW}=z\vec{w}$ مع y و z من $\mathbb{R}_+^*$. نستنتج بأسلوب مماثلٍ لِما سبق أنّ

$$y=\sqrt{R^2-\rho^2+\beta^2}+\beta \quad \text{و} \quad z=\sqrt{R^2-\rho^2+\gamma^2}+\gamma$$

- ولكن

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PU}+\overrightarrow{PV}+\overrightarrow{PW}-\overrightarrow{PO}$$

إذن

$$\overrightarrow{OQ}=\sqrt{R^2-\rho^2+\alpha^2}\,\vec{u}+\sqrt{R^2-\rho^2+\beta^2}\,\vec{v}+\sqrt{R^2-\rho^2+\gamma^2}\,\vec{w}$$

وبوجه خاص

$$\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|^2=3\left(R^2-\rho^2\right)+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3R^2-2\rho^2$$

فالنقطة Q تتحوّل على الكرة $\mathcal{S}'$ التي مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{3R^2-2\rho^2}$. فالمحلّ الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة Q عندما تتحوّل الجملة المتعامدة $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ محتوى في الكرة $\mathcal{S}'$.

إنّ إثبات العكس، أي إثبات أنّ جميع نقاط الكرة $\mathcal{S}'$ تنتمي إلى المحلّ الهندسي $\mathcal{L}$. أمرٌ أكثر تعقيداً.

لنثبّت مؤقّتاً جملة متعامدة $\mathcal{B}_0 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. ولنكتب كما في السابق (α, β, γ) دلالة على مركّبات الشعاع $\overrightarrow{PO}$ في الجملة $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. أي

$$\overrightarrow{PO} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

مع $\alpha = \overrightarrow{PO} \cdot \vec{u}$ و $\beta = \overrightarrow{PO} \cdot \vec{v}$ و $\gamma = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{w}$، و

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \rho^2 = OP^2$$

ثُمّ لنتأمّل في حالة θ من $[0, 2\pi[$ الجملة $\mathcal{B}_\theta = (\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta}, \vec{w})$. مع

$$\overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\vec{u} + \sin\theta\vec{v}$$

$$\overrightarrow{v_\theta} = -\sin\theta\vec{u} + \cos\theta\vec{v}$$

$\mathcal{B}_\theta$ هي الجملة الناتجة من دوران الجملة $\mathcal{B}_0$ حول المحور $\mathbb{R}\vec{w}$ بزاوية θ. ثُمّ لنكتب $(\alpha_\theta, \beta_\theta, \gamma)$ دلالة على مركّبات الشعاع $\overrightarrow{PO}$ في الجملة $\mathcal{B}_\theta = (\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta}, \vec{w})$. فيكون

$$\alpha_\theta = \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{u_\theta} = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta$$

$$\beta_\theta = \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{v_\theta} = -\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta$$

وأخيراً لتكن Q_θ النقطة من المحلّ الهندسي $\mathcal{L}$ الموافقة للجملة $\mathcal{B}_\theta$. عندئذ نستنتج بناءً على الدراسة السابقة أنّ

$$\overrightarrow{OQ_\theta} = \sqrt{R^2 - \rho^2 + \alpha_\theta^2}\,\overrightarrow{u_\theta} + \sqrt{R^2 - \rho^2 + \beta_\theta^2}\,\overrightarrow{v_\theta} + \sqrt{R^2 - \rho^2 + \gamma^2}\,\vec{w}$$

وهكذا نرى أنّه عندما تتحوّل θ في المجال $[0, 2\pi[$ تتحوّل Q_θ في المستوي $\mathcal{P}_{\vec{w}}$ المار بالنقطة W عموديّاً على $\vec{w}$، أي على قوس من الدائرة $\mathcal{C}_{\vec{w}}$ الناتجة من تقاطع المستوي $\mathcal{P}_{\vec{w}}$ مع الكرة $\mathcal{S}'$. والسؤال هو : هل ترسم Q_θ كامل هذه الدائرة ؟.

إذا نسبنا المستوي $\mathcal{P}_{\vec{w}}$ إلى الجملة المتعامدة النظاميّة $(W; \vec{u}, \vec{v})$، وكتبنا (X_θ, Y_θ) دلالة على إحداثيّتي النقطة Q_θ في هذه الجملة، وجدنا اعتماداً على ما سبق أنّ

$$X_\theta = \sqrt{R^2 - \rho^2 + \alpha_\theta^2}\cos\theta - \sqrt{R^2 - \rho^2 + \beta_\theta^2}\sin\theta$$

$$Y_\theta = \sqrt{R^2 - \rho^2 + \alpha_\theta^2}\sin\theta + \sqrt{R^2 - \rho^2 + \beta_\theta^2}\cos\theta$$

ومن ثَمّ

$$X_\theta + \mathrm{i}\,Y_\theta = e^{\mathrm{i}\theta}\left(\sqrt{R^2 - \rho^2 + \alpha_\theta^2} + \mathrm{i}\sqrt{R^2 - \rho^2 + \beta_\theta^2}\right)$$

لنبحث إذن عن صيغة بسيطة للعدد

$$Z_\theta = \sqrt{R^2 - \rho^2 + \alpha_\theta^2} + \mathrm{i}\sqrt{R^2 - \rho^2 + \beta_\theta^2}$$

في الحقيقة،

$$\begin{aligned} |Z_\theta|^2 &= 2\left(R^2 - \rho^2\right) + \alpha_\theta^2 + \beta_\theta^2 = \\ &= 2\left(R^2 - \rho^2\right) + \underbrace{\alpha_\theta^2 + \beta_\theta^2 + \gamma^2}_{\rho^2} - \gamma^2 = 2R^2 - \rho^2 - \gamma^2 \end{aligned}$$

وهي نتيجة متوقّعة لأنّ Q_θ تتحوّل على الدائرة $\mathcal{C}_{\vec{w}}$ في المستوي $\mathcal{P}_{\vec{w}}$. كما نستنتج من كون الجزئين الحقيقي والتخيّلي للعدد Z_θ ينتميان إلى $\mathbb{R}_+$، أنّه يوجد عددٌ وحيدٌ ψ_θ ينتمي إلى المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ويُحقّق :

$$Z_\theta = \sqrt{2R^2 - \rho^2 - \gamma^2}\, e^{\mathrm{i}\,\psi_\theta}$$

ولكن، إذا عرّفنا φ بالعلاقة $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, e^{\mathrm{i}\varphi} = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$ لاحظنا مباشرة أنّ

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(Z_\theta^2\right) &= \alpha_\theta^2 - \beta_\theta^2 \\ &= (\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)^2 - (-\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)^2 \\ &= \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\cos 2\theta + 2\alpha\beta\sin 2\theta \\ &= \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\cos(2\theta - 2\varphi) = \left(\rho^2 - \gamma^2\right)\cos(2\theta - 2\varphi) \end{aligned}$$

وهو يساوي أيضاً

$$\mathrm{Re}\left(Z_\theta^2\right) = \left(2R^2 - \rho^2 - \gamma^2\right)\cos(2\psi_\theta)$$

وهكذا نرى أنّ

$$\cos(2\psi_\theta) = \frac{\rho^2 - \gamma^2}{2R^2 - \rho^2 - \gamma^2}\cos(2\theta - 2\varphi)$$

وأخيراً

$$\psi_\theta = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{\rho^2 - \gamma^2}{2R^2 - \rho^2 - \gamma^2}\cos(2\theta - 2\varphi)\right)$$

إذن

$$\begin{aligned} X_\theta + \mathrm{i}\,Y_\theta &= \sqrt{2R^2 - \rho^2 - \gamma^2}\, e^{\mathrm{i}\varphi} \times e^{\mathrm{i}(\theta - \varphi + \psi_\theta)} \\ &= \sqrt{\frac{2R^2 - \rho^2 - \gamma^2}{\rho^2 - \gamma^2}} \times (\alpha + \mathrm{i}\,\beta) \times e^{\mathrm{i}\,h(\theta - \varphi)} \end{aligned}$$

وقد عرّفنا $h(t)$ بالصيغة

$$h(t) = t + \frac{1}{2}\arccos(\lambda\cos(2t))$$

والعدد λ من $]0,1[$، بالصيغة

$$\lambda = \frac{\rho^2 - \gamma^2}{2R^2 - \rho^2 - \gamma^2} = \frac{\rho^2 - \gamma^2}{2(R^2 - \rho^2) + \rho^2 - \gamma^2}$$

ولكن نلاحظ مباشرة أنّ

$$\begin{aligned} h'(t) &= 1 + \frac{\lambda\sin(2t)}{\sqrt{1 - \lambda^2\cos^2(2t)}} \\ &\geq 1 - \frac{\lambda|\sin(2t)|}{\sqrt{1 - \lambda^2\cos^2(2t)}} = 1 - \sqrt{\frac{\lambda^2 - \lambda^2\cos^2(2t)}{1 - \lambda^2\cos^2(2t)}} \\ &\geq 1 - \sqrt{1 - \frac{1 - \lambda^2}{1 - \cancel{\lambda^2\cos^2(2t)}}} \geq 1 - \lambda > 0 \end{aligned}$$

فالتابع h تابعٌ متزايدٌ تماماً، وهو يُحقّق

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t + 2\pi) - h(t) = 2\pi$$

فعندما ترسم t مجالاً طوله 2π ترسم صورتها $h(t)$ مجالاً طوله 2π أيضاً، ومن ثَمّ عندما ترسم θ المجال $[0, 2\pi]$ ترسم $e^{\mathrm{i}h(\theta-\varphi)}$ كامل الدائرة المثلّثيّة، وعليه ترسم النقطة Q_θ كامل الدائرة $\mathcal{C}_{\vec{w}} = \mathcal{P}_{\vec{w}} \cap \mathcal{S}'$.

لتكن إذن Q من $\mathcal{S}'$، ولنختر W نقطة ما من نقاط الدائرة $\mathcal{C}$ الناتجة من تقاطع الكرة $\mathcal{S}$ مع الكرة التي قطرها $[PQ]$. فيكون $(PW) \perp (WQ)$. إذن تنتمي Q إلى المستوي $\mathcal{P}_W$ المار من النقطة W عمودياً على (PW) والذي يتقاطع مع $\mathcal{S}'$ وفق الدائرة $\mathcal{C}_{\vec{w}}$، إذْ عرّفنا $\vec{w} = \frac{1}{PW}\overrightarrow{PW}$. إذن $Q \in \mathcal{C}_{\vec{w}}$، أي إنّ Q تنتمي إلى المحلّ الهندسي $\mathcal{L}$ ويتمّ البرهان.

ملاحظة : نستنتج مما سبق طريقة لإنشاء النقاط U و V و W انطلاقاً من Q.

1. نختار W نقطة ما من الدائرة $\mathcal{C}$ دائرة تقاطع الكرة $\mathcal{S}$ مع الكرة التي قطرها $[PQ]$.
2. نعيِّن V و U نقطتي تقاطع $\mathcal{C}$ مع المستوي $\mathcal{P}$ المار بالنقطة P عمودياً على (PW).

وبذا يتمّ الإثبات.

③ **نفترض أنّ مجموعة الأعداد الطبيعيّة** $\mathbb{N}^*$ **تساوي اجتماع مجموعتين جزئيّتين منفصلتين** $F = \{f(k) : k \geq 1\}$ **و** $G = \{g(k) : k \geq 1\}$، **حيث** f **و** g **تابعان متزايدان تماماً من** $\mathbb{N}^*$ **إلى** $\mathbb{N}^*$، **ويُحقّقان الشرط :** $\forall n \in \mathbb{N}^*, g(n) = 1 + f(f(n))$.
احسب قيمة $f(240)$.

لنلاحظ ما يلي :

- نستنتج من الفرْض أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n+1) \geq 1 + f(n) \qquad (1)$$

- لنفترض أنّه في حالة عددٍ m من $\mathbb{N}^*$ كان $f(m+1) > 1 + f(m)$، عندئذ لا بُدّ أن ينتمي العدد $1 + f(m)$ إلى G، فيوجد عددٌ k من $\mathbb{N}^*$ يُحقّق

$$g(k) = 1 + f(m)$$

ومنه نستنتج أنّ

$$1 + f(m) = g(k) = 1 + f(f(k))$$

وهذا يقتضي أنّ $m = f(k)$، أي $m \in F$. هكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$1 + f(m) < f(m+1) \Rightarrow m \in F \qquad (2)$$

- وبالعكس، لنفترض أنّ m ينتمي إلى F، فيوجد عددٌ k من $\mathbb{N}^*$ يُحقّق $f(k) = m$ وعندئذ يكون

$$1 + f(m) = 1 + f(f(k)) = g(k) \in G$$

إذن $F \not\ni 1 + f(m)$ ومنه $f(m+1) > 1 + f(m)$ وذلك بناءً على (1).

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$1 + f(m) < f(m+1) \Leftrightarrow m \in F \qquad (3)$$

- لنفترض أنّه يوجد عددٌ n من $\mathbb{N}^*$ يُحقّق $f(n+1) > f(n) + 2$. بناءً على (3)، هذا يعني أنّ $n \in F$ فيوجدُ عددٌ p من $\mathbb{N}^*$ يُحقّق $n = f(p)$، كما يعني أيضاً أنّ $f(n) + 2$ ينتمي إلى G، فيوجد عددٌ q من $\mathbb{N}^*$ يُحقّق $g(q) = f(n) + 2$، ومنه

$$1 + f(f(q)) = 2 + f(n)$$

فالعدد $a = f(f(q))$ من F، يُحقّق

$$a = 1 + f(n) = 1 + f(f(p)) = g(p)$$

فهو ينتمي أيضاً إلى G، وهذا خُلفٌ واضحٌ. إذن لقد أثبتنا أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n+1) \le f(n) + 2 \qquad (4)$$

- لنعرّف $\mathbb{1}_F$ التابع المميِّز للمجموعة F أي الذي يأخذ القيمة 1 عندما تنتمي n إلى F، ويأخذ القيمة 0 عندما لا تنتمي n إلى F. عندئذ نستنتج من (1) و (2) و (4) أن

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n+1) = f(n) + 1 + \mathbb{1}_F(n) \qquad (5)$$

- لمّا كان $g(1) = 1 + f(f(1)) \ge 1 + 1 = 2$، استنتجنا أنّ $1 \notin G$ ومن ثَمّ $1 \in F$. فيوجد p من $\mathbb{N}^*$ يُحقّق $f(p) = 1$. بالطّبع إذا كان $p > 1$ وصلنا إلى التناقض $1 = f(p) > f(1)$، وعليه يجب أن يكون $f(1) = 1$.
- بجمع المساوايات (5) عندما تتحوّل n من 1 إلى $m-1$ نجد

$$\forall m \ge 2, \quad f(m) = f(1) + m - 1 + \sum_{n=1}^{m-1} \mathbb{1}_F(n)$$

ولكن $f(1) = 1$ إذن

$$\forall m \ge 1, \quad f(m) = m + \operatorname{card}(F \cap [1, m[) \qquad (6)$$

إذْ لاحظنا أنّ هذه العلاقة تبقى صحيحة في حالة $m = 1$.

- العلاقة (6) علاقةٌ تدريجيّة تُفيد في حساب قيمة $f(m)$ أيّاً كانت قيمة m إذ تُكتب بالصيغة المُكافئة التالية :

$$\forall m \ge 1, \quad f(m) = m + \operatorname{card}(\{k \in \mathbb{N}^* : f(k) < m\}) \qquad (7)$$

ونجد مثلاً

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16

بالطبع، العلاقة (7) تكفي لحساب $f(240)$، ولكنّ الحساب طويل، لذلك سنحاول البحث عن صيغة أخرى للتابع f.

الفكرة تنبع من الملاحظة التالية. لدينا من جهة أولى أنّ $m \leq f(m) \leq 2m$ أيّاً كانت قيمة m. فإذا افترضنا تجاوزاً أنّ $f(m) = \alpha m$، كان $\operatorname{card}\{k : f(k) < m\} = \frac{m}{\alpha}$، ومن ثَمّ تكافئ العلاقة التدريجيّة المساواة $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$ أي $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. إذن، أيكون $f(m) = \lfloor \alpha m \rfloor$ في حالة m من $\mathbb{N}^*$ ؟

لنثبت بالتدريج على العدد m من $\mathbb{N}^*$، أنّ $f(m) = \lfloor \alpha m \rfloor$ مع $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

- نتحقّق مباشرة أنّ هذه الخاصّة في حالة $1 \leq m \leq 10$.
- لنفترض أنّ $f(k) = \lfloor \alpha k \rfloor$ في حالة $k < n$. عندئذ نستنتج من كون $\alpha \notin \mathbb{Q}$، أنّ

$$\begin{aligned}\{k \in \mathbb{N}^* : f(k) < n\} &= \{k \in \mathbb{N}^* : \lfloor \alpha k \rfloor < n\} \\ &= \{k \in \mathbb{N}^* : \alpha k < n\} \\ &= \left\{k \in \mathbb{N}^* : k < \frac{n}{\alpha}\right\} \\ &= \left\{k \in \mathbb{N}^* : k \leq \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor\right\}\end{aligned}$$

إذن،

$$\operatorname{card}(\{k \in \mathbb{N}^* : f(k) < n\}) = \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor$$

ثُمّ بالاعتماد على (7) نجد

$$f(n) = n + \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor = \left\lfloor \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) n \right\rfloor = \lfloor \alpha n \rfloor$$

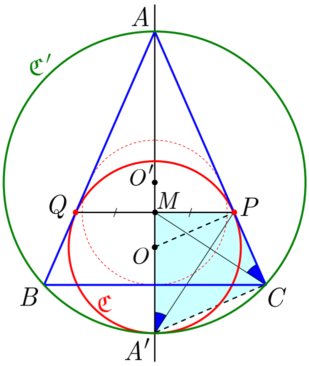
وقد استفدنا من كون $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = \lfloor \alpha n \rfloor$$

فنستنتج أنّ $f(240) = 388$. ■

④ **نتأمّل مثلثاً متساوي الساقين ABC فيه $AB = AC$. الدائرة $\mathfrak{C}$ تمسّ داخليّاً الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC، وتمسّ أيضاً الضلعين $[AB]$ و $[AC]$ في النقطتين P و Q بالترتيب. أثبت أنّ منتصف القطعة $[PQ]$ هو مركز الدائرة المماسّة داخلاً لأضلاع المثلّث ABC.**

لنكتب A' دلالة على نقطة تماس الدائرة $\mathfrak{C}$ والدائرة $\mathfrak{C}'$ المارّة برؤوس المثلّث. يقع O مركز $\mathfrak{C}$ على منصّف الزاوية $\widehat{BAC}$، ويقع O' مركز الدائرة $\mathfrak{C}'$ يقع على محور الضلع $[BC]$، ولكنّ المثلّث ABC متساوي الساقين فيه $AB = AC$، إذن منصّف الزاوية $\widehat{BAC}$ هو نفسه محور الضلع $[BC]$. فالنقاط A و O و O' تقع جميعها على المستقيم d محور الضلع $[BC]$. ونعلم من جهة أخرى، أنّ A' تقع على خطّ المركزين (OO') وهو نفسه المستقيم d، فالمستقيم d هو محور تناظرٍ للشكل.



- نستنتج بوجه خاصّ أنّ النقطة M منتصف $[PQ]$ تقع أيضاً على المستقيم d. أي إنّ M تقع على منصّف الزاوية $\widehat{BAC}$.

يكفي إذن أن نثبت أنّ M تقع أيضاً على منصّف الزاوية $\widehat{ACB}$ لتكون M مركز الدائرة المماسّة لأضلاع المثلّث ABC داخلاً.

- لمّا كانت O' تنتمي إلى $[AA']$ استنتجنا أنّ $[AA']$ هو قطرٌ في الدائرة $\mathfrak{C}'$، فالزاوية $\widehat{PCA'}$ قائمة. ومن جهة أخرى، الزاوية $\widehat{PMA'}$ قائمة أيضاً. فالرباعي $CPMA'$ رباعي دائري، مما يبرهن على أنّ

$$\widehat{PCM} = \widehat{PA'M} \qquad (1)$$

في الدائرة $\mathfrak{C}$، الزاوية المحيطيّة $\widehat{PA'M}$ تساوي نصف الزاوية المركزيّة $\widehat{POM}$ التي تقابل القوس نفسها. إذن

$$\widehat{PA'M} = \tfrac{1}{2}\widehat{POM} \qquad (2)$$

ولمّا كان (AP) مماساً للدائرة $\mathfrak{C}$ استنتجنا أنّ $\widehat{OPA} = \frac{\pi}{2}$، ومن ثَمّ إذا تأمّلنا المثلّث OPA وجدنا أنّ

$$\widehat{POM} = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\widehat{BAC} = \tfrac{1}{2}\left(\pi - \widehat{BAC}\right) = \widehat{ACB} \qquad (3)$$

وهكذا نكون قد أثبتنا في (1) و (2) و (3) أنّ

$$\widehat{ACM} = \tfrac{1}{2}\widehat{ACB}$$

مما يبرهن على أنّ (CM) هو منصّف $\widehat{ACB}$. وأنّ M هي مركز الدائرة المماسّة لأضلاع المثلّث ABC داخلاً. ■

⑤ **نتأمّل تابعاً متبايناً** $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$. **أثبت أنّ**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

لنعرّف في حالة $n \geq 1$ العدد A_n بالصيغة $A_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k)$ ، ولنصطلح أنّ $A_0 = 0$.

- نتيقّن مباشر أنّه مهما تكن n من $\mathbb{N}$ يكن $A_n \geq \frac{n(n+1)}{2}$. لأنّ مجموع n من الأعداد الطبيعيّة الموجبة المختلفة أكبر أو يساوي مجموع الأعداد $\{1,2,\ldots,n\}$.
- ومن جهة أخرى، في حالة n من $\mathbb{N}^*$ ، لدينا

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}(A_k - A_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{k-1}}{k^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{(k+1)^2}\end{aligned}$$

وأخيراً

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k^2} = \frac{A_n}{n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{(k+1)^2 k^2} A_k$$

وإذا طبّقنا هذه النتيجة على الحالة الخاصّة الموافقة للتابع $\theta : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*, \theta(n) = n$ ، يكون لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \theta(k) = \frac{n(n+1)}{2}$$

ومن ثَمّ

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n^2} B_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} B_k$$

وهكذا نستنتج أنّ

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n^2}(A_n - B_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{(k+1)^2 k^2}(A_k - B_k)$$

وهذا يبرهن المتراجحة المطلوبة، لأنّ $\forall m \geq 1,\ A_m \geq B_m$. وتحدث المساواة فقط في حالة $\forall m \geq 1,\ A_m = B_m$ ، أي إذا وفقط إذا كان $\forall m \geq 1,\ \varphi(m) = m$. ■

⑥ **ينتمي أعضاء منظّمة عالميّة إلى ست دول مختلفة، وتحتوي قائمة أعضاء المنظّمة على 1978 اسماً. نفترض أنّ الأعضاء يحملون أرقام عضويّة من 1 حتى 1978. أثبت أنّه يوجد عضو واحدٌ على الأقل يكون رقمه مساوياً مجموع رقمي عضوين من بلده، أو مساوياً ضعفي رقم أحد الأعضاء من بلده.**

لنفترض أنّ النتيجة خطأ، ولنَصُغ ذلك بالقول إنّ أيّ عضوٍ رقم عضويّته يساوي الفرق بين رقمي عضويّة عضوين من رعايا الدولة نفسها لا يكون من رعايا هذه الدولة. ولنرمز بالرمز $\mathcal{H}$ إلى هذا الافتراض.

❶ لمّا كان $1978 = 329 \times 6 + 4$ استنتجنا أنّه لا بُدّ من وجود دولة ولتكن P_1 ، يكون عدد أعضاء المنظّمة الذين ينتمون إليها 330 عضواً على الأقل. نرمز إلى هؤلاء بالرمز B_1 ، وإلى مجموعة أرقام عضويّتهم بالرمز M_1 ، ونضع $a_1 = \min M_1$.

لنتأمّل إذن C_1 مجموعة الأعضاء الذين أرقام عضويتهم هي المجموعة

$$N_1 = \{a - a_1 : a \in M_1 \backslash \{a_1\}\}$$

التي عدد عناصرها أكبر أو يساوي 329 عنصراً. نستنتج استناداً إلى $\mathcal{H}$ ما يلي :

1. لا ينتمي أيٌّ من عناصر C_1 إلى رعايا P_1 .
2. لا ينتمي أيُّ عضوٍ رقم عضويّته هو الفرق بين رقمَي عضويّة اثنين من C_1 إلى رعايا P_1 .

❷ ولمّا كان $329 = 5 \times 65 + 4$ استنتجنا من ❶ .1 أنّه لا بُدّ من وجود دولة ثانية، ولتكن P_2 ، يكون عدد الأعضاء من C_1 الذين ينتمون إليها أكبر أو يساوي 66 عضواً. نرمز إلى هؤلاء بالرمز B_2 ، (أي $B_2 = C_1 \cap P_2$ ،) وإلى مجموعة أرقام عضويّتهم، بالرمز M_2 ونضع $a_2 = \min M_2$.

ثُمّ نتأمّل C_2 مجموعة الأعضاء الذين مجموعة أرقام عضويتهم هي المجموعة

$$N_2 = \{a - a_2 : a \in M_2 \backslash \{a_2\}\}$$

التي عدد عناصرها أكبر أو يساوي 65 عنصراً. استناداً إلى $\mathcal{H}$ وإلى ❶ .2 نستنتج ما يلي :

1. لا ينتمي أيٌّ من عناصر C_2 إلى $P_1 \cup P_2$.
2. لا ينتمي أيُّ عضوٍ رقم عضويّته هو الفرق بين رقمَي عضويّة اثنين من C_2 إلى $P_1 \cup P_2$.

إذْ إنّ رقم أي عنصرٍ من C_2 يساوي الفرق بين رقمَي عنصرين من رعايا P_2 فهو لا ينتمي إلى P_2 ، كما إنّ $B_2 \subset C_1$ والفرق بين رقمَي عنصرين من C_1 لا ينتمي إلى P_1 .

❸ ولمّا كان $1 + 16 \times 4 = 65$ استنتجنا من ❷ 1. أنّه لا بُدّ من وجود دولة ثالثة، نرمز إلى رعاياها P_3، يكون عدد الأعضاء من C_2 الذين ينتمون إليها أكبر أو يساوي 17 عضواً. نرمز إلى هؤلاء بالرمز B_3، (أي $B_3 = C_2 \cap P_3$)، وإلى مجموعة أرقام عضويّتهم، بالرمز M_3 ونضع $a_3 = \min M_3$.

ثُمّ نتأمّل C_3 مجموعة الأعضاء الذين مجموعة أرقام عضويتهم هي المجموعة

$$N_3 = \{a - a_3 : a \in M_3 \backslash \{a_3\}\}$$

التي عدد عناصرها أكبر أو يساوي 16 عنصراً.

واستناداً إلى $\mathcal{H}$ وإلى ❷ 2. نستنتج ما يلي :

1. لا ينتمي أيٌّ من عناصر C_3 إلى $P_1 \cup P_2 \cup P_3$.
2. لا ينتمي أيُّ عضوٍ رقم عضويّته هو الفرق بين رقمَي عضويّة اثنين من C_3 إلى المجموعة $P_1 \cup P_2 \cup P_3$.

إذْ إنّ رقم أي عنصرٍ من C_3 يساوي الفرق بين رقمَي عنصرين من رعايا P_3 فهو لا ينتمي إلى P_3، كما إنّ $B_3 \subset C_2$ والفرق بين رقمَي عنصرين من C_2 لا ينتمي إلى $P_1 \cup P_2$.

❹ ولمّا كان $1 + 5 \times 3 = 16$ استنتجنا من ❸ 1. أنّه لا بُدّ من وجود دولة رابعة، نرمز إلى رعاياها P_4، يكون عدد الأعضاء من C_3 الذين ينتمون إليها أكبر أو يساوي 6 أعضاء. نرمز إلى هؤلاء بالرمز B_4، (أي $B_4 = C_3 \cap P_4$)، وإلى مجموعة أرقام عضويّتهم، بالرمز M_4 ونضع $a_4 = \min M_4$.

ثُمّ نتأمّل C_4 مجموعة الأعضاء الذين مجموعة أرقام عضويتهم هي المجموعة

$$N_4 = \{a - a_4 : a \in M_4 \backslash \{a_4\}\}$$

التي عدد عناصرها أكبر أو يساوي 5 عناصر.

نستنتج استناداً إلى $\mathcal{H}$ وإلى ❸ 2. ما يلي :

1. لا ينتمي أيٌّ من عناصر C_4 إلى $P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$.
2. لا ينتمي أيُّ عضوٍ رقم عضويّته هو الفرق بين رقمَي عضويّة اثنين من C_4 إلى المجموعة $P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$.

إذْ إنّ رقم أي عنصرٍ من C_4 يساوي الفرق بين رقمَي عنصرين من رعايا P_4 فهو لا ينتمي إلى P_4، كما إنّ $B_4 \subset C_3$ والفرق بين رقمَي عنصرين من C_3 لا ينتمي إلى $P_1 \cup P_2 \cup P_3$.

❺ولمّا كان $1 + 2 \times 2 = 5$ استنتجنا من ❹ .1 أنّه لا بُدّ من وجود دولة خامسة، نرمز إلى رعاياها P_5 ، يكون عدد الأعضاء من C_4 الذين ينتمون إليها أكبر أو يساوي 3 أعضاء. نرمز إلى هؤلاء بالرمز B_5 ، (أي $B_5 = C_4 \cap P_5$ ،) وإلى مجموعة أرقام عضويّتهم، بالرمز M_5 ونضع $a_5 = \min M_5$.

ثُمّ نتأمّل C_5 مجموعة الأعضاء الذين مجموعة أرقام عضويتهم هي المجموعة

$$N_5 = \{a - a_5 : a \in M_5 \backslash \{a_5\}\}$$

التي عدد عناصرها أكبر أو يساوي اثنين.

نستنتج استناداً إلى $\mathcal{H}$ وإلى ❹ .2 ما يلي :

1. لا ينتمي أيٌّ من عناصر C_5 إلى $P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \bigcup P_5$.
2. لا ينتمي أيُّ عضوٍ رقم عضويّته هو الفرق بين رقمَي عضويّة اثنين من C_5 إلى المجموعة $P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \bigcup P_5$.

إذْ إنّ رقم أي عنصرٍ من C_5 يساوي الفرق بين رقمَي عنصرين من رعايا P_5 فهو لا ينتمي إلى P_5 ، كما إنّ $B_5 \subset C_4$ والفرق بين رقمَي عنصرين من C_4 لا ينتمي إلى الاجتماع $P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$.

- نستنتج من ❺ .1 ومن كون $\text{card}(C_5) \geq 2$ أنّه يوجد في C_5 عضوان X و Y من رعايا الدولة السادسة P_6 .
- ونستنتج من ❺ .2 أنّ العضو الذي رقم عضويّته يساوي الفرق بين رقمَي عضوية X و Y ينتمي إلى P_6 أيضاً وهذا يتناقض مع الفرْض $\mathcal{H}$.

فالفرْض $\mathcal{H}$ خطأ، والنتيجة صحيحة. ■

أولمبياد الرياضيّات الحادي والعشرون

① ليكن p و q عددان طبيعيّان موجبان يُحقّقان

$$\frac{p}{q}=\sum_{k=1}^{1319}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

أثبت أنّ 1979 يقسم p .

لنعرّف في حالة n من $\mathbb{N}^*$، المجموع S_n بالصيغة $S_n=\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$، ولنلاحظ أنّ :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k}\\
&= \sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k}\\
&= \sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

وهكذا نكون قد أثبتنا في حالة n من $\mathbb{N}^*$ المساواة التالية :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}\underset{k\rightsquigarrow n-1-k}{=}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n-1-k}$$

ومنه نجد أيضاً أنّ

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n+k}+\frac{1}{2n-1-k}\right)=\frac{3n-1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n+k)(2n-1-k)}$$

وبوجه خاصّ نجد في حالة $n=2m$ أنّ

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{(2m+k)(4m-1-k)}\underset{k\rightsquigarrow 2m-1-k}{=}\sum_{k=m}^{2m-1}\frac{1}{(2m+k)(4m-1-k)}$$

ومن ثَمّ

$$S_{2m}=(6m-1)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{(2m+k)(4m-1-k)}\qquad(1)$$

فإذا عرّفنا

$$Q_m = (2m)(2m+1)\cdots(4m-1) = \frac{(4m-1)!}{(2m-1)!}$$

كان

$$P_m = Q_m \times \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(2m+k)(4m-1-k)} \in \mathbb{N}^*$$

واستنتجنا من (1) أنّ

$$(6m-1)P_m = Q_m S_{2m} \qquad (2)$$

- لنفترض الآن أنّ $S_{2m} = \frac{p}{q}$ وأنّ العدد $\ell = 6m-1$ عددٌ أوّلي. عندئذ نستنتج من (2) أنّ ℓ يقسم pQ_m، والعدد ℓ أوّلي مع Q_m أي $\gcd(\ell, Q_m) = 1$، (لأنّه أكبر من جميع الأعداد $(2m+k)_{0\le k<2m}$ فهو أوّلي مع كلٍّ منها، وهو من ثَمّ، أوّلي مع جداء ضربها أي Q_m). واستناداً إلى توطئة Gauss، نستنتج من $\ell \mid pQ_m$ و $\gcd(\ell, Q_m) = 1$ أنّ ℓ يقسم p.

النتيجة : لقد أثبتنا أنّه في حالة عددٍ **أوّلي** ℓ من الصيغة $6m-1$ فإنّ العدد ℓ يقسم بسط أيِّ كسر عاديّ يساوي المجموع $\sum_{k=1}^{4m-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

المسألة المطروحة توافق قيمة $m = 330$، إذن يكفي لتتحقّق الخاصّة المرجوّة أن نتيقّن أنّ العدد $6m-1 = 1979$ عددٌ أوّلي، وهذا تحقّق بسيط نتركه للقارئ الذي يثبت مباشرة أنّ أي عدد أوّلي أصغر أو يساوي 43 لا يقسم 1979. ◼

② نتأمّل موشوراً قائماً، قاعدتاه العليا والسفلى بالترتيب هما المخمّسان $A_0A_1A_2A_3A_4$ و $B_0B_1B_2B_3B_4$. نلوّن أضلاع القاعدتين إضافةً إلى جميع القطع المستقيمة $[A_iB_j]$ مع i و j من المجموعة $\{0,1,\ldots,4\}$، بأحد اللونين الأحمر أو الأزرق، وذلك شرط ألاّ يتكوّن لدينا مثلّثٌ تحمل أضلاعه اللون نفسه.

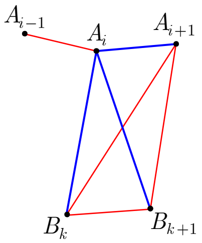
أثبت أنّ الأضلاع العشرة للقاعدتين تحمل اللون نفسه.

في حالة رأسين X و Y من الموشور نرمز $c(XY)$ إلى لون القطعة $[XY]$ إذا كانت ملوّنة وهو يأخذ إحدى القيمتين $\mathcal{R}$ للّون الأحمر، أو $\mathcal{B}$ للّون الأزرق، وإذا كان $\mathcal{C}$ أحد هذين اللّونين رمزنا $\overline{\mathcal{C}}$ إلى اللّون الآخر. وفي حالة i من $\mathbb{Z}$، نكتب كالعادة A_i و B_i دلالة على $A_{i \bmod 5}$ و $B_{i \bmod 5}$ بالترتيب.

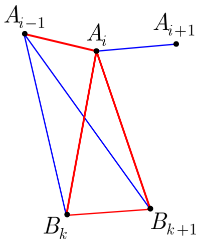
❶ لنثبت أوّلاً أنّ لأضلاع القاعدة $A_0A_1A_2A_3A_4$ اللّون نفسه.

لنفترض جدلاً أنّ ذلك غير صحيح، عندئذ يوجد ضلعان متتاليان لوناهما مختلفان، لنفترض إذن أنّ $c(A_iA_{i+1}) = \mathcal{C}$ و $c(A_{i-1}A_i) = \overline{\mathcal{C}}$.

- تحمل ثلاثٌ من القطع الخمس $([A_iB_j])_{0\le j\le 4}$ اللّون نفسه، ومن ثَمّ توجد نقطتان متتاليتان B_k و B_{k+1} تُحقِّق $c(A_iB_k) = c(A_iB_{k+1})$.



- فإمّا أن يكون $c(A_iB_k) = c(A_iB_{k+1}) = \mathcal{C}$.
وعندئذ نستنتج من المثلّثات الثلاثة $A_iB_{k+1}A_{i+1}$ و $A_iB_kB_{k+1}$ و $A_iB_kA_{i+1}$، التي في كلٍّ منها ضلعان يحملان اللون $\mathcal{C}$ أن الضلع الثالثة تحمل اللون $\overline{\mathcal{C}}$، أي إنّ لأضلاع المثلّث $A_{i+1}B_kB_{k+1}$ اللّون $\overline{\mathcal{C}}$ نفسه وهذا يتناقض مع الفرْض.



- أو أن يكون : $c(A_iB_k) = c(A_iB_{k+1}) = \overline{\mathcal{C}}$.
وعندئذ نستنتج من المثلّثات الثلاثة $A_iB_{k+1}A_{i-1}$ و $A_iB_kB_{k+1}$ و $A_iB_kA_{i-1}$، التي في كلٍّ منها ضلعان يحملان اللون $\overline{\mathcal{C}}$ أن الضلع الثالثة تحمل اللّون $\mathcal{C}$، أي إنّ لأضلاع المثلّث $A_{i-1}B_kB_{k+1}$ اللّون $\mathcal{C}$ نفسه وهذا أيضاً يتناقض مع الفرْض.

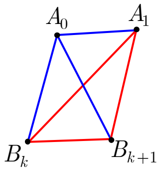
يُثبت التناقض الذي وصلنا إليه أنّ لأضلاع القاعدة $A_0A_1A_2A_3A_4$ اللّون نفسه.

❷ نستنتج بالأسلوب نفسه أنّ لأضلاع القاعدة الثانية $B_0B_1B_2B_3B_4$ اللّون نفسه.

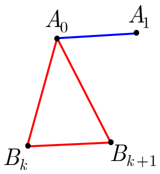
❸ لنثبت أنّ لأضلاع القاعدتين اللّون نفسه.

لنفترض جدلاً أنّ ذلك غير صحيح، عندئذ نرمز بالرمز $\mathcal{C}$ إلى لون أضلاع القاعدة العليا $A_0A_1A_2A_3A_4$ فيكون $\overline{\mathcal{C}}$ لونَ أضلاع القاعدة السفلى $B_0B_1B_2B_3B_4$.

- تحمل ثلاثٌ من القطع الخمس $([A_0B_j])_{0\le j\le 4}$ اللّون نفسه، ومن ثَمّ توجد نقطتان متتاليتان B_k و B_{k+1} تُحقِّق $c(A_0B_k) = c(A_0B_{k+1})$.



- لا يمكن أن يكون $c(A_0B_k) = c(A_0B_{k+1}) = \mathcal{C}$ ، فلقد رأينا عند دراسة النقطة ❶ أنّ هذا يقتضي أن يكون لأضلاع المثلّث $A_1B_kB_{k+1}$ اللّون $\overline{\mathcal{C}}$ نفسه وهذا خُلفٌ.



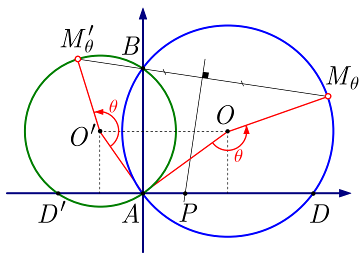
- كما لا يمكن أن يكون $c(A_0B_k) = c(A_0B_{k+1}) = \overline{\mathcal{C}}$ ، إذْ في هذه الحالة يكون لأضلاع المثلّث $A_0B_kB_{k+1}$ اللّون $\overline{\mathcal{C}}$ نفسه وهذا خُلفٌ أيضاً.

وهذا التناقض يبرهن أنّ لأضلاع القاعدتين اللّون نفسه، وهي النتيجة المرجوّة.

③ لتكن A إحدى نقطتي تقاطع دائرتين في المستوي. تتحرّك على كلٍّ واحدة من هاتين الدائرتين نقطة بحركة منتظمة، ونفترض أنّ هاتين النقطتين تمرّان في لحظة البدء بالنقطة A وتتحرّكان بالجهة نفسها. تعود النقطتان بعد دورة واحدة إلى A في اللحظة نفسها. أثبت وجود نقطة P ثابتة في المستوي تكون دوماً متساوية البُعد عن النقطتين أثناء حركتهما.

لنرمز $\mathfrak{C}$ و $\mathfrak{C}'$ إلى الدائرتين المدروستين. لتكن B النقطة الثانية التي تتقاطع عندها الدائرتان. ولنفترض أنّ المستقيم المار بالنقطة A عموديّاً على (AB) يقطع الدائرة $\mathfrak{C}$ في D ، ويقطع الدائرة $\mathfrak{C}'$ في D' .

يمكن أن ننسب المستوي إلى جملة متعامدة نظاميّة يكون مبدؤها النقطة A ، ومحور فواصلها محمول على المستقيم (DD') ومحور تراتيبها محمول على (AB) ، ونطابق بين المستوي ومجموعة الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$. عندئذ توجد أعداد حقيقيّة β و δ و δ' ، (مع $\delta \neq \delta'$)، على نحوٍ تمثّل فيه الأعداد 0 و $2\,\mathrm{i}\,\beta$ و 2δ و $2\delta'$ النقاط A و B و D و D' بالترتيب. فيمثّل $\delta + \mathrm{i}\,\beta$ النقطة O مركز $\mathfrak{C}$ ، ويمثّل $\delta' + \mathrm{i}\,\beta$ النقطة O' مركز $\mathfrak{C}'$.



استناداً إلى الفرْض تتحرّك النقطتان بسرعة زاويّة ثابتة يمكن أن نفترض أنها تساوي 1 $(\mathrm{rad/s})$.
في هذه الحالة تتعيّن النقطتان M_θ و M'_θ في اللحظة θ من $[0,2\pi]$ بالعلاقتين

$$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM_\theta}}) = \theta \quad \text{و} \quad (\widehat{\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'M'_\theta}}) = \theta$$

ومن ثَمّ يُحسب العددان العقديّان $\xi(\theta)$ و $\zeta(\theta)$ اللذين يمثلان النقطتين M_θ و M'_θ كما يلي

$$\xi(\theta) - (\delta + \mathrm{i}\beta) = (0 - (\delta + \mathrm{i}\beta))e^{\mathrm{i}\theta}$$

$$\zeta(\theta) - (\delta' + \mathrm{i}\beta) = (0 - (\delta' + \mathrm{i}\beta))e^{\mathrm{i}\theta}$$

وعليه

$$\xi(\theta) = (\delta + \mathrm{i}\beta)\left(1 - e^{\mathrm{i}\theta}\right) = -2\mathrm{i}(\delta + \mathrm{i}\beta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\mathrm{i}\theta/2}$$

$$\zeta(\theta) = (\delta' + \mathrm{i}\beta)\left(1 - e^{\mathrm{i}\theta}\right) = -2\mathrm{i}(\delta' + \mathrm{i}\beta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\mathrm{i}\theta/2}$$

وأخيراً

$$\xi(\theta) = 2(\beta - \mathrm{i}\delta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\mathrm{i}\theta/2}$$

$$\zeta(\theta) = 2(\beta - \mathrm{i}\delta')\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\mathrm{i}\theta/2}$$

تبعد نقطة P يمثّلها العدد z البعد نفسه عن النقطتين M_θ و M'_θ إذا وفقط إذا كان $|z - \zeta(\theta)|^2 = |z - \xi(\theta)|^2$ وهذا يُكافئ

$$2\,\mathrm{Re}(\bar{z}(\zeta(\theta) - \xi(\theta))) = |\zeta(\theta)|^2 - |\xi(\theta)|^2$$

أو

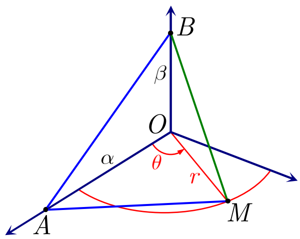
$$(\delta' - \delta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{Im}\left(\bar{z}e^{\mathrm{i}\theta/2}\right) = \left(\delta'^2 - \delta^2\right)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

وأخيراً

$$\mathrm{Im}\left((z - \delta - \delta')e^{-\mathrm{i}\theta/2}\right) = 0$$

وهنا نلاحظ أنّ z تُحقّق المساواة السابقة مهما تكن θ إذا وفقط إذا كان $z = \delta + \delta'$، ولكنّ العدد العقدي $\delta + \delta'$ يمثّل منتصف القطعة $[DD']$، فنكون بذلك قد أثبتنا أنّ P، منتصف القطعة $[DD']$، هي نقطة تبقى متساوية البعد عن النقطتين M_θ و M'_θ عندما يتحوّل الوسيط θ. وبذا يتمّ الإثبات. ◼

④ **نتأمّل مستوياً $\mathcal{P}$ ونقطة A منه، كما نتأمّل نقطة B خارجه. أوجد مجموعة النقاط M من $\mathcal{P}$ التي تجعل النسبة $\varphi(M)=\dfrac{AB+AM}{BM}$ أعظميّة.**



لتكن O المسقط القائم للنقطة B على $\mathcal{P}$. ننسب الفراغ إلى جملة متعامدة نظاميّة مبدؤها O، وتكون فيها إحداثيّات النقطة A هي $(\alpha,0,0)$ مع $\alpha\geq 0$، وإحداثيّات النقطة B هي $(0,0,\beta)$ مع $\beta>0$. وأخيراً لنضع

$$a=AB=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

لنتأمّل نقطة M من المستوي $\mathcal{P}$، ولنفترض أنّ إحداثياتها $(r\cos\theta,r\sin\theta,0)$. عندئذ تؤول المسألة إلى تعيين قيم r و θ التي تجعل التابع φ التالي يبلغ حدّه الأعلى.

$$\varphi:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \varphi(r,\theta)=\frac{a+\sqrt{(r\cos\theta-\alpha)^2+r^2\sin^2\theta}}{\sqrt{r^2+\beta^2}}$$

- نلاحظ مباشرة أنّ

$$\varphi(r,\theta)=\frac{a+\sqrt{r^2+\alpha^2-2r\alpha\cos\theta}}{\sqrt{r^2+\beta^2}}$$

ومن ثَمّ

$$\varphi(r,\theta)\leq\varphi(r,\pi)=\frac{a+\sqrt{r^2+\alpha^2+2r\alpha}}{\sqrt{r^2+\beta^2}}=\frac{a+\alpha+r}{\sqrt{r^2+\beta^2}}\qquad(1)$$

مع مساواة إذا وفقط إذا كان

$$(\alpha\neq 0,\theta=\pi)\quad \text{أو}\quad (\alpha=0)$$

- لنتأمّل الآن التابع

$$h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},h(x)=\frac{a+\alpha+x}{\sqrt{x^2+\beta^2}}$$

نلاحظ أنّ

$$h'(x)=\frac{x^2+\beta^2-(a+\alpha+x)x}{\left(\sqrt{x^2+\beta^2}\right)^3}=\frac{\beta^2-(a+\alpha)x}{\left(\sqrt{x^2+\beta^2}\right)^3}$$

ومنه جدول التغيرات التالي للتابع h

x	$0 \qquad a-\alpha \qquad +\infty$
$h'(x)$	$+ \qquad 0 \qquad -$
$h(x)$	$\nearrow \quad \sqrt{\frac{2a}{a-\alpha}} \quad \searrow$

وقد لاحظنا أنّ $\beta^2 = (a+\alpha)(a-\alpha)$. هذا يبرهن أنّ

$$\varphi(r,\pi) \le \varphi(a-\alpha,\pi) \qquad (2)$$

مع مساواة إذا وفقط إذا كان $r = a - \alpha$.

- ومن (1) و (2) نستنتج أنّ

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad \varphi(r,\theta) \le \sqrt{\frac{2a}{a-\alpha}}$$

مع مساواة إذا وفقط إذا كان

- $r = a$ في حالة $\alpha = 0$.
- أو كان $(r,\theta) = (a-\alpha,\pi)$ في حالة $\alpha \ne 0$.

النتيجة :

- إذا كانت A هي المسقط القائم للنقطة B على المستوي $\mathcal{P}$، (أي $\alpha = 0$) كانت مجموعة النقاط M من $\mathcal{P}$ التي تُحقّق $\varphi(M) = \max\varphi$ هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها يساوي AB .
- وإذا لم تنطبق A على المسقط القائم O للنقطة B على المستوي $\mathcal{P}$، (أي $\alpha \ne 0$) كانت مجموعة النقاط M من $\mathcal{P}$ التي تُحقّق $\varphi(M) = \max\varphi$ مؤلّفة من نقطة وحيدة M_0 . النقطة M_0 تقع على المستقيم (OA) والنقطة O تقع بين M_0 و A، كما إنّ

$$AM_0 = AO + OM_0 = \alpha + r = a = AB$$

إذن، M_0 هي النقطة من نصف المستقيم $[AO)$ التي تبعد عن A مسافة تساوي AB . ∎

⑤ **أوجد $\mathcal{A}$ مجموعة الأعداد الحقيقيّة a التي تجعل الجملة $\mathcal{S}_a$ التالية**

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & a \\ x_1 & + & 2^3x_2 & + & 3^3x_3 & + & 4^3x_4 & + & 5^3x_5 & = & a^2 \\ x_1 & + & 2^5x_2 & + & 3^5x_3 & + & 4^5x_4 & + & 5^5x_5 & = & a^3 \end{array}$$

تقبل حلولاً $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ **من** $(\mathbb{R}_+)^5$.

ليكن $\mathbb{R}_2[X]$ فضاء كثيرات الحدود من الدرجة الثانية على الأكثر. عندئذ نلاحظ مباشرة أن الجملة $\mathcal{S}_a$ تُكافئ

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad aP(a) = \sum_{k=1}^{5} kx_kP(k^2) \tag{1}$$

في الحقيقة، باختيار $P = 1$ و $P = X$ و $P = X^2$ نحصل على المعادلات الثلاث في $\mathcal{S}_a$، وبالعكس، تنتج الحالة العامّة من هذه الحالة لأنّ $(1, X, X^2)$ هي أساسٌ للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}_2[X]$.

- ليكن a عدداً من $\mathcal{A}$. عندئذ يوجد $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ من $(\mathbb{R}_+)^5$ يُحقّق (1)، وبوجه خاصّ، إذا اخترنا $P(X) = (X - a)^2$ نرى أنّ

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k\left(k^2 - a\right)^2 = 0$$

ومن ثَمّ

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,5\}, \quad x_k\left(k^2 - a\right)^2 = 0$$

فإمّا أن يكون $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0,0,0,0,0)$ ومن ثَمّ $a = 0$.

أو أن يكون $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \neq (0,0,0,0,0)$ ومن ثَمّ ينتمي a إلى المجموعة $\{1, 4, 9, 16, 25\}$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

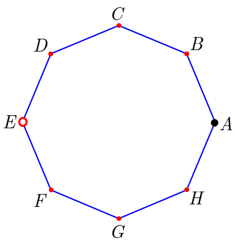
$$\mathcal{A} \subset \{0,1,4,9,16,25\}$$

- وبالعكس، في حالة $a = m^2$ مع $0 \leq m \leq 5$ يكون $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ المعرّف بالصيغة $x_k = m$ في حالة $k = m$، و $x_k = 0$ في حالة $k \neq m$، حلاً ينتمي إلى $(\mathbb{R}_+)^5$ للجملة $\mathcal{S}_a$.

إذن $\mathcal{A} = \{0,1,4,9,16,25\}$، وهي النتيجة المطلوبة. ■

⑥ **ليكن A و E رأسين متقابلين قطريّاً في مثمّن منتظم. ينطلق ضفدع من الرأس A قافزاً إلى الرؤوس المجاورة. يمكن للضفدع أن يقفز إلى أيٍّ من الرأسين المجاورين للرأس الذي يوجد فيه أيّاً كان ذلك الرأس ما عدا E، وما أن يصل إلى الرأس E حتّى يتوقّف. ليكن a_n عدد الطرق المختلفة التي يمكن للضفدع أن يتبعها ليصل إلى E في عددٍ n من القفزات. أثبت أنّ**

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= 0 \\ a_{2n} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(2+\sqrt{2}\right)^{n-1}-\left(2-\sqrt{2}\right)^{n-1}\right) \end{aligned}$$



الأسلوب الأبسط هو في إيجاد علاقة تدريجيّة تفيد في حساب الأعداد $(a_n)_{n\geq1}$.

لتحقيق ذلك نبدأ بتسمية رؤوس المثمّن $ABCDEFGH$. ثُمّ نعرّف المقدار b_n ليدلّ على عدد الطرق المختلفة التي يمكن للضفدع أن يتبعها ليصل من C إلى E في عددٍ n من القفزات. وهو يساوي، بسبب تناظر المسألة، عدد الطرق المختلفة التي يمكن للضفدع أن يتبعها ليصل من G إلى E في عددٍ n من القفزات. سنكتب $\mathcal{R}_X^{(n)}$ إلى مجموعة الطرق المختلفة من X إلى E والمكوّنة من n قفزة.

- لنفترض أنّ $n>2$. بملاحظة أنّ

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_A^{(n)} &= \left(\overset{\frown\frown}{ABC}-\mathcal{R}_C^{(n-2)}\right)\cup\left(\overset{\frown\frown}{ABA}-\mathcal{R}_A^{(n-2)}\right)\cup \\ &\quad \left(\overset{\frown\frown}{AHG}-\mathcal{R}_G^{(n-2)}\right)\cup\left(\overset{\frown\frown}{AHA}-\mathcal{R}_A^{(n-2)}\right) \end{aligned}$$

نستنتج أنّ $a_n=2a_{n-2}+2b_{n-2}$.

- وكذلك نلاحظ أنّه في حالة $n>2$ لدينا أيضاً

$$\mathcal{R}_C^{(n)}=\left(\overset{\frown\frown}{CBA}-\mathcal{R}_A^{(n-2)}\right)\cup\left(\overset{\frown\frown}{CBC}-\mathcal{R}_C^{(n-2)}\right)\cup\left(\overset{\frown\frown}{CDC}-\mathcal{R}_C^{(n-2)}\right)$$

ومن ثَمّ $b_n=a_{n-2}+2b_{n-2}$.

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\begin{aligned} \forall n>2,\quad a_n &= 2a_{n-2}+2b_{n-2} \\ b_n &= a_{n-2}+2b_{n-2} \end{aligned} \qquad (1)$$

ونلاحظ من جهة أخرى أنّ $a_1=a_2=0$ و $b_1=0$ و $b_2=1$.

فإذا عرّفنا

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ و } Z_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

استنتجنا أنّ

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \forall n > 2,\ Z_n = MZ_{n-2}$$

وعليه نرى أنّ $\forall n \geq 1,\ Z_{2n-1} = M^{n-1}Z_1 = 0$ ، وأنّ

$$\forall n \geq 1,\ Z_{2n} = M^{n-1}Z_2$$

ولكنّ كثير الحدود المميِّز للمصفوفة M هو $\mathcal{X}_M(X) = X^2 - 4X + 2$ وله جذران هما $2-\sqrt{2}$ و $2+\sqrt{2}$. ومنه نستنتج أنّ باقي قسمة X^{n-1} على $\mathcal{X}_M(X)$ يُعطى بالصيغة

$$\frac{(2-\sqrt{2})^{n-1}}{2\sqrt{2}}(2+\sqrt{2}-X) + \frac{(2+\sqrt{2})^{n-1}}{2\sqrt{2}}(X-2+\sqrt{2})$$

ومنه

$$M^{n-1} = \frac{(2-\sqrt{2})^{n-1}}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -2 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} + \frac{(2+\sqrt{2})^{n-1}}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

إذن

$$Z_{2n} = \frac{(2-\sqrt{2})^{n-1}}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} + \frac{(2+\sqrt{2})^{n-1}}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

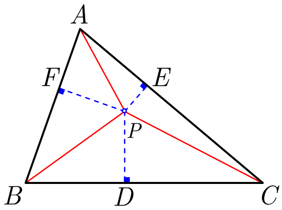
وبوجه خاص

$$a_{2n} = \frac{(2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

أولمبياد الرياضيّات الثاني والعشرون

① **ليكن المثلّث ABC . في حالة نقطة P من المثلّث ABC ، نتأمّل النقاط D و E و F مواقع الأعمدة النازلة من P على المستقيمات (BC) و (CA) و (AB) بالترتيب. أوجد مجموعة النقاط P التي تجعل المقدار $\varphi(P) = \frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$ أصغريّاً.**



لنرمز بالرمز $\mathcal{A}$ إلى مساحة المثلّث ABC ، نلاحظ أنّ $\mathcal{A}$ تساوي مجموع مساحات المثلّثات PBC و PCA و PAB ، أي

$$2\mathcal{A} = BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF$$

فإذا عرّفنا

$$x_1 = \sqrt{\frac{BC}{PD}} \quad و \quad x_2 = \sqrt{\frac{CA}{PE}} \quad و \quad x_3 = \sqrt{\frac{AB}{PF}}$$

وكذلك

$$y_1 = \sqrt{BC \cdot PD} \quad و \quad y_2 = \sqrt{CA \cdot PE} \quad و \quad y_3 = \sqrt{AB \cdot PF}$$

أخذت متراجحة كوشي شوارتز التي تنصّ على أنّ

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right)$$

الشكل التالي

$$(AB + BC + CA)^2 \leq \varphi(P)(2\mathcal{A})$$

وعليه يكون

$$\varphi(P) \geq \frac{(AB + BC + CA)^2}{2\mathcal{A}}$$

وتحدث المساواة في متراجحة كوشي شوارتز المشار إليها إذا وفقط إذا كان

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3}$$

أي إذا وفقط إذا كان $PD = PE = PF$. وهذا يُكافئ كون P مركز الدائرة المماسّة لأضلاع المثلّث ABC داخلاً. ■

② **في حالة عددين طبيعيّين n و r، يُحقّقان $1 \leq r \leq n$، نتأمّل جميع المجموعات الجزئيّة من $\mathbb{N}_n = \{1,2,\ldots,n\}$ المكوّنة من r عنصراً، ونقرن بكلٍّ منها أصغر عناصرها. ثُمّ نعرّف العدد $F(n,r)$ بأنّه المتوسّط الحسابي لهذه العناصر الأصغريّة. أثبت أنّ**

$$F(n,r) = \frac{n+1}{r+1}$$

لنعرّف $P_n^{(r)} = \{B \subset \mathbb{N}_n : \operatorname{card}(B) = r\}$. عندئذ نعلم أنّ عدد عناصر $P_n^{(r)}$ يساوي $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. ومن ثَمّ

$$F(n,r) = \frac{1}{C_n^r} \sum_{B \in P_n^{(r)}} \min(B)$$

يأخذ المقدار $\min(B)$ في حالة $B \in P_n^{(r)}$ قيمه في المجموعة $\mathbb{N}_{n-r+1}$، وفي حالة p من $\mathbb{N}_{n-r+1}$ تتألّف المجموعة $\{B \in P_n^{(r)} : \min(B) = p\}$ من المجموعات الجزئيّة من $\{p+1,\ldots,n\}$ التي عدد عناصر كلٍّ منها $r-1$ مُضافاً إلى كلٍّ منها العنصر p. إذن

$$\operatorname{card}(\{B \in P_n^{(r)} : \min(B) = p\}) = C_{n-p}^{r-1}$$

وعليه فإنّ

$$\sum_{B \in P_n^{(r)}} \min(B) = \sum_{p=1}^{n-r+1} p\, C_{n-p}^{r-1}$$

علينا إذن حساب هذا المجموع، وهنا نستفيد مرّتين من كون $C_b^a = C_{b+1}^{a+1} - C_b^{a+1}$ فنكتب

$$\begin{aligned}
\sum_{B \in P_n^{(r)}} \min(B) &= \sum_{p=1}^{n-r+1} p\left(C_{n-p+1}^r - C_{n-p}^r\right) \\
&= \sum_{p=1}^{n-r+1} p\, C_{n-p+1}^r - \sum_{p=1}^{n-r} p\, C_{n-p}^r \\
&= \sum_{p=0}^{n-r} (p+1) C_{n-p}^r - \sum_{p=0}^{n-r} p\, C_{n-p}^r \\
&= \sum_{p=0}^{n-r} C_{n-p}^r = \sum_{p=0}^{n-r}\left(C_{n-p+1}^{r+1} - C_{n-p}^{r+1}\right) = C_{n+1}^{r+1}
\end{aligned}$$

وعليه فإن

$$F(n,r) = C_{n+1}^{r+1}/C_n^r = \frac{n+1}{r+1}$$

③ **أوجد القيمة العظمى للمقدار m^2+n^2 عندما يتحوّل العددان m و n في مجموعة الأعداد الطبيعيّة $\mathbb{N}_{1981}=\{1,2,\ldots,1981\}$ ويُحقّقان $\left(n^2-nm-m^2\right)^2=1$.**

لنتأمّل المجموعة

$$\mathcal{A}=\left\{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*:\left(n^2-nm-m^2\right)^2=1\right\}$$

بالبحث عن عناصر $\mathcal{A}$ التي هي من الصيغة $(n,1)$ نجد فقط العنصرين $(1,1)$ و $(2,1)$، أمّا من الصيغة $(n,2)$ فهناك العنصر الوحيد $(3,2)$، وهكذا نجد في $\mathcal{A}$ العناصر التالية

$$\{(1,1),(1,2),(2,3),(3,5),(5,8),\ldots\}$$

وهذا ما يوحي لنا بوجود صِلة بين المجموعة $\mathcal{A}$ وبين متتالية أعداد Fibonacci : $(F_n)_{n\geq 1}$ التي تُعرّف تدريجيّاً كما يلي :

$$F_0=0, F_1=1,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

في الحقيقة، إذا عرّفنا

$$\delta_n=F_{n+1}^2-F_{n+1}F_n-F_n^2$$

لاحظنا أنّ

$$\begin{aligned}\delta_{n+1}&=F_{n+2}(F_{n+2}-F_{n+1})-F_{n+1}^2\\&=(F_{n+1}+F_n)F_n-F_{n+1}^2\\&=-\left(F_{n+1}^2-F_{n+1}F_n-F_n^2\right)=-\delta_n\end{aligned}$$

ومن ثَمّ، لأنّ $\delta_0=1$، نستنتج مما سبق أنّ $\delta_n=(-1)^n$. وهذا يبرهن أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad (F_{n+1},F_n)\in\mathcal{A}$$

سنبرهن فيما يلي على صحّة المساواة :

$$\mathcal{A}=\{(F_{n+1},F_n):n\in\mathbb{N}^*\}$$

ولتحقيق ذلك نسجّل بعض الملاحظات البسيطة.

- في حالة (n,m) من $\mathcal{A}$ لدينا $n\geq m$. لأنّ

$$\begin{aligned}\left(n^2-nm-m^2\right)^2=1&\Rightarrow n^2-nm-m^2\geq -1\\&\Rightarrow n(n-m)\geq m^2-1\geq 0\\&\Rightarrow n-m\geq 0\end{aligned}$$

- لتكن (n,m) من $\mathcal{A}$. إذا كان $n > m$ كان $n - m \leq m$.

في الحقيقة، إذا افترضنا على سبيل الجدل أنّ $n - m > m$ استنتجنا

$$\begin{aligned} n^2 - nm - m^2 &= n(\underline{n-m}) - m^2 \\ &> nm - m^2 = m(\underline{n-m}) > m^2 \geq 1 \end{aligned}$$

وهذا الخُلفُ يُثبتُ أنّ $n - m \leq m$.

- لتكن (n,m) من $\mathcal{A}$. إذا كان $n > m$ كان $(m, n-m)$ عنصراً من $\mathcal{A}$.

في الحقيقة، لقد رأينا أنّ $1 \leq n - m \leq m$ كما إنّ

$$m^2 - m(n-m) - (n-m)^2 = -\left(n^2 - nm - m^2\right)$$

- في حالة (n,m) من $\mathcal{A}$ و $m = n$ يكون لدينا وضوحاً $n = m = 1$.

لنتأمّل إذن التطبيق

$$\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ \Phi(n,m) = \begin{cases} (m, n-m) & : \quad n > m \\ (1,1) & : \quad n = m \end{cases}$$

في حالة عنصرٍ $X = (a,b)$ من $\mathcal{A}$، نتأمّل المتتالية $\left(X_p\right)_{p\geq 0}$ من $\mathcal{A}$ المعرّفة تدريجيّاً كما يلي، نضع $X_0 = (n_0, m_0) = (a,b)$ ونعرّف الحدَّ $X_{p+1} = \left(n_{p+1}, m_{p+1}\right)$ بدلالة $X_p = \left(n_p, m_p\right)$ بالعلاقة $X_{p+1} = \Phi\left(X_p\right)$.

إذا افترضنا جدلاً أنّ $n_a > 1$ كان $n_k > m_k$ في حالة $0 \leq k \leq a$، ومن ثَّم

$$\forall k \in \{0, \ldots, a-1\}, \quad n_k - n_{k+1} = m_{k+1} \geq 1$$

وبجمع المتراجحات السابقة نستنتج أنّ $a - n_a = n_0 - n_a \geq a$ وهذا خُلفٌ. إذن لا بُدّ أن يكون $n_a = 1$ ومن ثَمّ $X_a = (1,1)$.

لنعرّف إذن العدد ℓ بالعلاقة

$$\ell = \min\{k \in \mathbb{N}, X_k = (1,1)\}$$

عندئذ يكون $X_k \neq (1,1)$ في حالة $0 \leq k \leq \ell$.

نبرهن بالتدريج على العدد r من المجموعة $\{1, \ldots, \ell, \ell+1\}$ أنّ

$$X_{\ell+1-r} = \left(F_{r+1}, F_r\right) \qquad (1)$$

- هذه النتيجة واضحة في حالة $r=1$.
- وإذا كانت صحيحة في حالة $r\leq \ell$، أي كان $X_{\ell+1-r}=(F_{r+1},F_r)$، استنتجنا أنّ

$$(m_{\ell-r},n_{\ell-r}-m_{\ell-r})=\Phi(X_{\ell-r})=(F_{r+1},F_r)$$

ومن ثَمّ

$$n_{\ell-r}-m_{\ell-r}=F_r \quad \text{و} \quad m_{\ell-r}=F_{r+1}$$

وعليه

$$n_{\ell-r}=F_r+F_{r+1}=F_{r+2}$$

إذن $X_{\ell-r}=(F_{r+2},F_{r+1})$، وهذا يُثبت الخاصة (1) في حالة $r+1$. وبوجه خاصّ، في حالة $r=\ell+1$، نجد أنّ

$$(a,b)=X_0=(F_{\ell+2},F_{\ell+1})$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $\mathcal{A}\subset\{(F_{n+1},F_n):n\in\mathbb{N}^*\}$، وأكملنا بذلك برهان صحّة المساواة

$$\mathcal{A}=\{(F_{n+1},F_n):n\in\mathbb{N}^*\}$$

تؤول المسألة المطروحة إذن إلى تعيين أكبر القيم $F_n^2+F_{n+1}^2$ تحت الشرط $F_{n+1}\leq 1981$، ولكن نحسب مباشرة قيم متتالية فيبوناتشي لنجد أنّ $F_{15}=987$ و $F_{16}=1597$ في حين أنّ $F_{17}>1981$. فالقيمة العظمى للمقدار m^2+n^2 عندما يتحوّل العددان m و n في المجموعة $\mathbb{N}_{1981}$ ويُحقّقان $(n^2-nm-m^2)^2=1$، هو 987^2+1597^2. ■

④ **نعرّف في حالة عدد طبيعي n أكبر تماماً من 2، القضيتين $\mathcal{P}_n$ و $\mathcal{Q}_n$ التاليتين :**

$\mathcal{P}_n$: « **توجد مجموعة مكوّنة من n عدداً طبيعياً موجباً من أعداد متتالية، يكون أكبر أعداد هذه المجموعة قاسماً للمضاعف المشترك الأصغر لبقيّة أعداد المجموعة.** »

$\mathcal{Q}_n$: « **توجد مجموعة وحيدة مكوّنة من n عدداً طبيعيّاً موجباً من أعداد متتالية، يكون أكبر أعداد هذه المجموعة قاسماً للمضاعف المشترك الأصغر لبقيّة أعداد المجموعة.** »

1. **عيِّن قيم n التي تُحقّق** $\mathcal{P}_n$.
2. **عيِّن قيم n التي تُحقّق** $\mathcal{Q}_n$.

❶ إنّ $\mathcal{P}_3$ خطأ. إذ لو افترضنا أنّ المجموعة تُحقّق الخاصّة المطلوبة $\{k-2, k-1, k\}$ لوجب أن يقسم كلُّ قاسم أوّلي p للعدد k أحد العددين $k-1$ و $k-2$، وهذا يقتضي أن يكون $p = 2$ مساوياً، إذن يجب أن يكون $k = 2^m$ و $m \geq 2$. ومن ثَمّ يجب أن يقسم العددُ 2 العددَ $2^{m-1} - 1$، وهذا خُلفٌ واضحٌ.

❷ إنّ $\mathcal{P}_{2k}$ صحيحة في حالة $k \geq 2$. إذ يكفي أن نتأمّل المجموعة

$$S_{2k} = \{2k - 2 + j : j \in \mathbb{N}_{2k}\}$$

إنّ $m_{2k} = \max(S_{2k}) = 2(2k-1)$، والعددان $2k-1$ و $2k$ ينتميان إلى المجموعة $S_{2k} \backslash \{m_{2k}\}$ وهما أوّليّان فيما بينهما، إذن $2k(2k-1)$ يقسم $\operatorname{lcm}(S_{2k} \backslash \{m_{2k}\})$، ومن ثَمّ $m_{2k} \mid \operatorname{lcm}(S_{2k} \backslash \{m_{2k}\})$.

❸ إنّ $\mathcal{P}_{2k+1}$ صحيحة في حالة $k \geq 2$. إذ يكفي أن نتأمّل المجموعة

$$S_{2k+1} = \{2k - 3 + j : j \in \mathbb{N}_{2k+1}\}$$

إنّ $m_{2k+1} = \max(S_{2k+1}) = 2(2k-1)$، والعددان $2k-1$ و $2k-2$ ينتميان إلى المجموعة $S_{2k+1} \backslash \{m_{2k+1}\}$ وهما أوّليّان فيما بينهما، إذن $2(k-1)(2k-1)$ يقسم $\operatorname{lcm}(S_{2k+1} \backslash \{m_{2k+1}\})$، ومن ثَمّ $m_{2k+1} \mid \operatorname{lcm}(S_{2k+1} \backslash \{m_{2k+1}\})$.

النتيجة : القضيّة $\mathcal{P}_n$ صحيحة إذا وفقط إذا كانت $n \geq 4$.

❹ إنّ $\mathcal{Q}_{2k}$ خطأ في حالة $k \geq 3$. إذ يكفي أن نتأمّل المجموعة

$$S'_{2k} = \{2k - 6 + j : j \in \mathbb{N}_{2k}\}$$

إنّ $m'_{2k} = \max(S'_{2k}) = 2(2k-3)$، والعددان $2k-3$ و $2k-4$ ينتميان إلى المجموعة $S'_{2k} \backslash \{m'_{2k}\}$ وهما أوّليّان فيما بينهما، إذن $2(k-2)(2k-1)$ يقسم العدد $\operatorname{lcm}(S'_{2k} \backslash \{m'_{2k}\})$، ومن ثَمّ $m'_{2k} \mid \operatorname{lcm}(S'_{2k} \backslash \{m'_{2k}\})$. وهكذا نستنتج أنّ $\mathcal{Q}_{2k}$ خطأ لأنّ $S'_{2k} \neq S_{2k}$.

❺ إنّ $\mathcal{Q}_{2k+1}$ خطأ في حالة $k \geq 4$. إذ يكفي أن نتأمّل المجموعة

$$S'_{2k+1} = \{2k - 7 + j : j \in \mathbb{N}_{2k+1}\}$$

إنّ $m'_{2k+1} = \max(S'_{2k+1}) = 2(2k-3)$، وكما في السابق نبرهن m'_{2k+1} يقسم $\operatorname{lcm}(S'_{2k+1} \backslash \{m'_{2k+1}\})$. ونستنتج أنّ $\mathcal{Q}_{2k+1}$ خطأ لأنّ $S'_{2k+1} \neq S_{2k+1}$.

❻ إنّ $\mathcal{Q}_5$ و $\mathcal{Q}_7$ خطأ. يكفي أن نتأمّل في حالة $n = 5$ المجموعتين

$$S_5 = \{2,3,4,5,6\} \quad \text{و} \quad S_5' = \{8,9,10,11,12\}$$

وأن نتأمّل في حالة $n = 7$ المجموعتين

$$S_7 = \{4,5,6,7,8,9,10\} \quad \text{و} \quad S_7' = \{6,7,8,9,10,11,12\}$$

❼ إنّ $\mathcal{Q}_4$ صحيحة. لنتأمّل مجموعة $\{x-3, x-2, x-1, x\}$ تُحقّق الخاصّة $\mathcal{P}_4$. عندئذ كلُّ قاسمٍ أوّلي p للعدد x يجب أن يكون قاسماً لأحد الأعداد $x-1$ أو $x-2$ أو $x-3$ وهذا يقتضي أنّ $p = 2$ أو $p = 3$.

- إذا قسم العدد 4 العدد x ، استنتجنا من كون $x-1$ و $x-3$ عددين فرديين، أنّ 4 يجب أن يقسم أيضاً $x-2$ ، ومن ثَمّ أن $4 \mid 2$ وهذا خُلفٌ.
- وكذلك إذا كان $9 \mid x$ ، استنتجنا من كون $3 \nmid (x-1)$ و $3 \nmid (x-2)$ ، أنّ 9 يجب أن يقسم $x-3$ ، ومن ثَمّ أن $9 \mid 3$ وهذا خُلفٌ.
- وأخيراً لمّا كان $x \geq 4$ استنتجنا مما سبق أنّ $x = 6$ ، والمجموعة $\{3,4,5,6\}$ هي المجموعة الوحيدة المكوّنة من أربعة أعداد طبيعيّة موجبة تماماً ومتتالية، يكون أكبرها قاساماً للمضاعف المشترك الأصغر لبقيّة عناصرها.

النتيجة : القضيّة $\mathcal{Q}_n$ صحيحة إذا وفقط إذا كان $n = 4$. ■

⑤ **نفترض أنّ ثلاث دوائر لها نصف القطر نفسه وتشترك بنقطة واحدة M ، ونفترض أنّها مرسومة داخل مثلّث ABC وكلٌّ واحدة منها تمسّ ضلعين من أضلاع المثلّث. ليكن G مركز الدائرة المارّة برؤوس المثلّث، وليكن O مركز الدائرة المماسّة داخلاً لأضلاع المثلّث. أثبت أنّ النقاط G و O و M تقع على استقامة واحدة.**

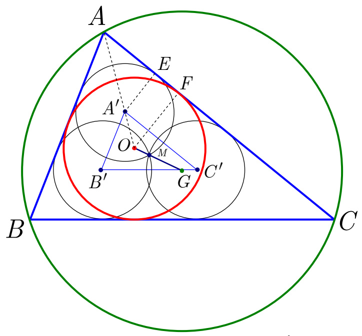
لنفترض أنّ نصف القطر المشترك للدوائر الثلاث يساوي ρ ، ولنفترض أنّ $\mathfrak{C}_A = C(A', \rho)$ هي الدائرة من الدوائر الثلاث التي تمسّ الضلعين $[AB]$ و $[AC]$ ، ولنسمِّ بأسلوب مماثلٍ الدائرتين الأخريين $\mathfrak{C}_B = C(B', \rho)$ و $\mathfrak{C}_C = C(C', \rho)$.

وأخيراً لنرمز كالعادة بالرمزين R و r إلى نصفَي قطري الدائرة $\mathfrak{C} = C(G, R)$ المارّة برؤوس المثلّث، والدائرة $\mathfrak{C}' = C(O, r)$ المماسّة داخلاً لأضلاع المثلّث بالترتيب.

النقطتان O و A' تقعان على منصّف الزاوية $\widehat{BAC}$، إذن تقع النقاط O و A' و A على استقامة واحدة. وإذا رمزنا E و F إلى نقطتي تماس الدائرتين $\mathfrak{C}_A$ و $\mathfrak{C}'$ مع الضلع $[AC]$ بالترتيب. عندئذ نستنتج من تشابه المثلّثين $AA'E$ و AOF أنّ

$$\frac{AA'}{AO} = \frac{A'E}{OF} = \frac{\rho}{r}$$

كما هو مبيّن في الشكل :



نعرّف إذن $k = \frac{OA'}{OA} = \frac{r-\rho}{r}$، ثُمّ نتأمّل التحاكي $h = \mathcal{H}_{O,k}$ الذي مركزه O ونسبته k. عندئذ نستنتج مما سبق أنّ $h(A) = A'$. ونبرهن بأسلوب مماثل أنّ $\frac{OC'}{OC} = \frac{OB'}{OB} = k$، إذن

$$h(C) = C' \quad \text{و} \quad h(B) = B' \quad \text{و} \quad h(A) = A'$$

النقطة M تبعد البُعد نفسه ρ عن النقاط A' و B' و C'، إذن M هي مركز الدائرة المارّة برؤوس المثلّث $A'B'C'$. وهذا يقتضي أنّ $h^{-1}(M)$ هو مركز الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC، فنكون قد أثبتنا أنّ $h^{-1}(M) = G$ أو $M = h(G)$. وهذا يقتضي أنّ النقاط O و M و G تقع على استقامة واحدة.

ملاحظة : ونستنتج أيضاً أنّ $kR = \rho$، فأنصاف الأقطار r و R و ρ ترتبط ببعضها بالعلاقة $rR = \rho(r+R)$. كما نستنتج من كون $\frac{OM}{OG} = k = \frac{r}{r+R}$ أنّ M تقسم $[OG]$ بالنسبة $\frac{r}{R}$. ■

⑥ **نتأمّل تابعاً** $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ **يُحقّق في حالة** (x,y) **من** $\mathbb{N}^2$ **الخواص التالية** :

- $f(0,y) = y+1$ و $f(x+1,0) = f(x,1)$.
- $f(x+1,y+1) = f(x,f(x+1,y))$.

احسب $f(4,1981)$.

❶ لنلاحظ أوّلاً أنّ

$$\forall y > 0, \quad f(1,y) = f(0, f(1,y-1)) = 1 + f(1,y-1)$$

وهذا يُثبتُ أنّ المتتالية $(f(1,y) - y)_{y\in\mathbb{N}}$ متتالية ثابتة. ولكن

$$f(1,0) - 0 = f(0,1) = 1 + 1 = 2$$

إذن

$$\forall y \in \mathbb{N}, \quad f(1,y) = y + 2$$

❷ ومن جهة ثانية،

$$\forall y > 0, \quad f(2,y) = f(1, f(2,y-1)) = 2 + f(2,y-1)$$

وهذا يُثبتُ أنّ المتتالية $(f(2,y) - 2y)_{y\in\mathbb{N}}$ متتالية ثابتة. ولكن

$$f(2,0) - 0 = f(1,1) = 1 + 2 = 3$$

إذن

$$\forall y \in \mathbb{N}, \quad f(2,y) = 2y + 3$$

❸ وبالأسلوب نفسه نجد

$$\forall y > 0, \quad f(3,y) = f(2, f(3,y-1)) = 3 + 2f(3,y-1)$$

وهذا يُثبتُ أنّ المتتالية $(2^{-y}(f(3,y) + 3))_{y\in\mathbb{N}}$ متتالية ثابتة. ولكن

$$2^0(f(3,0) + 3) = f(2,1) + 3 = 5 + 3 = 2^3$$

إذن

$$\forall y \in \mathbb{N}, \quad f(3,y) = 2^{y+3} - 3$$

❹ وأخيراً،

$$\forall y > 0, \quad f(4,y) = f(3, f(4,y-1)) = 2^{f(4,y-1)+3} - 3$$

ولدينا

$$f(4,0) + 3 = f(3,1) + 3 = 2^{1+3} = 2^4 = 2^{2^2}$$

فإذا عرّفنا المتتالية التدريجيّة $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالصيغة $a_0 = 1$ و $a_{n+1} = 2^{a_n}$. وجدنا أنّ

$$a_1 = 2 \quad \text{و} \quad a_2 = 2^2 \quad \text{و} \quad a_3 = 2^{2^2}$$

ونجد بالتدريج أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(4,n) = a_{n+3} - 3$$

وهذا يُثبتُ أنّ $f(4,1981)$ يساوي بُرجاً من قوى 2 ارتفاعه 1984 مطروحاً منه 3 .

$$f(4,n)=\overbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{2}}}}}}}^{n+3}-3$$

وهي النتيجة المرجوّة.

أولمبياد الرياضيّات الثالث والعشرون

① نتأمّل تابعاً $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$ يُحقّق الخواصّ التالية :

- مهما تكن n و m من $\mathbb{N}^*$ يكن $f(n+m)-f(n)-f(m)\in\{0,1\}$.
- $f(2)=0$ و $f(3)>0$ و $f(9999)=3333$.

يُطلب تعيين $f(1982)$.

لنتأمّل بوجه عامّ تابعاً $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$ يُحقّق فقط الخاصّة

$$(\mathcal{H})\qquad \forall(n,m)\in\mathbb{N}^2,\quad f(n+m)-f(n)-f(m)\in\{0,1\}$$

- نثبّتُ عدداً p من $\mathbb{N}^*$، ثُمّ نتأمّل المتتالية $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالصيغة

$$\forall n\geq 0,\quad A_n=2^{-n}f(2^np)$$

استناداً إلى $(\mathcal{H})$ لدينا

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leq f\left(2^{n+1}p\right)-2f(2^np)\leq 1$$

وهذا يقتضي أنّ

$$(1)\qquad \forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leq A_{n+1}-A_n\leq\frac{1}{2^{n+1}}$$

فالمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(A_{n+1}-A_n)$ متقاربة. ولأنّ المجموع الجزئي $\sum_{k=0}^{n-1}(A_{k+1}-A_k)$ لهذه المتسلسلة يساوي A_n-A_0 استنتجنا وجود نهاية للمتتالية $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. لنعرّف إذن العدد α_p بأنّه نهاية هذه المتتالية أي

$$(2)\qquad \alpha_p=\lim_{n\to\infty}2^{-n}f(2^np)$$

نرمز، على سبيل التسهيل، بالرمز α إلى العدد α_1. بالعودة إلى $(\mathcal{H})$ نجد

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leq\frac{f(2^n(p+1))}{2^n}-\frac{f(2^np)}{2^n}-\frac{f(2^n)}{2^n}\leq\frac{1}{2^n}$$

وبجعل n تسعى إلى اللانهاية نستنتج من (2) أنّ $\alpha_{p+1}=\alpha_p+\alpha$، وهي خاصّة صحيحة أيّاً كان p من $\mathbb{N}^*$، مما يتيح لنا أن نبرهن بالتدريج على العدد p أنّ

$$(3)\qquad \forall p\in\mathbb{N}^*,\quad \alpha_p=p\alpha$$

لنرجع إذن إلى العلاقة (1)، التي نستنتج منها في حالة p من $\mathbb{N}^*$ ما يلي :

$$0 \leq \frac{f(2^n p)}{2^n} - f(p) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

وبجعل n تسعى إلى اللانهاية، والاستفادة من (2) و (3) نستنتج أنّ

$$0 \leq p\alpha - f(p) \leq 1$$

ومن ثَمّ

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad p\alpha - 1 \leq f(p) \leq p\alpha \tag{4}$$

في حالة المسألة المطروحة لدينا $f(9999) = 3333$ وهذا يقتضي بناءً على (4) أنّ

$$\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{9999}$$

ومن ثَمّ $660 < 1982\alpha < 661$. إذن

$$659 < 1982\alpha - 1 \leq f(1982) \leq 1982\alpha < 661$$

ولأنّ $f(1982) \in \mathbb{N}$ استنتجنا أنّ $f(1982) = 660$. ■

ملاحظة : يمكن أن نبرهن بسهولة أنّه في حالة f يُحقِّق الشرط $(\mathcal{H})$ يوجد α من $\mathbb{R}_+$ يُحقّق

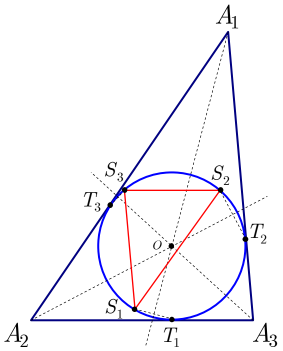
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \lfloor n\alpha \rfloor \quad \text{أو} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \lceil n\alpha \rceil - 1$$

② **نتأمّل مثلّثاً $A_1A_2A_3$ أطوال أضلاعه مختلفة مثنى مثنى. نرمز a_k إلى الضلع المقابل للرأس A_k، ونعرّف M_k منتصف a_k، و T_k نقطة تماس الدائرة المماسّة داخلاً لأضلاع المثلّث $A_1A_2A_3$ مع الضلع a_k، وأخيراً لتكن S_k نظيرة T_k بالنسبة إلى المنصّف الداخلي للزاوية A_k. أثبت أنّ المستقيمات (M_1S_1) و (M_2S_2) و (M_3S_3) تتلاقى في نقطة واحدة.**

ليكن O مركز الدائرة المماسّة داخلاً لرؤوس المثلّث $A_1A_2A_3$. ولنرمز بالرمز $\mathcal{S}_k$ إلى التناظر القائم بالنسبة إلى المنصّف (OA_k).

- لنتأمّل التحويل الهندسي $\mathcal{T}_3 = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_3 \circ \mathcal{S}_1$. لمّا كان $\mathcal{T}_3$ ناتج تركيب ثلاث تناظرات قائمة محاورها تشترك بالنقطة O كان $\mathcal{T}_3$ تناظراً قائماً محوره يمرّ بالنقطة O.

ولمّا كان من الواضح أنّ $\mathcal{S}_1(T_3) = T_2$ و $\mathcal{S}_3(T_2) = T_1$ و $\mathcal{S}_2(T_1) = T_3$، استنتجنا أنّ $\mathcal{T}_3(T_3) = T_3$. إذن $\mathcal{T}_3$ هو التناظر القائم الذي محوره (OT_3).



ولكن استناداً إلى التعريف، لدينا أيضاً

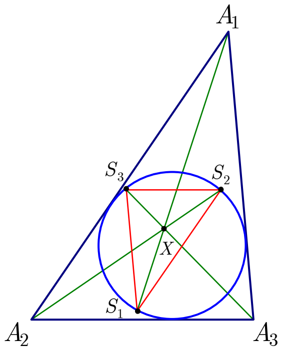
$$\mathcal{S}_2(T_2) = S_2 \text{ و } \mathcal{S}_3(T_1) = T_2 \text{ و } \mathcal{S}_1(S_1) = T_1$$

إذن

$$\mathcal{T}_3(S_1) = S_2$$

وهذا يبرهن أنّ (S_1S_2) عمودي على محور التناظر (OT_3) للتناظر القائم $\mathcal{T}_3$، ولأنّ (OT_3) عمودي على (A_1A_2)، استنتجنا أنّ $(A_1A_2) \parallel (S_1S_2)$.

■ ونبرهن بأسلوب مماثل باستخدام التناظر القائم $\mathcal{T}_2 = \mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_3$ الذي محور تناظره هو المستقيم (OT_2) أنّ $(A_3A_1) \parallel (S_3S_1)$، وكذلك نبرهن بالاستفادة من التناظر القائم $\mathcal{T}_1 = \mathcal{S}_3 \circ \mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2$ الذي محور تناظره هو (OT_1)، أنّ $(A_2A_3) \parallel (S_2S_3)$.



لنتأمّل الآن النقطة X، نقطة تقاطع المستقيمين (A_1S_1) و (A_2S_2). وليكن التحاكي $\mathcal{H}$ الذي مركزه X ويُحقّق $\mathcal{H}(S_1) = A_1$. عندئذ لمّا كانت S_2 هي نقطة تقاطع المستقيمين (S_1S_2) و (A_2S_2)، استنتجنا أنّ $\mathcal{H}(S_2)$ هي نقطة تقاطع (A_2S_2) مع المستقيم المار بالنقطة A_1 موازياً (S_1S_2) أي مع (A_1A_2) فهي إذن A_2، ومنه

$$\mathcal{H}(S_2) = A_2$$

وكذلك لمّا كانت S_3 هي نقطة تقاطع المستقيمين (S_1S_3) و (S_3S_2) استنتجنا أنّ $\mathcal{H}(S_3)$ هي نقطة تقاطع المستقيم المار بالنقطة A_1 موازياً (S_1S_3)، أي (A_1A_3)، مع المستقيم المار بالنقطة A_2 موازياً (S_2S_3)، أي (A_2A_3)، فهي إذن A_3 ومنه $\mathcal{H}(S_3) = A_3$.

وأخيراً، إذا تأمّلنا $\mathcal{H}'$، التحاكي الذي مركزه G مركز ثقل المثلّث، (أي نقطة تلاقي متوسّطاته) ونسبته $-\frac{1}{2}$، تيقّنّا مباشرة أنّ $\mathcal{H}'(A_k) = M_k$ في حالة $k \in \{1,2,3\}$.

وعلى هذا يكون التحويل $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}' \circ \mathcal{H}$ تحاكياً يُحقّق $\widetilde{\mathcal{H}}(S_k) = M_k$ في حالة k من $\{1,2,3\}$، وعليه تتلاقى المستقيمات (S_1M_1) و (S_2M_2) و (S_3M_3) في مركز التحاكي $\widetilde{\mathcal{H}}$. ويتمّ الإثبات. ■

③ **تأمّل متتالية متناقصة** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **حدودها موجبة تماماً وفيها** $x_0 = 1$.

1. **أثبت أنّه يوجد دليل** m **أكبر من** 1 **يُحقق**

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{m-1}^2}{x_m}\geq 3.999$$

2. **أثبت أنّه توجد متتالية متناقصة** $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **حدودها موجبة تماماً مع** $y_0 = 1$ **وتُحقّق**

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{y_0^2}{y_1}+\frac{y_1^2}{y_2}+\cdots+\frac{y_{n-1}^2}{y_n}<4$$

لنتأمّل المجموعة $\mathcal{D}$ المكوّنة من المتتاليات المتناقصة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ذات الحدود الموجبة تماماً والتي تحقّق $x_0 = 1$.

ولنعرّف في حالة $X=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{D}$ المقدار $S(X)$ من $\mathbb{R}_+^*\cup\{+\infty\}$ بالصيغة

$$S(X)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_k^2}{x_{k+1}}$$

عندئذ يكفي أن نبرهن أنّ $\min_{X\in\mathcal{D}} S(X)=4$ حتى نثبت صحّة الخاصتين 1. و 2.

▪ لتكن $X=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{D}$، ولتكن n من $\mathbb{N}^*$. عندئذ نستنتج من متراجحة كوشي شوارتز ما يلي :

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}x_k\right)^2=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_k}{\sqrt{x_{k+1}}}\cdot\sqrt{x_{k+1}}\right)^2\leq\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_k^2}{x_{k+1}}\right)\times\left(\sum_{k=0}^{n-1}x_{k+1}\right)$$

ومن ثَمّ

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}x_k\right)^2\leq\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_k^2}{x_{k+1}}\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\qquad(1)$$

ولكن لدينا من جهة أخرى

$$\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}x_k\right)^2-\left(1-\sum_{k=1}^{n-1}x_k\right)^2=4\times\left(\sum_{k=1}^{n-1}x_k\right)$$

إذن

$$4\times\left(\sum_{k=1}^{n-1}x_k\right)\leq\left(\sum_{k=0}^{n-1}x_k\right)^2$$

فإذا عُدنا إلى (1) وجدنا

$$4 \times \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k \right) \le \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k \right)^2 \le \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k^2}{x_{k+1}} \right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)$$

وأخيراً

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 4 - \frac{4x_n}{\sum_{k=1}^{n} x_k} \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k^2}{x_{k+1}} \le S(X) \qquad (2)$$

ولكن لدينا دوماً $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sum_{k=1}^{n} x_k} = 0$ ، كما هو موضّح في ما يلي :

❶ في حالة $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = +\infty$ ، نستنتج المطلوب من المتراجحة :

$$\forall n \ge 1, \quad 0 \le \frac{x_n}{\sum_{k=1}^{n} x_k} \le \frac{x_0}{\sum_{k=1}^{n} x_k}$$

❷ وفي حالة $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \ell < +\infty$ ، نستنتج من تقارب هذه المتسلسلة أنّ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

وهذا يقتضي من جديد، (لأنّ $0 < x_0 \le \ell$)، أنّ $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sum_{k=1}^{n} x_k} = 0$.

وبالعودة إلى (2) وجعل n تسعى إلى اللانهاية نجد أيضاً $S(X) \ge 4$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $\inf_{X\in\mathcal{D}} S(X) \ge 4$.

- وبالعكس، في حالة المتتالية $Y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالصيغة $y_n = 2^{-n}$ نجد أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k^2}{y_{k+1}} = 4 \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = 4\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 4$$

ومن ثَمّ $S(Y) = 4$. إذن $\min_{X\in\mathcal{D}} S(X) = 4$. ويتمّ إثبات المطلوب. ◪

④ **ليكن n عدداً طبيعيّاً موجباً تماماً. ولنتأمّل في $\mathbb{Z}$ المعادلة $\mathcal{E}_n$ التالية**

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$$

1. **أثبت أنّه إذا قَبِلت المعادلة $\mathcal{E}_n$ حلاً (x, y) من $\mathbb{Z}^2$ ، فإنها في الحقيقة تقبل ثلاثة حلول على الأقلّ.**
2. **أثبت أنّ المعادلة $\mathcal{E}_{1982}$ لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}$.**

1. لنلاحظ أنّ $3xy^2 - y^3$ هو جزء من المنشور

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} x^3 - 3xy^2 + y^3 &= 2x^3 - 3x^2y + (y-x)^3 \\ &= -x^3 - 3x^2(y-x) + (y-x)^3 \\ &= (y-x)^3 - 3(y-x)(-x)^2 + (-x)^3 \end{aligned}$$

وهكذا نرى أنّه إذا كان $X_1 = (x, y)$ حلاً للمعادلة $\mathcal{E}_n$ كان $X_2 = (y-x, -x)$ أيضاً حلاً للمعادلة نفسها، وكان من ثَمّ $X_3 = (-y, x-y)$ أيضاً حلاً لها.

إنّ أياً من حالات التساوي $X_1 = X_2$ أو $X_2 = X_3$ أو $X_3 = X_1$ غير ممكن الوقوع لأنّه يقتضي $X_1 = (0, 0)$ وهذا خُلفٌ لأنّ $n \neq 0$. فإذا قَبِلتْ المعادلة $\mathcal{E}_n$ حلاً قَبِلتْ ثلاثة حلولٍ مختلفة على الأقلّ.

2. لنثبت أن لا حلول للمعادلة $\mathcal{E}_2$ بالقياس 9. أي أنّه مهما يكن (x, y) من $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^2$ يكن $x^3 - 3xy^2 + y^3 \not\equiv 2 \bmod 9$.

لنلاحظ أولاً الجدول التالي :

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$3z \bmod 9$	0	3	-3	0	3	-3	0	3	-3
$z^3 \bmod 9$	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
$(z^3 - 3z) \bmod 9$	0	-2	2	0	-2	2	0	-2	2

لنفترض أنّ $x^3 = \varepsilon \bmod 9$ مع $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$. في هذه الحالة $3x = 3\varepsilon \bmod 9$ ومن ثَمّ أيّاً كانت y من $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ كان

$$\begin{aligned} x^3 - 3xy^2 + y^3 &= \varepsilon - 3\varepsilon y^2 + y^3 && \bmod 9 \\ &= (y-\varepsilon)^3 - 3(y-\varepsilon)\varepsilon^2 - \varepsilon && \bmod 9 \end{aligned}$$

فإذا استفدنا من الجدول وجدنا :

في حالة $\varepsilon = 0$، لدينا، بالقياس 9، ما يلي : $x^3 - 3xy^2 + y^3 \in \{0,1,8\}$.

في حالة $\varepsilon = 1$، لدينا، بالقياس 9، ما يلي : $x^3 - 3xy^2 + y^3 \in \{1,8,6\}$.

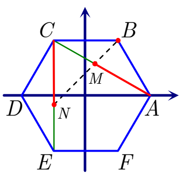
في حالة $\varepsilon = -1$، لدينا، بالقياس 9، ما يلي : $x^3 - 3xy^2 + y^3 \in \{1,8,3\}$.

إذن مجموعة القيم التي يأخذها المقدار $x^3 - 3xy^2 + y^3 \bmod 9$ هي $\{0,1,3,6,8\}$، فإذا كان باقي قسمة n على 9 أحد أعداد المجموعة $\{2,4,5,7\}$، ما قَبلت المعادلة $\mathcal{E}_n$ حلولاً في $\mathbb{Z}$. وبوجه خاصّ لأنّ $1982 = 2 \bmod 9$ استنتجنا أنّ المعادلة $\mathcal{E}_{1982}$ لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}$.

⑤ **نتأمّل مسدّساً منتظماً $ABCDEF$. M نقطة من القطر $[AC]$، و N نقطة من القطر $[CE]$. نفترض أنّ**

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$$

عيِّن r إذا علمتَ أنّ النقاط B و M و N تقع على استقامة واحدة.



لنطابق بين نقاط المستوي، و حقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$، و ليكن $\mathrm{j} = \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}\right)$. عندئذ يمكن أنّ نفترض أنّ الأعداد العقديّة 1 و $-\mathrm{j}^2$ و j و j^2 تمثّل النقاط A و B و C و E بالترتيب.

استناداً إلى الفرْض، يمثّل العدد العقدي $1 + r(\mathrm{j} - 1)$ النقطة M، ويمثّل العدد العقدي $\mathrm{j} + r\left(\mathrm{j}^2 - \mathrm{j}\right)$ النقطة N، وذلك لأنّ $AC = CE$.

وعليه يكون

$$\overrightarrow{BM} = 1 + \mathrm{j}^2 + r(\mathrm{j} - 1) = -r + (r-1)\mathrm{j}$$

$$\overrightarrow{BN} = \mathrm{j}^2 + \mathrm{j} + r\left(\mathrm{j}^2 - \mathrm{j}\right) = -1 - r - 2r\,\mathrm{j}$$

وإذا تذكّرنا أنّ الجملة $(1,\mathrm{j})$ تكوّن أساساً في المستوي استنتجنا أنّ النقاط B و N و M تقع على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان $\det\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN}\right) = 0$ أي $3r^2 - 1 = 0$، ومنه $r = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

⑥ **ليكن S مربّعاً طول ضلعه يساوي 100. وليكن $\mathcal{L} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ طريقاً مضلعيّاً غير مغلق $(A_0 \neq A_n)$ ولا يتقاطع مع نفسه محتوى داخل المربّع S. نفترض أنّه مهما تكن P من محيط المربّع S توجد نقطة من $\mathcal{L}$ تبعد عن P مسافة أصغر أو تساوي $1/2$. أثبت وجود نقطتين X و Y من $\mathcal{L}$ المسافة بينهما أصغر أو تساوي 1 وطول الجزء من الطريق $\mathcal{L}$ المحصور بينهما أكبر أو يساوي 198.**

في حالة نقطة M من $\mathcal{L}$ توجد قطعة مستقيمة وحيدة $[A_kA_{k+1}]$، مع $0 \leq k < n$، من الطريق $\mathcal{L}$ تقع عليها النقطة M، وعندئذ نعرّف $d_{\mathcal{L}}(M)$، فاصلة M على الطريق $\mathcal{L}$، بأنّها المقدار

$$d_{\mathcal{L}}(M) = \sum_{j=0}^{k-1} A_jA_{j+1} + A_kM$$

وهكذا يكون $\ell = d_{\mathcal{L}}(A_n)$ هو طول الطريق $\mathcal{L}$، ويعرّف التطبيق $M \overset{\varphi}{\mapsto} d_{\mathcal{L}}(M)$ تقابلاً مستمرّاً بين نقاط $\mathcal{L}$ والمجال $[0, \ell]$، نرمز φ إلى تقابله العكسي.

استناداً إلى الفرْض، مهما تكن P من محيط المربّع S توجد نقطة من $\mathcal{L}$ تبعد عنها مسافة أقصر أو تساوي $\frac{1}{2}$، أي تكون المجموعة $\left\{t \in [0, \ell] : d(P, \varphi(t)) \leq \frac{1}{2}\right\}$ غير خالية، وهذا ما يتيح لنا تعريف

$$t(P) = \min\left\{t \in [0, \ell] : dd(P, \varphi(t)) \leq \tfrac{1}{2}\right\}$$

فإذا تأمّلنا نقطة M دارجة على الطريق $\mathcal{L}$ بدءاً من A_0 كان $\varphi(t(P))$ أوّل موقع تصله M على الطريق $\mathcal{L}$ ويبعد مسافة أقصر أو تساوي $\frac{1}{2}$ عن النقطة P.

إذا كان P و Q رأسين مختلفين من رؤوس المربّع كان $t(P) \neq t(Q)$ لأنّه إذا افترضنا أنّ $t(P) = t(Q) = \tau$ وعرّفنا $M = \varphi(\tau)$ كان

$$PQ \leq PM + MQ \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

وهذا خُلفٌ.

لنسمِّ إذن P_0 رأس المربّع الذي تُقاربه النقطة M، الدارجة على الطريق $\mathcal{L}$ بدءاً من A_0، أوّلاً، فيكون $t(P_0)$ أصغر القيم $t(Q)$ عندما تتحوّل Q على رؤوس المربّع S.

لنسمِّ كذلك P_1 و P_3 الرأسين المجاورين للرأس P_0 في المربّع $\mathcal{S}$، ولنختر التسمية لتُحقّق المتراجحة $t(P_1) < t(P_3)$.

لنعرّف إذن الجزأين $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ كما يلي :

$$\mathcal{L}_1 = \varphi([0, t(P_1)]) \quad \text{و} \quad \mathcal{L}_2 = \varphi([t(P_1), \ell])$$

لنتأمّل المجموعة

$$\begin{aligned} J &= \{P \in [P_0P_3] : d(P, \mathcal{L}_1) \le \tfrac{1}{2}\} \\ &= \left\{P \in [P_0P_3] : \exists t \in [0, t(P_1)],\, d(P, \varphi(t)) \le \tfrac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

هذه مجموعة متراصّة وغير خاليّة لأنها تحوي P_0. إذن يبلغ التابع $P \mapsto PP_3$ حدّه الأدنى على J. فتوجد X' من J تُحقّق

$$X'P_3 = \min\{PP_3 : P \in J\}$$

لنعرّف إذن t_0 من $[0, t(P_1)]$ تُحقّق $d\big(X', \varphi(t_0)\big) \le \frac{1}{2}$ ولتكن $X = \varphi(t_0)$.

لنتأمّل كذلك المجموعة

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \{P \in [P_0P_3] : d(P, \mathcal{L}_2) \le \tfrac{1}{2}\} \\ &= \left\{P \in [P_0P_3] : \exists t \in [t(P_1), \ell],\, d(P, \varphi(t)) \le \tfrac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

هذه مجموعة متراصّة وغير خاليّة لأنها تحوي P_3.

إذا افترضنا جدلاً أنّ $X' \notin \tilde{J}$ استنتجنا من كون $\tilde{J}$ مجموعة متراصّة أنّه يوجد جوارٌ كاملٌ للنقطة X' غير محتوى في $\tilde{J}$، وهذا بدوره يقتضي وجود نقطة X'' من $[P_0P_3]$ تُحقّق $X''P_3 < X'P_3$ و $X'' \notin \tilde{J}$ أي $d\big(X'', \mathcal{L}_2\big) > \frac{1}{2}$. ولكن نعلم أنّ

$$\min\big(d(X'', \mathcal{L}_1), d(X'', \mathcal{L}_2)\big) = d\big(X'', \mathcal{L}\big) \le \frac{1}{2}$$

إذن يجب أن يكون $d\big(X'', \mathcal{L}_1\big) \le \frac{1}{2}$. ومن ثَمّ يكون لدينا $X'' \in J$، والمتراجحة $X''P_3 < X'P_3$ تناقض تعريف X'. إنّ هذا التناقض يُثبتُ أنّ $X' \in \tilde{J}$.

إذن لتكن t_1 من $[t(P_1), \ell]$ تُحقّق $d\big(X', \varphi(t_1)\big) \le \frac{1}{2}$، ولنضع $Y = \varphi(t_1)$. عندئذ

$$XY \le XX' + X'Y = d\big(X', \varphi(t_0)\big) + d\big(X', \varphi(t_1)\big) \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

لنضع $Z = \varphi(t(P_1))$. عندئذ نستنتج من كون $X' \in [P_0P_3]$ أنّ

$$100 = P_0P_1 \le X'P_1 \le X'X + XZ + ZP_1 \le XZ + 1$$

إذن $d_{\mathcal{L}}(Z) - d_{\mathcal{L}}(X) \ge XZ \ge 99$.

ونستنتج بالأسلوب نفسه أنّ

$$100 \le X'P_1 \le X'Y + YZ + ZP_1 \le YZ + 1$$

إذن $d_{\mathcal{L}}(Y) - d_{\mathcal{L}}(Z) \ge YZ \ge 99$.

وعلى هذا يكون $d_{\mathcal{L}}(X) - d_{\mathcal{L}}(Y) \ge 198$. وهي النتيجة المطلوبة. ■

أولمبياد الرياضيّات الرابع والعشرون

① أوجد جميع التوابع $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ التي تُحقّق

❶ أيّاً كان (x,y) من $(\mathbb{R}_+^*)^2$ كان $f(xf(y)) = yf(x)$.

❷ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

لنتأمّل تابعاً $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ يُحقّق الخواص المطلوبة.

- بتطبيق ❶ بعد تعويض $\frac{x}{f(y)}$ مكان x نجد

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f\left(\frac{x}{f(y)}\right) = \frac{f(x)}{y} \qquad (1)$$

- بتعويض $x = y = 1$ في ❶ نجد $f(f(1)) = f(1)$.
- ثُمّ بتعويض $x = y = f(1)$ في (1) والاستفادة من $f(f(1)) = f(1)$ نستنتج أنّ $f(1) = 1$.
- لنتأمّل عدداً z من $\mathbb{R}_+^*$ يُحقّق $f(z) = z$. ولنناقش الحالات التالية :

حالة $z > 1$. عندئذ نستنتج من ❶ بالتدريج على العدد n أنّ $f\left(z^{2^n}\right) = z^{2^n}$. هذه نتيجة صحيحة في حالة $n = 0$، وإذا افترضنا صحّتها في حالة n وطبّقنا ❶ بعد وضع $x = y = z^{2^n}$، وجدنا أنّها تبقى صحيحة في حالة $n+1$. وهذا يتناقض مع الشرط ❷ لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} z^{2^n} = +\infty$.

حالة $z < 1$. نستنتج من (1) بعد وضع $x = 1$ و $y = z$ أنّ $f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z}$، وهذا خُلفٌ أيضاً بناءً على الحالة السابقة مُطبّقة على $\frac{1}{z}$.

إذن يجب أن يكون $z = 1$.

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $f(z) = z \Leftrightarrow z = 1$.

- لتكن x من $\mathbb{R}_+^*$ ولنضع $z = xf(x)$. نستنتج من ❶ أنّ

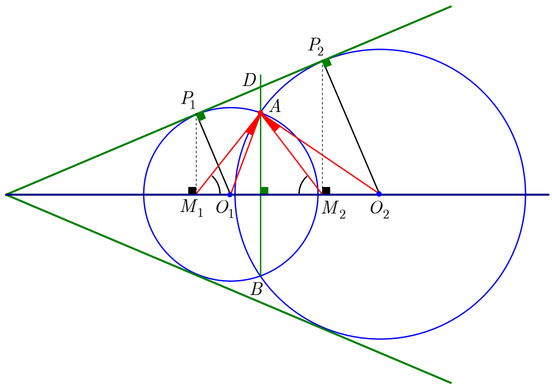
$$f(z) = f(xf(x)) = xf(x) = z$$

وبالاستناد إلى ما سبق نستنتج أنّ $z = 1$، ومن ثَمّ $f(x) = \frac{1}{x}$.

وبالعكس، نرى أنّ التابع $x \mapsto \frac{1}{x}$ يُحقّق ❶ و ❷، فهو التابع الوحيد الذي يُحققهما. ■

② **$\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ دائرتان في مستوٍ واحدٍ مركزاهما O_1 و O_2 بالترتيب. نفترض أنّ نصفي قطريهما مختلفان، وأنّهما متقاطعتان. لتكن A إحدى نقطتي تقاطع الدائرتين $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$. أحدُ المماسّين المشتركين لهاتين الدائرتين يمسّ الدائرة $\mathfrak{C}_1$ في P_1، ويمسّ الدائرة $\mathfrak{C}_2$ في P_2، في حين يمسّ المماس الثاني الدائرة $\mathfrak{C}_1$ في Q_1، ويمسّ الدائرة $\mathfrak{C}_2$ في Q_2. نعرّف M_1 منتصف $[P_1Q_1]$، و M_2 منتصف $[P_2Q_2]$. أثبت أنّ $\widehat{M_1AM_2} = \widehat{O_1AO_2}$.**

لمّا كان خطّ المركزين (O_1O_2) محور تناظر للشكل استنتجنا أنّ M_1 هي المسقط القائم للنقطة P_1 على (O_1O_2)، وكذلك فإنّ M_2 هي المسقط القائم للنقطة P_2 على (O_1O_2).



تؤول المسألة إلى إثبات صحّة المساواة

$$\widehat{M_1AO_1} = \widehat{M_2AO_2} \qquad (1)$$

- من المثلّث M_1AO_1 نكتب انطلاقاً من علاقة الجيب

$$\frac{M_1O_1}{O_1A} = \frac{\sin \widehat{M_1AO_1}}{\sin \widehat{O_1M_1A}} = \frac{\sin \widehat{M_1AO_1}}{\sin \widehat{M_2M_1A}} \qquad (2)$$

- من المثلّث M_2AO_2 نكتب انطلاقاً من علاقة الجيب

$$\frac{M_2O_2}{O_2A} = \frac{\sin \widehat{M_2AO_2}}{\sin \widehat{O_2M_2A}} = \frac{\sin \widehat{M_2AO_2}}{\sin \widehat{M_1M_2A}} \qquad (3)$$

- ولكنّ المثلّثين $O_1P_1M_1$ و $O_2P_2M_2$ متشابهان لتوازي أضلاعهما إذن

$$\frac{M_1O_1}{O_1A} = \frac{M_1O_1}{O_1P_1} = \frac{M_2O_2}{O_2P_2} = \frac{M_2O_2}{O_2A}$$

فإذا استفدنا من ذلك استنتجنا من (2) و (3) أنّ

$$\frac{\sin \widehat{M_1AO_1}}{\sin \widehat{M_2M_1A}} = \frac{\sin \widehat{M_2AO_2}}{\sin \widehat{M_1M_2A}} \qquad (4)$$

إذن يؤول إثبات (1) إلى إثبات تساوي الزاويتين $\widehat{M_2M_1A} = \widehat{M_1M_2A}$ ، أي إلى إثبات أنّ المثلّث AM_1M_2 مثلّثٌ متساوي الساقين.

▪ لتكن B النقطة الثانية، غير A ، التي تتقاطع عندها الدائرتان $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$. عندئذ يتقاطع المستقيم (AB) مع المماس المشترك (P_1P_2) في نقطة D . تُحسب قوّة النقطة D بالنسبة إلى الدائرة $\mathfrak{C}_1$ بالصيغة $(DP_1)^2 = DA \times DB$ ، وتُحسب قوّة النقطة D بالنسبة إلى الدائرة $\mathfrak{C}_2$ بالصيغة $(DP_2)^2 = DA \times DB$ ، فنرى أنّ D هي منتصف القطعة $[P_1P_2]$ ، ولأنّ المستقيمات (M_1P_1) و (M_2P_2) و (DB) متوازية (عموديّة على (O_1O_2)) استنتجنا أنّ (DB) هو محور القطعة $[M_1M_2]$ ، ومن ثَمّ $AM_1 = AM_2$. فنكون قد برهنّا أنّ المثلّث AM_1M_2 مثلّثٌ متساوي الساقين، والمساواة (4) تقتضي (1) ويتمّ إثبات المطلوب. ◼

③ **لتكن a و b و c ثلاثة أعداد طبيعيّة موجبة تماماً أوّليّة فيما بينها مثنى مثنى. أثبت أنّ العدد $2abc - ab - bc - ca$ هو أكبر صحيح عدد لا يمكن التعبير عنه بصيغة من النمط $xab + ybc + zca$ و x و y و z هي أعدادٌ طبيعيّة.**

1. لنبدأ بدراسة حالة عددين طبيعيين موجبين تماماً b و c وأوليين فيما بينهما. نعرّف عندئذ

$$\mathcal{L}_{(b,c)} = \{\mu b + \nu c : (\mu, \nu) \in \mathbb{N}^2\}$$

ونهدف إلى إثبات أنّ

$$\max(\mathbb{N} \backslash \mathcal{L}_{(b,c)}) = bc - b - c = (b-1)(c-1) - 1$$

▪ لمّا كان $\gcd(b,c) = 1$ استنتجنا أنّ c عنصرٌ قَلوبٌ بالقياس b ، أي في $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$، فالتطبيق $cx \mapsto x$ يُعرّف تقابلاً على $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$. ومنه

$$\forall r \in \{0,1,\ldots,b-1\}, \exists! \ell \in \{0,1,\ldots,b-1\} : \quad c\ell = r \bmod b$$

▪ ليكن إذن N عدداً طبيعيّاً أكبر أو يساوي $(b-1)(c-1)$. عندئذ نتأمّل r باقي القسمة الإقليديّة للعدد N على b فيكون $0 \leq r < b$، واستناداً إلى النقطة السابقة يوجد ℓ من المجموعة $\{0,1,\ldots,b-1\}$ يُحقّق $c\ell = r \bmod b$. وعندها ينتمي العدد $N - \ell c$ إلى مضاعفات العدد b. فيوجد k من $\mathbb{Z}$ يُحقّق $N = kb + \ell c$. ولكن

$$\begin{aligned} kb = N - \ell c &\geq (b-1)(c-1) - (b-1)c \\ &\geq 1 - b > -b \end{aligned}$$

إذن $k > -1$ أو $k \in \mathbb{N}$. وهذا يبرهن على أنّ $N \in \mathcal{L}_{(b,c)}$.

▪ وبالعكس، لنفترض أنّ $bc - b - c$ ينتمي إلى $\mathcal{L}_{(b,c)}$، عندها يوجد عددان طبيعيّان μ و ν يُحقّقان $\mu b + \nu c = bc - b - c$ ومنه

$$(\mu+1)b = (b-1-\nu)c \quad \text{و} \quad (\nu+1)c = (c-1-\mu)b$$

ولأنّ $\gcd(b,c) = 1$ نستنتج من المساواة الأولى أنّ b يقسم العدد الموجب تماماً $\nu + 1$ إذن $b \leq \nu + 1$، وعندئذ نستنتج من المساواة الثانية أنّ $(\mu+1)b \leq 0$ وهذا خُلفٌ واضح. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $bc - b - c$ هو أكبر عدد طبيعي لا ينتمي إلى $\mathcal{L}_{(b,c)}$، أي

$$\max\left(\mathbb{N} \backslash \mathcal{L}_{(b,c)}\right) = bc - b - c$$

2. لنأتِ إلى حالة المسألة المطروحة، ولنعرّف كما في السابق

$$\mathcal{L}_{(a,b,c)} = \left\{\lambda a + \mu b + \nu c : (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{N}^3\right\}$$

نهدف إلى إثبات أنّ

$$\max\left(\mathbb{N} \backslash \mathcal{L}_{(a,b,c)}\right) = 2abc - ab - bc - ca$$

▪ لمّا كان $\gcd(bc, a) = 1$ استنتجنا أنّ bc عنصرٌ قَلوبٌ بالقياس a، أي في الحلقة $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$، فالتطبيق $x \mapsto bcx$ يُعرّف تقابلاً على $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$. ومنه

$$\forall r \in \{0,1,\ldots,a-1\}, \exists! \ell \in \{0,1,\ldots,a-1\} : \quad bc\ell = r \bmod b$$

▪ ليكن إذن N عدداً طبيعيّاً أكبر تماماً من $2abc - ab - bc - ca$. عندئذ نتأمّل r باقي القسمة الإقليديّة للعدد N على a فيكون $0 \leq r < a$، واستناداً إلى النقطة السابقة

يوجد ℓ من المجموعة $\{0,1,\ldots,a-1\}$ يُحقّق $cb\ell = r \bmod a$. وعندها ينتمي العدد $N-\ell bc$ إلى مضاعفات العدد a. فيوجد k من $\mathbb{Z}$ يُحقّق $N = ka + \ell bc$.
وهنا نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} ka &= N - \ell bc \geq N-(a-1)bc \\ &> 2abc - ab - bc - ca - abc + bc \\ &> (bc-b-c)a \end{aligned}$$

إذن $k > bc-b-c$ أي $k \in \mathcal{L}_{(b,c)}$، وإذا استفدنا ممّا أثبتناه سابقاً استنتجنا وجود عددين طبيعيين m و n يُحقّقان $k = mb+nc$، وهذا يقتضي أنّ

$$N = \ell bc + mab + nca \in \mathcal{L}_{(a,b,c)}$$

▪ وبالعكس، لنفترض أنّ $A = 2abc - ab - bc - ca$ ينتمي إلى $\mathcal{L}_{(a,b,c)}$، عندها توجد أعداد طبيعيّة λ و μ و ν تُحقّق $A = \lambda ab + \mu bc + \nu ca$.
إذا نظرنا إلى هذه المساواة بالقياس a ولاحظنا أنّ $A = -bc \bmod a$ استنتجنا أنّ a يقسم $(\mu+1)bc$، ولكنّ a أوّلي مع bc إذن a يقسم العدد الموجب تماماً $\mu+1$، وعليه لا بُدّ أن يكون $\mu \geq a-1$. ونبرهن بأسلوب مماثل أنّ $\lambda \geq c-1$ و $\nu \geq b-1$. وعندها يكون

$$\begin{aligned} A &= \lambda ab + \mu bc + \nu ca \\ &\geq (c-1)ab + (a-1)bc + (b-1)ca \\ &\geq 3abc - ab - bc - ca \end{aligned}$$

وهذا خُلفٌ واضح، إذن، إذن $A \notin \mathcal{L}_{(a,b,c)}$.
وهكذا نكون قد أثبتنا أن العدد $A = 2abc - ab - bc - ca$ هو أكبر عدد طبيعي لا ينتمي إلى $\mathcal{L}_{(a,b,c)}$، أي

$$\max\left(\mathbb{N} \backslash \mathcal{L}_{(a,b,c)}\right) = 2abc - ab - bc - ca$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

④ ليكن ABC مثلّثاً متساوي الأضلاع، ولتكن $\mathcal{E}$ المجموعة $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$، أي مجموعة النقاط التي تنتمي إلى أحد أضلاع المثلّث ABC. بيِّن ما إذا كان عند كلِّ تجزئةٍ

للمجموعة $\mathcal{E}$ إلى مجموعتين، لابُدّ أن تحوي إحدى هاتين المجموعتين على الأقلّ رؤوس مثلّثٍ قائم.

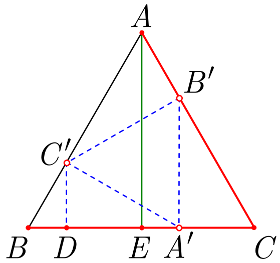
في الحقيقة عند كلِّ تجزئةٍ للمجموعة $\mathcal{E}$ إلى مجموعتين، لابُدّ أن تحوي إحدى هاتين المجموعتين على الأقلّ رؤوس مثلّثٍ قائم.

لنفترض على سبيل الجدل أنّ هذا غير صحيح، فتوجد تجزئة للمجموعة $\mathcal{E}$ إلى مجموعتين منفصلتين وغير خاليتين $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ دون أن يحوي أيٌّ من هاتين المجموعتين رؤوس مثلّثٍ قائم.

لنتأمّل النقاط A' و B' و C' المعرّفة بالصيغ

$$\overrightarrow{BA'} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{CB'} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{CA} \text{ و } \overrightarrow{AC'} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

وقد جرى اختيار هذه النقاط لتكون المستقيمات $(A'B')$ و $(B'C')$ و $(C'A')$ عموديّة على المستقيمات (BC) و (CA) و (AB) بالترتيب.



تنتمي اثنتان من النقاط A' و B' و C' إلى أحد جزأي التجزئة $\mathcal{F}$ أو $\mathcal{G}$، ويمكن دون الإقلال من عموميّة الإثبات أن نفترض أنّ A' و B' تنتميان إلى $\mathcal{F}$. عندئذ ينتج من كون $(A'B')$ عمودي على (BC) أنّ $[BC]\backslash\{A'\} \subset \mathcal{G}$.

لتكن D المسقط القائم للنقطة C' على (BC). لمّا كان المثلّث BDC' قائماً، ولمّا كانت النقطتان B و D تنتميان إلى $\mathcal{G}$ استنتجنا، بناءً على الفرْض، أنّ $C' \in \mathcal{F}$.

ومن جديد، لأنّ B' و C' تنتميان إلى $\mathcal{F}$، والمستقيم $(C'B')$ عمودي على (AC) استنتجنا أنّ $[AC]\backslash\{B'\} \subset \mathcal{G}$.

وعلى هذا، إذا كانت E هي المسقط القائم للنقطة A على (BC)، انتمت رؤوس المثلّث القائم AEC إلى المجموعة $\mathcal{G}$ وهذا يتناقض مع الفرْض. ◼

⑤ **أيمكن إيجاد 1983 عدداً طبيعيّاً موجباً تماماً وجميعها أصغر أو تساوي 10^5 دون أن يكوّن أيُّ ثلاثة منها ثلاثة حدود متتابعة في متتالية حسابيّة ؟**

سنضع المسألة في إطار عام. لنرمز بالرمز $\mathcal{P}^{(\mathrm{f})}(\mathbb{N})$ إلى مجموعة الأجزاء المنتهية من مجموعة الأعداد الطبيعيّة $\mathbb{N}$. ولنرمز في حالة A من $\mathcal{P}^{(\mathrm{f})}(\mathbb{N})$ بالرمز N_A إلى العدد الطبيعي

$$N_A = \sum_{k\in A} 3^k$$

مع الاصطلاح المتعارف $N_\varnothing = 0$.

ولنعرّف في حالة A من $\mathcal{P}^{(\mathrm{f})}(\mathbb{N})$ و n من $\mathbb{N}$، العدد $N_A^{(n)}$ بأنّه $N_{A\cap[0,n[}$ أي

$$N_A^{(n)} = \sum_{k\in A, k<n} 3^k$$

سنكتب فيما يلي $a \bmod b$ دلالة على باقي القسمة الإقليديّة للعدد الطبيعي a على العدد الطبيعي غير المعدوم b.

- نلاحظ أولاً ما يلي :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 2\times\sum_{k=0}^{n-1} 3^k = 3^n - 1 < 3^n$$

ينتج من ذلك أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad N_A^{(n)} = N_A \bmod 3^n$$

وأنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\le N_A^{(n)} < \frac{1}{2}\times 3^n \qquad (1)$$

فإذا رمزنا $\mathbb{1}_A$ إلى التابع المميِّز للمجموعة A، أي الذي يأخذ القيمة 1 عند n من A ويأخذ القيمة 0 عند n من $\mathbb{N}\backslash A$. استنتجنا من كون $N_A^{(n+1)} - N_A^{(n)} = 3^n\cdot\mathbb{1}_A(n)$، أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathbb{1}_A(n) = 3^{-n}\left(N_A^{(n+1)} - N_A^{(n)}\right) \qquad (2)$$

وهذا يبرهن على أنّ التابع $A\mapsto N_A$ تابعٌ متباينٌ.

- لنتأمّل المجموعة

$$\mathfrak{B} = \left\{N_A : A\in\mathcal{P}^{(\mathrm{f})}(\mathbb{N})\right\}$$

سنثبت أنّ أي ثلاثة أعداد من $\mathfrak{B}$ لا تؤلِّف ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابيّة. لنفترض على سبيل الجدل وجود ثلاثة مجموعات **مختلفة** A و B و C من $\mathcal{P}^{(\mathrm{f})}(\mathbb{N})$ تُحقّق

$$N_A + N_C = 2N_B$$

وهذا يُكافئ قولنا إنّ (N_A, N_B, N_C) هي ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابيّة. نستنتج من المتراجحة (1) أنّ

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad N_A^{(n)} + N_C^{(n)} &= (N_A + N_C) \bmod 3^n \\ &= (2N_B) \bmod 3^n = 2N_B^{(n)}\end{aligned}$$

فإذا استفدنا من (2) استنتجنا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{1}_A(n) + \mathbb{1}_C(n) = 2\mathbb{1}_B(n)$$

فإذا كان $B \not\ni n$ استنتجنا مما سبق أنّ $A \not\ni n$ و $C \not\ni n$، وهذا يعني أنّ متمّمة B محتواة في تقاطع متمّمي A و C، أي إنّ $A \cup C \subset B$.

وإذا كان $n \in B$ استنتجنا مما سبق أنّ $n \in A$ و $n \in C$، وهذا بدوره يعني أنّ $B \subset A \cap C$.

إذن $A \cup C \subset B \subset A \cap C$، وهذا يُكافئ $A = B = C$، مما يتناقض مع الفرْض. إذن لقد أثبتنا أنّ أيّ ثلاثة أعداد من المجموعة $\mathfrak{B}$ لا تؤلِّف ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابيّة. وتبقى هذه الخاصّة محقّقة وضوحاً في أي مجموعة من النمط $k + \mathfrak{B} = \{k + b : b \in \mathfrak{B}\}$، مع k من $\mathbb{N}$. وعلى وجه الخصوص فإنّ المجموعة الجزئيّة $\mathfrak{B}_N = (1 + \mathfrak{B}) \cap [1, N]$ من المجموعة $\{1, \ldots, N\}$، لا تحوي أي ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابيّة. فكم عدد عناصر المجموعة $\mathfrak{B}_N$ ؟ في الحقيقة،

$$\begin{aligned}1 + N_{[0,p-1]\cap\mathbb{N}} \in \mathfrak{B}_N &\Leftrightarrow \frac{3^p - 1}{2} \leq N - 1 \\ &\Leftrightarrow 3^p \leq 2N - 1 \\ &\Leftrightarrow p \leq \log_3(2N - 1) \\ &\Leftrightarrow p \leq \lfloor \log_3(2N - 1) \rfloor\end{aligned}$$

فإذا عرّفنا $P_N = \lfloor \log_3(2N - 1) \rfloor$، كان

$$\{1 + N_A : A \subset \{0, 1, \ldots, P_N - 1\}\} \subset \mathfrak{B}_N$$

ومن ثَمّ $\operatorname{card}(\mathfrak{B}_N) \geq 2^{P_N}$.

وفي الحالة الخاصّة $N = 10^5$ لدينا $P_N = 11$ ومن ثَمّ

$$\operatorname{card}(\mathfrak{B}_{10^5}) \geq 2048 > 1983$$

فالجواب عن السؤال المطروح هو نعم. ∎

⑥ **لتكن a و b و c أطوال أضلاع مثلّث. أثبت أنّ**

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$$

وبيِّن متى تقع المساواة.

لنعرّف الأعداد x و y و z بالصيغ

$$x=p-a \text{ و } y=p-b \text{ و } z=p-c \text{ مع } p=\frac{a+b+c}{2}$$

عندئذ يُكافئ قولنا إنّ a و b و c هي أطوال أضلاع مثلّث، القول x و y و z أعدادٌ موجبة. وعندها يكون

$$a=y+z \text{ و } b=z+x \text{ و } c=x+y$$

وإذا عرّفنا

$$F(a,b,c)=a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)$$

كان

$$F(a,b,c)=2\left(xy^3+yz^3+zx^3\right)-2xyz(x+y+z)$$

ولكن استناداً إلى متراجحة كوشي شوارتز لدينا

$$\begin{aligned}xyz(x+y+z)^2&=\left(\sqrt{x^3y}\sqrt{z}+\sqrt{y^3z}\sqrt{x}+\sqrt{z^3x}\sqrt{y}\right)^2\\&\leq\left(x^3y+y^3z+z^3x\right)(x+y+z)\end{aligned}$$

مع مساواة إذا وفقط إذا كان

$$\frac{x^3y}{z}=\frac{y^3z}{x}=\frac{z^3x}{y}\Leftrightarrow x=y=z$$

وهذا يبرهن على أنّ $F(a,b,c)\geq 0$ مع مساواة إذا وفقط إذا كان $a=b=c$. إذن لقد أثبتنا صحّة المتراجحة المطلوبة وأثبتنا أنّ المساواة تقع فيها في حالة مثلّث متساوي الأضلاع، وفقط في هذه الحالة.

أولمبياد الرياضيّات الخامس والعشرون

① أثبت أنّه أيّاً كانت الأعداد الحقيقيّة غير السالبة x و y و z التي تُحقّق $x+y+z=1$ تحقّقت المتراجحة

$$0 \leq xy + yz + xz - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

يُكتب كثير الحدود من الدرجة الثالثة P الذي يقبل الأعداد x و y و z جذوراً بالشكل

$$\begin{aligned} P(X) &= (X-x)(X-y)(X-z) \\ &= X^3 - X^2 + (xy+yz+zx)X - xyz \end{aligned}$$

وعلى هذا، نرى مباشرة أنّ

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}-z\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}(xy+yz+zx-2xyz)$$

ومنه الصيغة المفيدة التالية

$$\frac{xy+yz+zx-2xyz}{2} = \left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}-z\right) + \frac{1}{8} \tag{1}$$

- لمّا كانت الأعداد x و y و z أعداداً موجبة تُحقّق $x+y+z=1$ استنتجنا أنّ كلاً منها يبعد عن العدد $\frac{1}{2}$ مسافة أصغر أو تساوي $\frac{1}{2}$، وعليه يكون

$$\left|\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)\right| = \left|\frac{1}{2}-x\right|\left|\frac{1}{2}-y\right|\left|\frac{1}{2}-z\right| \leq \frac{1}{8}$$

إذن

$$\frac{xy+yz+zx-2xyz}{2} = \left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}-z\right) + \frac{1}{8} \geq 0$$

وهي المتراجحة الأولى.

- وكذلك لمّا كانت الأعداد x و y و z أعداداً موجبة تُحقّق $x+y+z=1$، استنتجنا أنّ واحداً فقط من هذه الأعداد يمكن أن يكون أكبر تماماً من $\frac{1}{2}$، وفي هذه الحالة يكون جداء الضرب $\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)$ سالباً أو معدوماً، وهذا يقتضي، بالنظر إلى (1)، أنّ

$$\frac{xy+yz+zx-2xyz}{2} = \left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}-z\right) + \frac{1}{8} \leq \frac{1}{8} < \frac{7}{54}$$

أمّا في حالة كون الأعداد الثلاثة x و y و z أصغر أو تساوي $\frac{1}{2}$، فعندئذ نستنتج من كون المتوسّط الهندسي للأعداد الموجبة $(\frac{1}{2}-x)$ و $(\frac{1}{2}-y)$ و $(\frac{1}{2}-z)$ أصغر من متوسّطها الحسابي الذي يساوي $\frac{1}{6}$ أنّ

$$\frac{xy+yz+zx-2xyz}{2} = \left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)+\frac{1}{8}$$
$$\leq \frac{1}{6^3}+\frac{1}{8} \leq \frac{7}{54}$$

وهذا يُكافئ المتراجحة الثانية.

② **أوجد زوجاً من الأعداد الطبيعيّة** (a,b) **يُحقّق الخاصتين التاليتين :**

1. **العدد** 7 **لا يقسم** $ab(a+b)$.
2. **العدد** 7^7 **يقسم** $(a+b)^7-a^7-b^7$.

لنتأمّل زوجاً (a,b) من الأعداد الطبيعيّة. ولنلاحظ أنّ

$$(a+b)^7-a^7-b^7 = 7ab(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)^2$$

- لنفترض أنّ الزوج (a,b) يُحقّق الشرطين 1. و 2. عندئذ

$$7^3 \mid \left(a^2+ab+b^2\right) \quad \text{و} \quad 7 \nmid ab(a+b)$$

ولكن بملاحظة أنّ $19\times 18 = 342 = -1 \bmod 7^3$ نرى أنّ

$$a^2+ab+b^2 = (a-18b)(a+19b) \bmod 7^3$$

والشرط $7\nmid b$ يقتضي أنّ $7\nmid(a-18b)$ أو $7\nmid(a+19b)$، (وإلّا استنتجنا أنّ العدد 7 يقسم كِلا هذين العددين، فهو يقسم الفرق بينهما أي $7\mid(37b)$ وهذا يتناقض مع كون 7 أوّلي مع كلٍّ من b و 37.)

وهكذا نستنتج أنّ $7\nmid b$ و $a^2+ab+b^2 = 0 \bmod 7^3$ يقتضي

$$a+19b = 0 \bmod 7^3 \quad \text{أو} \quad a-18b = 0 \bmod 7^3$$

ولأنّ $-19 = 324 \bmod 7^3$، فهذا يُكافئ أنّ

$$a = 324b \mod 7^3 \quad \text{أو} \quad a = 18b \mod 7^3$$

▪ وبالعكس، لنفترض أنّ (a,b) زوجٌ من الأعداد الطبيعيّة، يُحقّق

$$(a = 324b \bmod 7^3 \text{ و } 7 \nmid b) \quad \text{أو} \quad (a = 18b \bmod 7^3 \text{ و } 7 \nmid b)$$

عندئذ نستنتج مباشرة أنّ $7 \nmid a$ وأنّ $7 \nmid (a+b)$، أي $7 \nmid ab(a+b)$ لأنّ العدد 7 عددٌ أوّلي. ويتحقّق كذلك الشرط 2. إذن مجموعة الأزواج (a,b) من الأعداد الطبيعيّة التي تُحقّق الشرطين 1. و 2. هي

$$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 : (7 \nmid b) \wedge ((a = 18b \bmod 7^3) \vee (a = 324b \bmod 7^3))\}$$

وهكذا نرى أنّ الزوجين $(1,18)$ و $(18,1)$ هما حلاّن للمسألة المطروحة، وهما الحلاّن اللذان يعطيان للمجموع $a+b$ أصغر قيمة ممكنة. ■

③ **نتأمّل نقطتين O و A في المستوي. يجري تلوين كلّ نقطة من المستوي بواحدٍ من عددٍ منتهٍ من الألوان. في حالة نقطة M من المستوي، مختلفة عن O، نتأمّل الدائرة $\mathfrak{C}(M)$ التي مركزها O ونصف قطرها يساوي $\rho(M) = OM + \dfrac{1}{OM}\arg(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$، إذْ رمزنا بالرمز $\arg(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ إلى القياس الأساسي من المجال $[0,2\pi[$ للزاوية الموجّهة $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$. أثبت وجود نقطة M خارج المستقيم (OA)، يظهر لونها على الدائرة $\mathfrak{C}(M)$.**

لننسب المستوي إلى جملة متعامدة نظاميّة مبدؤها O، وإحداثيّات النقطة A فيها هي $(1,0)$. ولنطابق بين نقاط المستوي، وحقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$. ولنكتب C_ρ دلالة على الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها ρ.

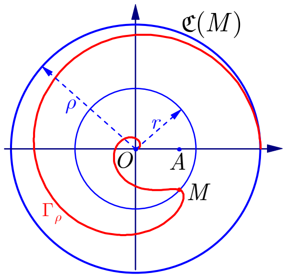
تأتي الفكرة من تعيين مجموعة النقاط $M = re^{i\theta}$ مع $r > 0$ و $\theta \in [0,2\pi[$، التي تُحقّق $\mathfrak{C}(M) = C_\rho$، وذلك في حالة ρ من $\mathbb{R}_+^*$. في الحقيقة

$$\mathfrak{C}(M) = C_\rho \Leftrightarrow r + \frac{\theta}{r} = \rho \Leftrightarrow \theta = r(\rho - r)$$

وعليه إذا عرّفنا، في حالة $\rho < 2\sqrt{2\pi}$، مجموعة النقاط Γ_ρ بالصيغة

$$\Gamma_\rho = \left\{ re^{ir(\rho - r)} : 0 < r \leq \rho \right\}$$

استنتجنا من كون $r(\rho - r) \in [0,2\pi[$ أيّاً كانت r من $]0,\rho]$ أنّ $\mathfrak{C}(M) = C_\rho$ أيّاً كانت M من Γ_ρ.



لتكن $\mathfrak{A}$ مجموعة الألوان التي جرى تلوين نقاط المستوي بها، والتي نفترض أنّها مجموعة منتهية، عندئذ تكون مجموعة أجزائها $P(\mathfrak{A})$ مجموعة منتهية أيضاً. لنرمز بالرمز $\mathfrak{c}(M)$ إلى لون النقطة M من المستوي.

نثبّتُ عدداً موجباً أصغر تماماً من $2\sqrt{2\pi}$، وليكن 5 على سبيل المثال. ثُمّ نتأمّل التطبيق :

$$\Psi :]0,5[\to P(\mathfrak{A}), \Psi(t) = \{\mathfrak{c}(M) : M \in C_t\}$$

الذي يقرن بكلِّ عددٍ t من المجال $]0,5[$ مجموعة ألوان نقاط الدائرة C_t. لمّا كانت المجموعة $P(\mathfrak{A})$ مجموعة منتهية، استنتجنا أنّ التطبيق Ψ لا يمكن أن يكون متبايناً، فلا بُدّ من وجود عددين r و ρ مع $0 < r < \rho$ يُحقّقان $\Psi(r) = \Psi(\rho)$.

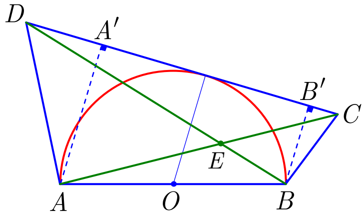
ولكنّ المنحني Γ_ρ يتقاطع مع الدائرة C_r عند النقطة $M = re^{\mathrm{i}r(\rho-r)}$ التي لا تنتمي إلى المستقيم (OA). ويكون

$$\mathfrak{c}(M) \in \Psi(r) = \Psi(\rho) = \{c(P) : P \in \mathfrak{C}(M)\}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ◼

④ **نتأمّل مضلّعاً رُباعيّاً محدّباً $ABCD$، ونفترض أنّ المستقيم (CD) يمسّ الدائرة التي قطرها (AB). أثبت أنّ المستقيم (AB) يمس الدائرة التي قطرها (CD) إذا وفقط إذا كان المستقيمان (BC) و (AD) متوازيين.**

لتكن O منتصف $[AB]$. بملاحظة أنّ بُعد O عن المستقيم (CD) يساوي نصف مجموع AA' و BB' بُعدَيِ النقطتين A و B عن هذا المستقيم، نستنتج أنّ خاصّة كون المستقيم (CD) مماسّاً للدائرة التي قطرها $[AB]$، تُكافئ كون بُعد O عن (CD) مساوياً $\frac{1}{2}AB$، وهذه تُكافئ بدورها أنّ $AA' + BB' = AB$.



لنكتب $\mathcal{A}(XYZ)$ دلالة على مساحة مثلّث XYZ . عندئذ بضرب طرفَي المساواة السابقة بالمقدار $\frac{1}{2}CD$ نرى أنّ الشرط اللازم والكافي ليكون المستقيم (CD) مماسّاً للدائرة التي قطرها $[AB]$، هو أن يكون

$$\mathcal{A}(ACD)+\mathcal{A}(BCD)=\frac{1}{2}AB\cdot CD \qquad (1)$$

لنرمز بالرمز E إلى نقطة تقاطع القطرين $[AC]$ و $[BD]$. عندئذ يُكافئ الفرْض : « المستقيم (CD) مماسٌّ للدائرة التي قطرها $[AB]$ »، المساوةَ

$$\mathcal{A}(AED)+\mathcal{A}(BCE)+2\mathcal{A}(ECD)=\frac{1}{2}AB\cdot CD$$

وبالمُماثلة، يُكافئ الشرط : « المستقيم (AB) مماسٌّ للدائرة التي قطرها $[CD]$ »، المساواةَ

$$\mathcal{A}(AED)+\mathcal{A}(BCE)+2\mathcal{A}(EAB)=\frac{1}{2}AB\cdot CD$$

فإذا افترضنا أنّ المستقيم (CD) مماسٌّ للدائرة التي قطرها $[AB]$، كان المستقيم (AB) أيضاً مماسّاً للدائرة التي قطرها $[CD]$، إذا وفقط إذا كان $\mathcal{A}(ECD)=\mathcal{A}(EAB)$. وهذا يُكافئ قولنا

$$EA\cdot EB=EC\cdot ED \qquad (2)$$

لأنّ الزاويتين $\widehat{CED}$ و $\widehat{AEB}$ متساويتان لتَقابُلهما بالرأس. والمساواة (2) تُكافئ

$$\frac{EA}{EC}=\frac{ED}{EB}$$

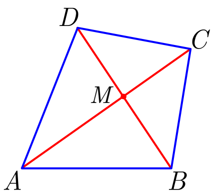
وهذه بدورها تُكافئ تَوازي المستقيمين (AC) و BD وفق مبرهنة تالس. ■

⑤ نتأمّل، في المستوي، مضلّعاً محدّباً ذا n ضلعاً مع $n>3$، وليكن p محيط هذا المضلّع. ثُمّ لنعرّف d بأنّه مجموع أطوال أقطار هذا المضلّع. أثبت أنّ

$$n-3<\frac{2d}{p}<\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor-2$$

إذْ رمزنا $\lfloor x\rfloor$ إلى الجزء الصحيح للعدد x .

❶ لإثبات المتراجحة اليسرى نستفيد من الخاصّة التالية :



« في رباعي محدّب يكون مجموع طولَي القطرين أكبر من مجموع طولَي أيِّ ضلعين متقابلين فيه. »

في الحقيقة، إذا كان $ABCD$ رُباعيّاً محدّباً، وكانت M نقطة تقاطع قطريه $[AC]$ و $[BD]$، استنتجنا من المثلّث MAB أنّ $AB < MA + MB$، ومن المثلّث MCD أنّ $CD < MC + MD$، وبجمع المتراجحتين السابقتين نجد

$$AB + CD < AC + BD$$

وهي المتراجحة المطلوبة.

لنفترض أنّ رؤوس المضلّع، مرتّبة بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة، هي $(A_k)_{0\leq k<n}$، ولنعرّف A_k في حالة $k \notin \{0,1,\ldots,n-1\}$ بأنها النّقطة $A_{k \bmod n}$. وأخيراً لنكتب d_{ij} دلالة على طول القطعة المستقيمة $[A_iA_j]$، ولنكتب ℓ_k دلالة على طول الضلع $[A_kA_{k+1}]$.

- في حالة i من $\{0,1,\ldots,n-1\}$ و j من $\{i+2,\ldots,i+n-2\}$، ننظر في الرباعي المحدّب $A_iA_{i+1}A_jA_{j+1}$، فنستنتج من الخاصّة التي أثبتناها أعلاه أنّ

$$A_iA_j + A_{i+1}A_{j+1} > A_iA_{i+1} + A_jA_{j+1}$$

أو $d_{ij} + d_{i+1,j+1} > \ell_i + \ell_j$. وبجمع هذه المتراجحات نجد

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=i+2}^{i+n-2}(d_{ij} + d_{i+1,j+1})\right) > \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=i+2}^{i+n-2}(\ell_i + \ell_j)\right)$$

ومنه

$$2\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j\notin\{i+1,i-1\}} d_{ij}\right) > \sum_{i=0}^{n-1}\left((n-3)\ell_i + \sum_{j\notin\{i+1,i,i-1\}}\ell_j\right)$$

أو

$$2\sum_{|j-i|\neq 1} d_{ij} > \sum_{i=0}^{n-1}((n-3)\ell_i + p - \ell_{i+1} - \ell_i - \ell_{i-1})$$

وأخيراً

$$4d > (n-3)p + np - p - p - p = 2(n-3)p$$

أو $2d > (n-3)p$ وهي المتراجحة اليسرى المطلوبة.

❷ لنأتِ إلى المتراجحة اليمنى. إنّ طرفَي أي قطرٍ للمضلّع متّصلان بخطّين منكسرين أحدهما مكوّنٌ من r ضلعاً، والآخر مكوّنٌ من $n-r$ ضلعاً من أضلاع المضلّع. فطوله أقصر من مجموع أطوال الخطّ المنكسر المكوّن من العدد الأقلّ، أي $\min(r, n-r)$، من الأضلاع.

▪ حالة $n = 2m+1$. لتكن r من $\{2,\ldots,m\}$، إنّ الأقطار التي يوجد خطٌّ منكسر مؤلّفٌ من r ضلعاً يصل بين طرفيها هي $([A_iA_{i+r}])_{0\le i<n}$ وعددها n. ويكون

$$d_{i,i+r} = A_iA_{i+r} \le \ell_i + \ell_{i+1} + \cdots + \ell_{i+r-1}$$

وعليه

$$\begin{aligned} d &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{r=2}^{m} d_{i,i+r}\right) \le \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{r=2}^{m}(\ell_i + \ell_{i+1} + \cdots + \ell_{i+r-1})\right) \\ &\le \sum_{r=2}^{m} rp = p\left(\frac{m(m+1)}{2} - 1\right) \end{aligned}$$

ومن ثَمّ $\frac{2d}{p} \le m(m+1) - 2 = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor - 2$.

▪ حالة $n = 2m$. لتكن r من $\{2,\ldots,m-1\}$، إنّ الأقطار التي يوجد خطٌّ منكسر مؤلّفٌ من r ضلعاً يصل بين طرفيها هي $([A_iA_{i+r}])_{0\le i<n}$ وعددها n. أمّا في حالة $r = m$ فهذه الأقطار هي $([A_iA_{i+m}])_{0\le i<m}$ وعددها m. ويكون

$$d_{i,i+r} = A_iA_{i+r} \le \ell_i + \ell_{i+1} + \cdots + \ell_{i+r-1}$$

إذن

$$\begin{aligned} d &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{r=2}^{m-1} d_{i,i+r}\right) + \sum_{i=0}^{m-1} d_{i,i+m} \\ &\le \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{r=2}^{m-1}(\ell_i + \ell_{i+1} + \cdots + \ell_{i+r-1})\right) + \sum_{i=0}^{m-1}\frac{p}{2} \\ &\le \frac{mp}{2} + \sum_{r=2}^{m-1} rp = \frac{mp}{2} + p\left(\frac{m(m-1)}{2} - 1\right) \end{aligned}$$

ومن جديد نجد

$$\frac{2d}{p} \le m^2 - 2 = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor - 2$$

وبذا يتمّ إثبات صحة المتراجحة اليمنى. ◼

⑥ **لتكن** a و b و c و d **أعداداً طبيعيّة فرديّة تُحقّق** $0 < a < b < c < d$ و $ad = bc$، **أثبت أنّه إذا وُجد عددان طبيعيّان** k و m **يُحقّقان** $a + d = 2^k$ و $b + c = 2^m$ **كان** $a = 1$.

لنلاحظ أنّ

$$c\left(2^k - 2^m\right) = c(d + a - b - c) = cd + ac - bc - c^2$$
$$= cd + ac - ad - c^2 = (c - a)(d - c) > 0$$

وهذا يقتضي أنّ $2^k > 2^m$.

نستنتج من المساواة $ad = cb$ أنّ $a\left(2^k - a\right) = b(2^m - b)$ ومن ثَمّ

$$(b - a)(b + a) = b^2 - a^2 = 2^m\left(b - 2^{k-m}a\right) \qquad (1)$$

لنفترض أنّ $b - a = 2^r p$ و $b + a = 2^s q$، حيث p و q عددان فرديّان. لمّا كان العدد $b - 2^{k-m}a$ عدداً فرديّاً استنتجنا أنّ $m = r + s$. ولمّا كان $b + a$ و $b - a$ عددين زوجيّين استنتجنا أنّ $r \geq 1$ و $s \geq 1$.

إذا كان $r \geq 2$ و $s \geq 2$، استنتجنا أنّ 4 يقسم $2b = (b + a) + (b - a)$ وهذا يتناقض مع كون b عدداً فرديّاً. إذن يجب أن يكون $r = 1$ أو $s = 1$.

- في حالة $s = 1$ يكون $r = m - 1$، ومن ثَمّ 2^{m-1} يقسم $b - a$، وهذا يقتضي أنّ $b \geq 2^{m-1}$، $c > b$، ومن ثَمّ $2^m = b + c > 2^{m-1} + 2^{m-1}$، وهذا تناقض.
- إذن يجب أن يكون $r = 1$ و $s = m - 1$، وعندها

$$2^m = c + b > a + b = 2^{m-1}q$$

ومن ثَمّ $q < 2$ إذن $q = 1$، وهذا يبرهن أنّ

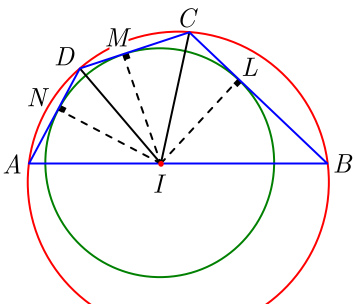
$$a + b = 2^{m-1} \qquad (2)$$

ومن (1) نجد $\left(2^{k-m+1} - 1\right)a = b$، وبالعودة إلى (2) نجد $a = 2^{2m-2-k}$. ولأنّ a عددٌ فردي وجب أن يكون $a = 1$ و $k = 2m - 2$. ويوجد عدد طبيعي n أكبر تماماً من 1 يُحقّق

$$a = 1,\ b = 2^n - 1,\ c = 2^n + 1,\ d = 2^{2n} - 1$$

وبذا يتمّ الإثبات. ■

① **نتأمّل رباعياً دائريّاً** $ABCD$. **ونفترض وجود دائرة مركزها يقع على** $[AB]$ **وتمسّ الأضلاع الثلاثة الأخرى للرباعي. أثبت أنّ** $AD + BC = AB$.



لنفترض أنّ النقطة I من $[AB]$ هي مركز الدائرة المماسّة للأضلاع $[BC]$ و$[CD]$ و $[AD]$، ولتكن L و M و N نقاط التماس مع هذه الأضلاع بالترتيب. ولنسمِّ r نصف قطر هذه الدائرة، و 2θ قياس الزاوية $\widehat{BAD}$، و 2φ قياس الزاوية $\widehat{CBA}$.

- لمّا كان الرباعي $ABCD$ رباعيّاً دائريّاً استنتجنا أنّ $\widehat{DCB} = \pi - 2\theta$ ، ولأنّ (IC) هو منصّفٌ للزاويّة $\widehat{DCB}$ استنتجنا أنّ $\widehat{ICB} = \frac{\pi}{2} - \theta$ ، وأخيراً نستنتج أنّ $\widehat{CIL} = \theta$. ونجد بالمُماثَلة أنّ $\widehat{DIN} = \varphi$.
- من المثلّث القائم ILC نجد $LC = r\tan\theta$ ، ونجد بالمُماثلة $ND = r\tan\varphi$.
- ومن المثلّث القائم BLI نجد $LB = r\cot(2\varphi)$ ، و $IB = \dfrac{r}{\sin 2\varphi}$.
- وكذلك نجد من المثلّث القائم INA أنّ $NA = r\cot 2\theta$ و $IA = \dfrac{r}{\sin 2\theta}$.

ولكن نعلم بوجه عامّ أنّه في حالة $0 < x < \frac{\pi}{2}$ لدينا

$$\frac{1}{\sin 2x} - \cot 2x = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \tan x$$

إذن

$$IA - NA - LC = r\left(\frac{1}{\sin 2\theta} - \cot 2\theta - \tan\theta\right) = 0$$

$$IB - ND - LB = r\left(\frac{1}{\sin 2\varphi} - \cot 2\varphi - \tan\varphi\right) = 0$$

ومنه

$$AB - AD - BC = (IA - NA - LC) + (IB - ND - LB) = 0$$

وهي النتيجة المرجوّة.

② **ليكن n و k عددين طبيعيين أوّليين فيما بينهما ولنفترض أنّ $0 < k < n$. يجري تلوين كلِّ عددٍ من المجموعة $\mathcal{M} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ بأحد اللّونين الأبيض أو الأزرق. ونفترض تحقُّق القاعدتين التاليتين :**

❶ أيّاً كان i من $\mathcal{M}$ كان للعددين i و $n-i$ اللون نفسه.

❷ أيّاً i و k من $\mathcal{M}$، حيث $i \neq k$، كان للعددين i و $|i-k|$ اللّون نفسه.

أثبت أنّ لجميع عناصر المجموعة $\mathcal{M}$ اللون نفسه.

لنعرّف في حالة ℓ من $\mathcal{M}$ المقدار $\varphi(\ell) = k\ell - n\lfloor k\ell/n \rfloor$، أي باقي القسمة الإقليديّة للعدد $k\ell$ على n. نعلم أنه عموماً لدينا $0 \leq \varphi(\ell) < n$، ولكنّ المساواة $\varphi(\ell) = 0$ تعني أنّ العدد n يقسم $k\ell$، ولأنّ $\gcd(k, n) = 1$ نتج من ذلك أنّ n يقسم ℓ وهذا خُلفٌ لأنّ $\ell < n$. إذن $\forall \ell \in \mathcal{M}, \varphi(\ell) \in \mathcal{M}$.

من جهة أخرى، إنّ التطبيق $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ تطبيقٌ متباينٌ، لأنّه إذا كان $\varphi(p) = \varphi(q)$ استنتجنا أنّ n يقسم $k(p-q)$ ولأنّ $\gcd(k, n) = 1$ نتج من ذلك أنّ n يقسم $|p-q|$ وهذا يقتضي أنّ $q = p$ لأنّ $|p-q| < n$. ولكنّ $\mathcal{M}$ مجموعة منتهية، إذن نستنتج من كون التطبيق φ متبايناً أنّه تقابلٌ.

لنتأمّل ℓ من $\mathcal{M}$ مع $\ell < n-1$. لمّا كان $k\ell = \varphi(\ell) + q_\ell n$ استنتجنا أنّ

$$k(\ell+1) = \varphi(\ell) + k + q_\ell n$$

إذن في حالة $k + \varphi(\ell) < n$ يكون

$$\varphi(\ell+1) = \begin{cases} k + \varphi(\ell) & : \ k + \varphi(\ell) < n \\ k + \varphi(\ell) - n & : \ k + \varphi(\ell) \geq n \end{cases}$$

وهذا يبرهن على أنّ

$$|\varphi(\ell+1) - k| \in \{\varphi(\ell), n - \varphi(\ell)\}$$

إذن عملاً بالخاصة ❷ يكون للعدد $\varphi(\ell+1)$ لون $\varphi(\ell)$ أو لون $n - \varphi(\ell)$، ولكن لهذين العدين اللّون نفسه استناداً إلى ❶، إذن للعددين $\varphi(\ell+1)$ و $\varphi(\ell)$ اللّون نفسه. وعليه يكون لجميع أعداد المجموعة $\{\varphi(1), \varphi(2), \ldots \varphi(n-1)\}$، وهي كامل $\mathcal{M}$، اللّون نفسه. وبذا يتمّ الإثبات. ■

③ في حالة كثير حدود $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ أمثاله أعدادٌ صحيحة، ($P\in\mathbb{Z}[X]$) نرمز بالرمز $o(P)$ إلى عدد الأمثال الفرديّة في P، أي

$$o(P)=\operatorname{card}(\{k\in\mathbb{N}:a_k=1 \bmod 2\})$$

نتأمّل المتتالية $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathbb{Z}[X]$ المعرّفة بالصيغة $Q_n=(1+X)^n$. أثبت أنّه أيّاً كان التابع المتزايد تماماً $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$، وأيّاً كان العدد m من $\mathbb{N}$، كان

$$o\left(\sum_{k=0}^{m} Q_{\varphi(k)}\right)\geq o\left(Q_{\varphi(0)}\right)$$

- لنبدأ بالملاحظة التالية :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad (1+X)^{2^n}=1+X^{2^n} \bmod 2$$

في الحقيقة، هذه الخاصّة صحيحة وضوحاً في حالة $n=0$. وإذا افترضنا صحّتها في حالة n استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}(1+X)^{2^{n+1}}&=\left((1+X)^{2^n}\right)^2=\left(1+X^{2^n}\right)^2 \bmod 2\\ &=1+2X^{2^n}+X^{2^{n+1}} \bmod 2=1+X^{2^{n+1}} \bmod 2\end{aligned}$$

نستنتج إذن أنّ $\forall n\in\mathbb{N}, o(Q_{2^n})=2$.

- لنعرّف الخاصّة $\mathbb{P}_k$ التالية :

» أياً كان التابع المتزايد تماماً $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$، وأيّاً كان العدد m من $\mathbb{N}$، إذا كان $\varphi(m)\leq k$ تحقّقت المتراجحة $(\mathcal{E})$ التالية

$o\left(\sum_{i=0}^{m} Q_{\varphi(i)}\right)\geq o\left(Q_{\varphi(0)}\right)$. «

لنبرهن صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_k$ بالتدريج على العدد k.

- في حالة $\varphi(m)=0$، يكون $m=0$ فالخاصّة $\mathbb{P}_0$ صحيحة وضوحاً.
- وفي حالة $\varphi(m)\leq 1$، إمّا أن يكون $\varphi(0)=0$ و $\varphi(1)=1$ و $m=1$، وعندئذ

$$\sum_{i=0}^{m} Q_{\varphi(i)}=Q_0+Q_1=2+X \quad \text{و} \quad Q_{\varphi(0)}=1$$

والمتراجحة $(\mathcal{E})$ محقّقة.

وإمّا أن يكون $\varphi(0)=1$ و $m=0$ والمتراجحة $(\mathcal{E})$ محقّقة أيضاً. وبذا نكون قد أثبتنا صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_1$.

▫ لنفترض صحّة الخاصة $\mathbb{P}_j$ في حالة j أصغر تماماً من k، ولنثبت صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_k$. نتأمّل تابعاً متزايداً تماماً $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$، وعدداً طبيعيّاً m. إذا كان $\varphi(m) < k$ تحقّقت المتراجحة $(\mathcal{E})$ لأنّ $\mathbb{P}_{\varphi(m)}$ صحيحة استناداً إلى فرْض التدريج. علينا إذن إثبات صحّة المتراجحة $(\mathcal{E})$ في حالة $\varphi(m) = k$، وهذا ما سنفترضه فيما يلي. لنعرّف العدد n بالصيغة $n = \lfloor \log_2 k \rfloor$. فيكون $2^n \leq k < 2^{n+1}$، ولنكتب اختصاراً Q دلالة على كثير الحدود $\sum_{i=0}^{m} Q_{\varphi(i)}$. وهنا نناقش حالتين :

☝ حالة $\varphi(0) \geq 2^n$. في هذه الحالة يكون

$$Q_{\varphi(0)} = (1+X)^{2^n} A(X) \quad \text{و} \quad Q = (1+X)^{2^n} B(X)$$

مع

$$A(X) = Q_{\varphi(0)-2^n}(X) \quad \text{و} \quad B(X) = \sum_{i=0}^{m} Q_{\varphi(i)-2^n}(X)$$

بتطبيق الخاصّة $\mathbb{P}_{k-2^n}$ في حالة التطبيق المتزايد تماماً $i \mapsto \varphi(i) - 2^n$ والعدد m نستنتج أنّ $o(A) \leq o(B)$. ولكن

$$Q(X) = B(X) + X^{2^n} B(X) \mod 2$$
$$Q_{\varphi(0)}(X) = A(X) + X^{2^n} A(X) \mod 2$$

ولمّا كان

$$\deg A = \varphi(0) - 2^n \leq \varphi(m) - 2^n = k - 2^n < 2^n$$
$$\deg B = \varphi(m) - 2^n = k - 2^n < 2^n$$

استنتجنا مما سبق المتراجحة $(\mathcal{E})$ المرجوّة لأنّ

$$o(Q) = 2o(B) \geq 2o(A) = o\left(Q_{\varphi(0)}\right)$$

✌ حالة $\varphi(0) < 2^n$. في هذه الحالة نعرّف العدد r بالعلاقة

$$r = \max\{ j : \varphi(j) < 2^n \}$$

فيكون $\varphi(r) < 2^n \leq \varphi(r+1) \leq \varphi(m) = k$. وعندئذ يمكننا أن نكتب

$$Q = \underbrace{\sum_{i=0}^{r} Q_{\varphi(i)}}_{A} + (1+X)^{2^n} \underbrace{\sum_{i=r+1}^{m} Q_{\varphi(i)-2^n}}_{B}$$

ويكون $\deg A < 2^n$ و $\deg B < 2^n$. و $Q = \left(A + B + X^{2^n} B\right) \mod 2$.

لمّا كانت الخاصّة $\mathbb{P}_r$ صحيحة استناداً إلى فرْض التدريج استنتجنا مباشرة أنّ

$$o\left(Q_{\varphi(0)}\right) \leq o(A) \qquad (1)$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$o(Q) = o\left(A + B + X^{2^n} B\right) = o(A+B) + o(B)$$

لأنّ $\deg(A+B) < 2^n$. ولكن بالاستفادة من الخاصّة العامّة

$$o(R+S) \leq o(R) + o(S)$$

يمكننا أن نكتب

$$o(A) = o(A+2B) = o(A+B+B) \leq o(A+B) + o(B)$$

إذن

$$o(A) \leq o(Q) \qquad (2)$$

ومن (1) و (2) نستنتج صحّة المتراجحة $(\mathcal{E})$ في هذه الحالة أيضاً، ويتمّ $\mathbb{P}_k$.

بالنتيجة، لقد أثبتنا صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_k$ أيّاً كانت قيمة k، وهذا يبرهن على صحّة النتيجة المطلوبة.

وبذا يتمّ الإثبات. ◼

④ نُعطى مجموعة $\mathcal{M}$ مكوّنة من أعددٍ طبيعيّة موجبة تماماً ومتباينة عددها 1985. ونفترض أنّ أيّاً منها لا يقبل قواسم أوليّة أكبر من 23. أثبت أنّ $\mathcal{M}$ تحوي أربعة أعدادٍ جداءُ ضربها يساوي قوّة رابعة لعدد طبيعي.

سنثبتُ الخاصّة العامّة التالية :

> « لتكن $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ مجموعة من الأعداد الأوّلية عدد عناصرها n.
> ولتكن $\mathcal{M}$ مجموعة مكوّنة من أعددٍ طبيعيّة موجبة تماماً ومتباينة، عدد عناصرها $3 \cdot 2^n + 1$. نفترض أنّ مجموعة القواسم الأوّليّة لأيٍّ من عناصر $\mathcal{M}$ محتواة في $\mathcal{P}$.
> عندئذ لا بُدّ أن تحوي $\mathcal{M}$ أربعة أعدادٍ جداءُ ضربها يساوي قوّة رابعة لعدد طبيعي. »

وعندئذ نحصل على النتيجة المطلوبة لأنّه في حالتنا $\mathcal{P}$ هي المجموعة

$$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$$

التي عدد عناصرها $n = 9$، ولدينا $1985 > 3 \cdot 2^9 + 1 = 1537$.

- في حالة عددٍ طبيعي n وعددٍ أوليّ p، نكتب $\nu_p(n)$ دلالة على أكبر أسّ للعدد p يقسم n، أي

$$\nu_p(n) = \max\{\alpha \in \mathbb{N} : p^\alpha \mid n\}$$

كما نعرّف في حالة عددٍ طبيعي m المقدار

$$\psi_0(m) = m \bmod 2 = m - 2\lfloor m/2 \rfloor$$

- لتكن $\mathcal{M}^{(2)}$ مجموعة المجموعات الجزئيّة من $\mathcal{M}$ المكوّنة من عنصرين. في حالة A من $\mathcal{M}^{(2)}$، مثلاً $A = \{a,b\}$، نكتب $\pi(A)$ دلالة على جداء الضرب ab. ثُمّ نتأمّل جزءاً $\mathcal{N}$ من $\mathcal{M}^{(2)}$ يُحقّق الخواص التالية :

1. أيّاً كان A و B من $\mathcal{N}$ إذا كان $B \neq A$ كان $A \cap B = \varnothing$.
2. وعند كلِّ جزءٍ A من $\mathcal{N}$ يكون المقدار $\pi(A)$ مربّعاً كاملاً.
3. عدد عناصر $\mathcal{N}$ أعظمي بين جميع الأجزاء التي تُحقّق الشرطين السابقين.

من حيث المبدأ لا يوجد ما يمنع أن يكون $\mathcal{N} = \varnothing$، لنفترض أنّ $\operatorname{card}(\mathcal{N}) \leq 2^n$. عندئذ $\operatorname{card}(\cup_{A\in\mathcal{N}} A) \leq 2\cdot 2^n$، ومن ثَمّ إذا عرّفنا $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}\backslash(\cup_{A\in\mathcal{N}} A)$ كان لدينا

$$\operatorname{card}(\mathcal{M}_1) \geq 3\cdot 2^n + 1 - 2\cdot 2^n \geq 2^n + 1$$

وعليه لا يمكن أن يكون التطبيق

$$\Phi_0 : \mathcal{M}_1 \to \{0,1\}^n, k \mapsto \left(\psi_0\left(\nu_{p_1}(k)\right), \ldots, \psi_0\left(\nu_{p_n}(k)\right)\right)$$

متبايناً، فيوجد، في $\mathcal{M}_1$، عددان مختلفان a و b يُحقّقان $\Phi_0(a) = \Phi_0(b)$، وهذا يجعل جداء الضرب ab مربّعاً كاملاً، وتُحقّق المجموعة $\widetilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \cup \{a,b\}$ الشرطين 1. و 2. وهذا يناقض الشرط 3. إذن لا بُدَّ أن يكون $\operatorname{card}(\mathcal{N}) \geq 2^n + 1$.

إذن لا يمكن أن يكون التطبيق

$$\Phi_1 : \mathcal{N} \to \{0,1\}^n, A \mapsto \left(\psi_0\left(\nu_{p_1}\left(\sqrt{\pi(A)}\right)\right), \ldots, \psi_0\left(\nu_{p_n}\left(\sqrt{\pi(A)}\right)\right)\right)$$

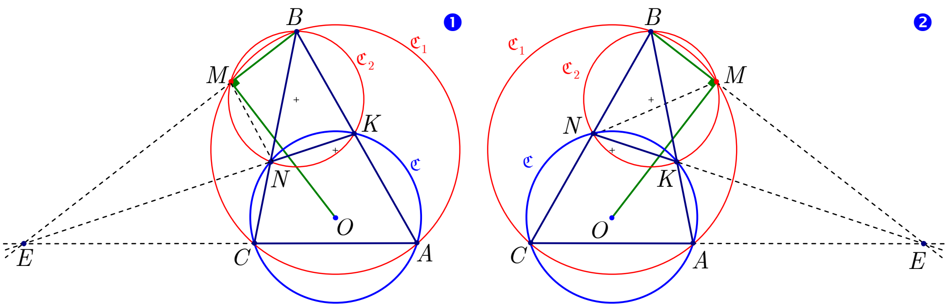
متبايناً، فتوجد، في $\mathcal{N}$، مجموعتان مختلفتان $A = \{a,b\}$ و $B = \{c,d\}$ تُحقّقان

$$\Phi_1(A) = \Phi_1(B)$$

وهذا يجعل جداء الضرب $abcd = \pi(A)\pi(B)$ قوّة رابعة لعدد طبيعي. وبذا يتم إثبات الخاصّة المرجوّة. ◼

⑤ **نتأمّل مثلّثاً ABC، ودائرة $\mathfrak{C}$ مركزها O وتمرّ بالرأسين A و C، وتتقاطع مجدّداً مع الضلعين $[AB]$ و $[BC]$ في K و N بالترتيب. تتقاطع الدائرتان المارّتان برؤوس المثلّثين ABC و KBN بنقطتين مختلفتين B و M. أثبت أنّ الزاوية $\widehat{OMB}$ زاوية قائمة.**

لنرمز بالرمز $\mathfrak{C}_1$ إلى الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC وبالرمز $\mathfrak{C}_2$ إلى الدائرة المارّة برؤوس المثلّث KBN. نذكّر أنّ المحور الأساسي لدائرتين متقاطعتين هو المستقيم المارّ بنقطتي التقاطع، وهو مجموعة النقاط التي قوّتها بالنسبة إلى الدائرة الأولى تساوي قوّتها بالنسبة إلى الدائرة الثانية.



إنّ المستقيم (CA) هو المحور الأساسي للدائرتين $\mathfrak{C}$ و $\mathfrak{C}_1$، والمستقيم (NK) هو المحور الأساسي للدائرتين $\mathfrak{C}$ و $\mathfrak{C}_2$. لو كان المستقيمان (CA) و (NK) متوازيين لكانت النقطة M منطبقة على B وهذا يُخالف الفرْض. إذن يتقاطع المستقيمان (CA) و (NK) في نقطة، ولتكن E. ولمّا كان للنقطة E القوّة نفسها بالنسبة إلى الدوائر الثلاث $\mathfrak{C}$ و $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$، استنتجنا أنّ E تقع أيضاً على المحور الأساسي (BM) للدائرتين $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$.

لنبرهن أنّ الرباعي $ECNM$ رباعيٌّ دائريّ. هناك وضعان علينا معالجتهما.

- الحالة ❶. في هذه الحالة لدينا

$$\widehat{EMN} = \pi - \widehat{NMB} \overset{(1)}{=} \widehat{BKN} \overset{(2)}{=} \widehat{ACN} = \pi - \widehat{NCE}$$

- الحالة ❷. في هذه الحالة لدينا

$$\widehat{NME} = \pi - \widehat{BMN} \overset{(1)}{=} \pi - \widehat{BKN} = \widehat{NKA} \overset{(2)}{=} \pi - \widehat{ECN}$$

إذ تنتج المساواة (1) من كون الرباعي $BMNK$ دائرياً، وتنتج المساواة (2) من كون الرباعي $KNCA$ دائرياً أيضاً. ومن المساواتين الناتجتين نستنتج أنّ $ECNM$ هو رباعي دائري أيضاً.

- من الرباعي الدائري $KBMN$ نستنتج أنّ $EN \cdot EK = EM \cdot EB$. ولأنّ $EN \cdot EK$ يساوي قوّة E بالنسبة إلى الدائرة $\mathfrak{C}$ استنتجنا أنّ $EN \cdot EK$ يساوي $OE^2 - ON^2$، ومنه

$$EM \cdot EB = OE^2 - ON^2 \qquad (*)$$

- وكذلك، من الرباعي الدائري $ECNM$ نستنتج أنّ $BN \cdot BC = BM \cdot BE$. ولأنّ $BN \cdot BC$ يساوي قوّة B بالنسبة إلى الدائرة $\mathfrak{C}$ استنتجنا أنّ $BN \cdot BC$ يساوي $OB^2 - ON^2$، ومنه

$$BM \cdot EB = OB^2 - ON^2 \qquad (**)$$

وعليه بطرح المساواتين $(*)$ و $(**)$ وملاحظة أنّ $EB = EM + MB$، نستنتج أنّ

$$(EM - BM) \cdot (EM + BM) = OE^2 - OB^2$$

أو

$$ME^2 - MB^2 = OE^2 - OB^2$$

تُكتب هذه المساواة شعاعيّاً بالشكل

$$\left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MB}\right) = \left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB}\right)$$

وهذا يُكافئ

$$\left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \overrightarrow{BE} = \left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OB}\right) \cdot \overrightarrow{BE}$$

ولكن

$$\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OB}$$

إذن نستنتج مما سبق أنّ

$$\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$$

وهذا يُكافئ القول $\widehat{OMB} = \frac{\pi}{2}$ وهي النتيجة المرجوّة. ■

⑥ انطلاقاً من عددٍ حقيقيٍّ x نعرّف المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ تدريجيّاً بالعلاقة

$$x_1 = x, \quad \forall n \geq 1, \; x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$$

أثبت أنّه توجد قيمة وحيدة للعدد x يتحقّق عندها الشرط

$$\forall n \geq 1, \quad 0 < x_n < x_{n+1} < 1$$

لنتأمّل متتالية كثيرات الحدود $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرّفة تدريجيّاً كما يلي :

$$P_0(X) = X, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(X) = P_{n-1}(X)\left(P_{n-1}(X) + \frac{1}{n}\right)$$

نرى مباشرة، بالتدريج على العدد n، أنّ أمثال P_n أعداد حقيقيّة موجبة، وعلى هذا يكون P_n متزايداً تماماً على $\mathbb{R}_+$. كما إنّه من الواضح أنّ $P_n(0) = 0$ أيّاً كانت قيمة n. ومن جهة أخرى نتيقّن مباشرة أنّ $P_n(1) > 1$ أيّاً كانت قيمة n من $\mathbb{N}^*$. إذن مهما كانت قيمة n من $\mathbb{N}^*$ فيوجد زوجٌ وحيدٌ (a_n, b_n) من الأعداد الحقيقيّة من المجال $[0,1]$ يُحقّق

$$P_n(b_n) = 1 \quad \text{و} \quad P_n(a_n) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

ولأنّ P_n متزايدٌ تماماً يكون $a_n < b_n$.

من جهة أخرى، نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} P_{n+1}(a_n) &= P_n(a_n)\left(P_n(a_n) + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} < 1 - \frac{1}{n+2} = P_{n+1}(a_{n+1}) \end{aligned}$$

وهذا يُثبتُ أنّ $a_n < a_{n+1}$, وكذلك فإنّ

$$\begin{aligned} P_{n+1}(b_n) &= P_n(b_n)\left(P_n(b_n) + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n+1} > 1 = P_{n+1}(b_{n+1}) \end{aligned}$$

وهذا بدوره يُثبتُ أنّ $b_n > b_{n+1}$. إذن لقد أثبتنا أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \le 1$$

وأخيراً، لأنّ أمثال كثيرات الحدود $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ موجبة استنتجنا أنّ $t \mapsto P_n(t)$ تابعٌ محدّبٌ على المجال $[0,1]$ فمنحنيه يقع تحت الوتر المار بالنقطتين $(0,0)$ و $(b_n, 1)$ ومنه

$$\forall t \in [0,1], \quad P_n(t) \le \frac{t}{b_n}$$

وبوجه خاص، عند $t = a_n$ نجد $1 - \dfrac{1}{n+1} \le \dfrac{a_n}{b_n}$ أو

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le b_n - a_n \le \frac{b_n}{n+1} \le \frac{1}{n+1}$$

وهذا يبرهن على أنّ $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

إذن لقد أثبتنا أنّه يوجد عددٌ حقيقي وحيد ℓ هو النهاية المشتركة للمتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$، وهو يُحقّق

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le a_n < a_{n+1} < \ell < b_{n+1} < b_n \le 1$$

لنأتِ الآن إلى المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرّفة في نصّ المسألة، عندئذ نرى مباشرة أنّ

$$\forall n \ge 1, \quad x_n = P_{n-1}(x)$$

- لنفترض أنّه مهما تكن n لدينا $0 < x_n < x_{n+1} < 1$. عندئذ نستنتج من ذلك مباشرة أنّه لا بُدّ أن يكون $0 < x < 1$.

  ولأنّ P_n متزايِد تماماً على $\mathbb{R}_+$ استنتجنا من المتراجحة $0 < x_{n+1} < 1$ أنّ

$$0 < \overbrace{P_n(x)}^{x_{n+1}} < \overbrace{P_n(b_n)}^{1}$$

  ومنه $\forall n \ge 1, x < b_n$.

  ومن جهة أخرى، لأنّ $x_n > 0$ نستنتج من $x_n < x_{n+1}$ أنّ $x_n > 1 - \dfrac{1}{n}$، أو

$$\overbrace{P_{n-1}(a_{n-1})}^{1-1/n} < \overbrace{P_{n-1}(x)}^{x_n}$$

  ومنه $\forall n \ge 1, a_n < x$.

  إذن لقد أثبتنا أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n < x < b_n$$

  وهذا يقتضي، بجعل n تسعى إلى اللانهاية، أنّ $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$.

- وبالعكس، إذا كانت $x = \ell$. استنتجنا من المتراجحة

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n-1} < \ell < b_{n-1}$$

بالاستفادة من كون P_{n-1} متزايداً على $\mathbb{R}_+$ أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - \frac{1}{n} < x_n < 1$$

وهذا يقتضي أنّ $1 < x_n + \dfrac{1}{n}$ و $0 < x_n$ و $x_{n+1} < 1$ ومنه

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1$$

وهذا يُثبتُ الخاصّة المطلوبة. ∎

① **ليكن d عدداً طبيعيّاً موجباً تماماً ومختلفاً عن الأعداد 2 و 5 و 13. أثبت أنّه يوجد عددان مختلفان a و b من المجموعة $\{2,5,13,d\}$ يُحقّقان أنّ $ab-1$ ليس مربّعاً كاملاً.**

علينا أن نثبت أنّه من غير الممكن أن تكون الأعداد $2d-1$ و $5d-1$ و $13d-1$ مربّعات كاملة في آن معاً.

لإثبات ذلك سنحاول النظر إلى المسألة بالقياس لعددٍ m نختاره على نحوٍ جيِّدٍ. يجب أن نختار m لتكون كثافة المربّعات بالقياس m في المجموعة $\{0,1,\ldots,m-1\}$ صغيرة إلى درجة كافية. في الحقيقة، نجد بالتجربة أنّ العدد $m=16$ هو أوّل عددٍ يجعل كثافة هذه المربّعات أصغر تماماً من $\frac{1}{3}$. إذ إنّ

$$Q_{16}=\left\{k^2 \bmod 16 : k\in\mathbb{Z}\right\}=\{0,1,4,9\}$$

فلو افترضنا أنّ $2d-1$ مربعٌ كاملٌ استنتجنا أنّ

$$(2d-1) \bmod 16 \in \{0,1,4,9\}$$

وهذا يكافئ $(2d) \bmod 16 \in \{2,10\}$ أو

$$d \bmod 16 \in \{1,5,9,13\}$$

وعندئذ يكون

$d \bmod 16$	$(5d-1) \bmod 16$	$(13d-1) \bmod 16$
1	4	12
5	8	0
9	12	4
13	0	8

فإمّا أن يكون $d \bmod 16 \in \{5,9\}$ وعندها لا يكون $5d-1$ مربّعاً كاملاً، وإمّا أن يكون $d \bmod 16 \in \{1,13\}$ وعندها لا يكون $13d-1$ مربّعاً كاملاً. فلا يمكن أن تكون الأعداد $2d-1$ و $5d-1$ و $13d-1$ مربّعات كاملة في آن معاً. ◼

② **نتأمّل في المستوي مثلّثاً $A_1A_2A_3$ ، ونقطة P_0 . نضع بالتعريف $A_n = A_{n-3}$ في حالة n أكبر أو تساوي 4 . ننشئ متتالية النقاط $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تدريجيّاً على الوجه التالي : P_{n+1} هي صورة P_n وفق الدوران المباشر الذي مركزه A_{n+1} وزاويته $\frac{2\pi}{3}$. أثبت أنّه إذا كان $P_{1986} = P_0$ كان المثلّث $A_1A_2A_3$ متساوي الأضلاع.**

سنطابق بين نقاط المستوي ومجموعة الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$ ، ونعرّف $\mathrm{j} = \exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}\right)$. استناداً إلى الفرْض لدينا

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = A_{n+1} + \mathrm{j}(P_n - A_{n+1})$$

إذن، في حالة n من $\mathbb{N}$ ، لدينا

$$\begin{aligned} P_{3n+1} &= (1-\mathrm{j})A_1 + \mathrm{j}P_{3n} \\ P_{3n+2} &= (1-\mathrm{j})A_2 + \mathrm{j}P_{3n+1} \\ P_{3n+3} &= (1-\mathrm{j})A_3 + \mathrm{j}P_{3n+2} \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} P_{3n+3} &= (1-\mathrm{j})A_3 + \mathrm{j}((1-\mathrm{j})A_2 + \mathrm{j}((1-\mathrm{j})A_1 + \mathrm{j}P_{3n})) \\ &= (1-\mathrm{j})\left(A_3 + \mathrm{j}A_2 + \mathrm{j}^2 A_1\right) + P_{3n} \end{aligned}$$

وهذا يتيح لنا أن نستنتج، بالتدريج على العدد n، ما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{3n} = n(1-\mathrm{j})\left(A_3 + \mathrm{j}A_2 + \mathrm{j}^2 A_1\right) + P_0$$

وعلى هذا، نرى أنّه يوجدُ عددٌ m من $\mathbb{N}^*$ ، يُحقّق $P_{3m} = P_0$ إذا وفقط إذا كان

$$A_3 + \mathrm{j}A_2 + \mathrm{j}^2 A_1 = 0$$

ولأنّ $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$ استنتجنا أنّ الشرط السابق يُكافئ

$$A_3 = A_2 + e^{\mathrm{i}\pi/3}(A_1 - A_2)$$

أي إنّ A_3 هي صورة A_1 وفق الدوران الذي مركزه A_2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$. فالمثلّث $A_1A_2A_3$ مثلّثٌ متساوي الأضلاع. إذن

$$\left(\exists m \in \mathbb{N}^*, \quad P_{3m} = P_0\right) \Rightarrow (A_1A_2A_3 \text{ مثلّثٌ متساوي الأضلاع})$$

والمسألة المطروحة توافق حالة $m = 662$ لأنّ $3 \times 662 = 1986$.

③ **نقرن بكلِّ رأسٍ من رؤوس مخمّس منتظمٍ عدداً صحيحاً، على أن يكون مجموع هذه الأعداد موجباً تماماً. في حالة ثلاثة رؤوس متتالية، الأعداد المقترنة بها هي x و y و z بالترتيب، يمكن في حالة $y < 0$ استبدال الأعداد $x+y$ و $-y$ و $y+z$ بهذه بالأعداد بالترتيب. يجرى تكرار هذا التحويل طالما بقيت رؤوسٌ مقترن بها أعداد سالبة. بيّن إذا كانت هذه الإجرائيّة تتوقّف بعد عدد منتهٍ من المراحل.**

لنرمز بالرمز x_i إلى العدد المقرون بالرأس i مع $0 \leq i \leq 4$. الفكرة الأساس هي في إيجاد مقياس موجبٍ يتناقص تماماً عند تطبيق التحويل المشار إليه. لعلّ المقدار التالي هو المناسب

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=0}^{4} x_i^2 + \sum_{i=0}^{4} (x_i + x_{i+1})^2$$

مع الاصطلاح $x_i = x_{i \bmod 5}$. لنتأمّل التحويلين

$$\begin{aligned}
\rho &: \mathbb{Z}^5 \to \mathbb{Z}^5, (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4, x_0) \\
s &: \mathbb{Z}^5 \to \mathbb{Z}^5, (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_0, x_0 + x_1, x_2, x_3, x_4 + x_0)
\end{aligned}$$

فيكون التحويل الذي نجريه على الأعداد المقرونة برؤوس المخمّس في حالة كون $x_i < 0$ هو $\tau_i = \rho^{-i} \circ s \circ \rho^i$.

من الواضح أنّ $F \circ \rho = F$. وإذا عرّفنا $\Delta = (F - F \circ s)(x_0, \ldots, x_4)$ كان

$$\begin{aligned}
\Delta &= (x_1 + x_2)^2 - (x_0 + x_1 + x_2)^2 + (x_3 + x_4)^2 - (x_3 + x_4 + x_0)^2 \\
&= (2x_1 + 2x_2 + x_0)(-x_0) + (2x_3 + 2x_4 + x_0)(-x_0) \\
&= -2x_0(x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4)
\end{aligned}$$

وعليه، لمّا كان المقدار $\mathcal{S} = \sum_{i=0}^{4} x_i$ لا يتغيّر عند تطبيق التحويل ρ استنتجنا مما سبق أنّ

$$(F - F \circ \tau_i)(x_0, \ldots, x_4) = (F - F \circ s) \circ \rho^i (x_0, \ldots, x_4) = -2x_i \times \mathcal{S}$$

ولمّا كان $\mathcal{S} > 0$، والتحويل τ_i يُطبّق فقط في حالة $x_i < 0$ استنتجنا أنّ

$$F(x_0, \ldots, x_4) > F \circ \tau_i(x_0, \ldots, x_4)$$

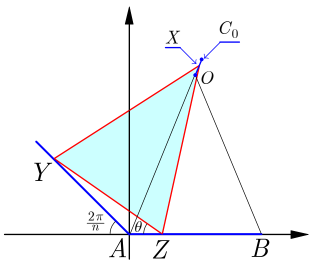
وعليه بعد تطبيق التحويلات $(\tau_i)_{0 \leq i \leq 4}$ عدداً منتهياً لا يزيد عن $F(x_0, \ldots, x_4)$ من المرّات لا بُدّ أن نصل إلى وضع تكون فيه جميع الأعداد المقرونة برؤوس المخمّس موجبة. ◼

④ ليكن A و B رأسين متتاليين من رؤوس مضلّعٍ منتظمٍ له n ضلعاً، مع $n \geq 5$، ومركزه O. XYZ مثلّثٌ طبوقٌ على OAB، ويتحرّك في المستوي انطلاقاً من وضعٍ بدءٍ كان فيه منطبقاً على OAB، فترسم النقطتان Y و Z محيط المضلّع، وتبقى X داخله. أوجد المحلّ الهندسي للنقطة X.

ليكن $\mathcal{R}$ الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{n}$. وليكن $\mathcal{C}_0$ الجزء من المحلّ الهندسي المطلوب الموافق لحركة Z على الضلع $[AB]$ من B إلى A، (وعندها ترسم Y الضلع الذي يسبق $[AB]$، بدءاً من A.)فيكون المحلّ الهندسي المطلوب هو $\bigcup_{0\leq k<n} \mathcal{R}^k(\mathcal{C}_0)$ = $\mathcal{C}$. وعلينا إذن تعيين $\mathcal{C}_0$.

لنطابق بين نقاط المستوي وحقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$، ولنفترض أنّ $1 + \mathrm{i}\cot(\frac{\pi}{n})$ و 0 و 2 تمثّل النقاط O و A و B بالترتيب. إذ افترضنا، دون الإقلال من العموميّة أنّ $AB = 2$.

عندئذ يمثّل العدد z من المجال $[0,2]$ الرأس Z. أمّا الرأس Y فيمثّله العدد y الذي يُعطى بالصيغة $z - 2e^{-\mathrm{i}\theta}$، مع θ من المجال $[0, \frac{2\pi}{n}]$. ويرتبط العددان z و θ بالعلاقة



$$\frac{2}{\sin(\frac{2\pi}{n})} = \frac{z}{\sin(\frac{2\pi}{n} - \theta)}$$

التي تنتج من علاقة الجيب في المثلّث AZY :

$$\frac{YZ}{\sin \widehat{ZAY}} = \frac{AZ}{\sin \widehat{AYZ}}$$

الرأس X ينتج من دوران V منتصف $[YZ]$ حول Z بزاوية $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$، متبوعاً بتحاكٍ مركزه Z ونسبته $\frac{1}{\sin(\pi/n)}$. فالعدد x الذي يمثّل الرأس X يُحقّق

$$\begin{aligned}
x &= z - \frac{\mathrm{i}\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}}{\sin(\frac{\pi}{n})}\left(\frac{y+z}{2} - z\right) = z + \frac{\mathrm{i}\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}}{\sin(\frac{\pi}{n})} e^{-\mathrm{i}\theta} \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{n})}\left(\frac{\sin(\frac{2\pi}{n} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{n})} + \mathrm{i}\, e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{n} - \theta)}\right) \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{n})}\left(\frac{\sin(\frac{2\pi}{n} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{n})} - \sin(\frac{\pi}{n} - \theta) + \mathrm{i}\cos(\frac{\pi}{n} - \theta)\right)
\end{aligned}$$

وأخيراً

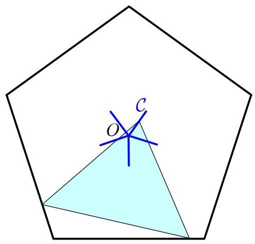
$$x=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{n})}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\cos(\frac{\pi}{n})}+\mathrm{i}\right)\cos(\tfrac{\pi}{n}-\theta)=\frac{2e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})}}{\sin(\frac{2\pi}{n})}\cos(\tfrac{\pi}{n}-\theta)$$

ومنه، عندما تتحوّل θ في المجال $[0,\frac{2\pi}{n}]$ ترسم النقطة X القطعة المستقيمة $[OC_0]$ إذ يمثل العدد $\frac{e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})}}{\sin(\frac{\pi}{n})}$، (الموافق لقيمة $\theta=0$ أو $\theta=\frac{2\pi}{n}$) النقطة O، ومن جهة أخرى، يمثّل العدد $\frac{e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})}}{\sin(\frac{\pi}{n})}\times\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{n})}$ (الموافق لقيمة $\theta=\frac{\pi}{n}$) النقطة C_0. وهكذا نرى أنّ

$$\overrightarrow{OC_0}=\left(\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{n})}-1\right)\overrightarrow{AO}$$

فعندما تتحوّل Z من B إلى M منتصف $[AB]$، ترسم النقطة X القطعة المستقيمة $[OC_0]$ ذهاباً من O إلى C_0، وعندما تتابع Z من M إلى A ترسم النقطة X القطعة المستقيمة $[OC_0]$ إياباً من C_0 إلى O، ويكون $\mathcal{C}_0=[OC_0]$. أمّا المحلّ الهندسي $\mathcal{C}$ فهو اجتماع القطع المستقيمة $\bigcup_{0\le k<n}\mathcal{R}^k([OC_0])$، التي طول كلٍّ منها $\frac{1-\cos(\frac{\pi}{n})}{\sin(\frac{2\pi}{n})}AB$.

يبيِّن الشكل التالي الحالة الخاصّة الموافقة لقيمة $n=5$.



وبذا يتمّ إثبات المطلوب. ◪

⑤ أوجد جميع التوابع f المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة $\mathbb{R}_+$، وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}_+$، وتُحقّق الشروط التالية :

❶ $f(2)=0$.

❷ $\forall x\in[0,2[,\quad f(x)\neq 0$.

❸ $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2,\quad f(xf(y))f(y)=f(x+y)$.

ليكن $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ تابعاً يُحقّق الشروط ❶ و ❷ و ❸ .

- أيّاً كان x من $\mathbb{R}_+$، كان $f(x+2)=f(xf(2))f(2)=0$ وذلك بناءً على الخاصّتين ❸ و ❶ . وعلى هذا

$$\forall x\geq 2,\quad f(x)=0 \qquad (\dagger)$$

- وفي حالة x من $[0,2[$ لدينا، اعتماداً على الخاصّة ❸ نفسها

$$0=f(2)=f(x+2-x)=f((2-x)f(x))f(x)$$

وهذا يقتضي أنّ $f((2-x)f(x))=0$ بناءً على ❷ . وإذا استفدنا من جديد من هذه الخاصّة نفسها استنتجنا أنّ $(2-x)f(x)\geq 2$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall x\in[0,2[,\quad f(x)\geq\frac{2}{2-x} \qquad (\ddagger)$$

- ومن جهة أخرى، لتكن x من $[0,2[$، وليكن α من المجال $]x,2[$. عندئذ لمّا كان

$$0\neq f(\alpha)=f(x+\alpha-x)=f((\alpha-x)f(x))f(x)$$

استنتجنا من $(\dagger)$ أنّ $(\alpha-x)f(x)<2$، أو

$$\forall\alpha\in\,]x,2[,\quad f(x)<\frac{2}{\alpha-x}$$

ثُمّ بجعل α تسعى إلى 2 نستنتج أنّ

$$\forall x\in[0,2[,\quad f(x)\leq\frac{2}{2-x}$$

فإذا استفدنا من $(\ddagger)$ استنتجنا أنّ للتابع f الصيغة التالية.

$$f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\begin{cases}0 & : \ x\in[2,+\infty[\\ \dfrac{2}{2-x} & : \ x\in[0,2[\end{cases}$$

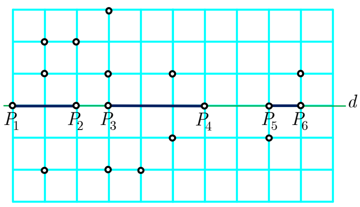
- وبالعكس نتيقّن مباشرة ودون عناء، أنّ التابع f المعرّف أعلاه يُحقّق الشروط ❶ و ❷ و ❸ . وذلك بعد ملاحظة أنّه في حالة (x,y) من $(\mathbb{R}_+)^2$ لدينا التكافؤ

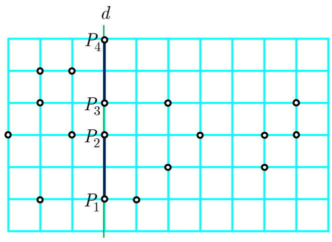
$$(y<2)\wedge\left(\frac{2x}{2-y}<2\right)\Leftrightarrow x+y<2$$

- فالتابع f هو الوحيد الذي يُحقّق شروط المسألة. ◪

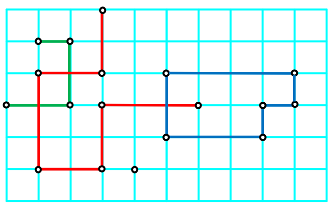
⑥ **نتأمّل مجموعة منتهية من النقاط في المستوي، إحداثيّات كلٍّ منها أعدادٌ صحيحةٌ. أَمِنَ الممكن تلوين هذه النقاط بأحد اللونين الأحمر أو الأزرق، بأسلوب تكون فيه القيمة المطلقة للفرق بين عدد النقاط الحمراء وعدد النقاط الزرقاء على كلِّ مستقيم يوازي أحد المحورين الإحداثيين أصغر أو تساوي الواحد ؟**

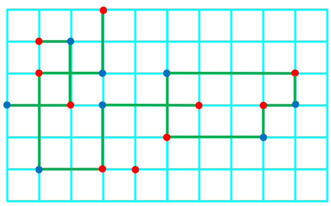
لتكن $\mathcal{P}$ مجموعة منتهية من النقاط في المستوي، إحداثيّات كلٍّ منها أعدادٌ صحيحةٌ. في حالة مستقيم d يوازي أحد المحورين الأحداثيين ويتقاطع مع $\mathcal{P}$، نسمّي $P_1, P_2, \ldots, P_k$ نقاط التقاطع $\mathcal{P} \cap d$ مع مراعاة ترتيبها وفق قيم الفواصل المتزايدة في حالة $d \| ox$، أو وفق قيم التراتيب المتزايدة في حالة $d \| oy$. ثُمّ نرسم القطع المستقيمة $\left([P_{2i-1}P_{2i}]\right)_{1 \le i \le k/2}$. كما هو مبيّن في الشكل التالي :





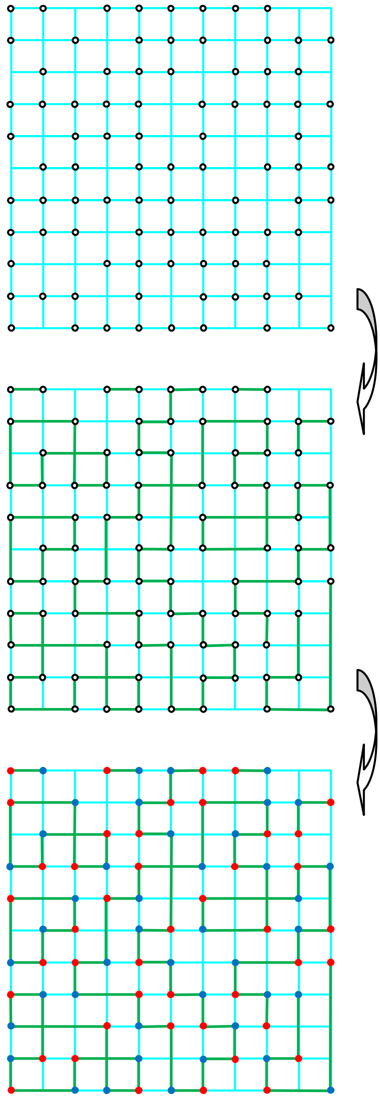
نكرّر هذا الأمر في حالة جميع المستقيمات d الموازية لأحد المحورين الإحداثيين والتي تتقاطع مع $\mathcal{P}$. فنحصل بذلك على مجموعة من القطع المستقيمة تكوّن مع بعضها خطوطاً مضلّعيّة.





إذا كان أحد هذه الخطوط المضلّعيّة مغلقاً كان عدد نقاطه زوجياً لأنّه يساوي ضعفي عدد قطعه المستقيمة الأفقيّة. وعليه يمكن تلوين رؤوس كلِّ خطٍّ من هذه الخطوط المضلّعية بالتناوب رأسٌ أحمر يليه رأسٌ أزرق. ثُمّ نلوِّن كلَّ رأس منفرد باللّون الذي نشاء. وعندئذ تتحقّق الخاصّ المرجوّة إنشاءً.

يوضّح الشكل التالي هذا الإنشاء :



① **لنرمز بالرمز $\pi_n(k)$ إلى عدد تباديل المجموعة $\mathbb{N}_n = \{1,\ldots,n\}$ التي تقبل k نقطة ثابتة. أثبت أنّ**

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \pi_n(k) = n!$$

نذكّر أن التبديل على المجموعة $\mathbb{N}_n$ هو تقابلٌ من $\mathbb{N}_n$ إلى $\mathbb{N}_n$. وإذا رمزنا كالعادة $\mathfrak{S}_n$ إلى مجموعة تباديل المجموعة $\mathbb{N}_n$، كان

$$\pi_n(k) = \text{card}(\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \text{card}(\text{Fix}(\sigma)) = k\})$$

وقد رمزنا $\text{Fix}(\sigma)$ إلى المجموعة $\left\{j \in \mathbb{N}_n : \sigma(j) = j\right\}$.

في حالة مجموعة جزئيّة A من $\mathbb{N}_n$، نعرّف

$$\Pi_n(A) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \text{Fix}(\sigma) = A\}$$

عندئذ نرى أنّه يوجد تقابلٌ بين هذه المجموعة، ومجموعة التقابلات على المجموعة $\mathbb{N}_n \backslash A$ التي ليس لها أيّة نقطة ثابتة، ومن ثَمّ $\text{card}(\Pi_n(A)) = \pi_{n-\text{card}(A)}(0)$، مع الاصطلاح $\pi_0(0) = 1$. فإذا رمزنا بالرمز $P_n^{(k)}$ إلى مجموعة أجزاء $\mathbb{N}_n$ التي عدد عناصر كلٍّ منها يساوي k، استنتجنا أنّ

$$\Pi_n^{(k)} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \text{card}(\text{Fix}(\sigma)) = k\} = \bigcup_{A \in P_n^{(k)}} \Pi_n(A)$$

ومن ثَمّ، بسبب كون المجموعات $\left(\Pi_n(A)\right)_{A \in P_n^{(k)}}$ منفصلة مثنى مثنى، استنتجنا أنّ

$$\pi_n(k) = \sum_{A \in P_n^{(k)}} \text{card}(\Pi_n(A)) = C_n^k \pi_{n-k}(0)$$

إذن لقد أثبتنا أنّ

$$0 \leq k \leq n \Rightarrow \pi_n(k) = C_n^k\, \pi_{n-k}(0) \qquad (1)$$

من جهة أخرى، لمّا كانت $\left(\Pi_n^{(k)}\right)_{0 \leq k \leq n}$ تكوّن تجزئة للمجموعة $\mathfrak{S}_n$ استنتجنا أنّ

$$\text{card}(\mathfrak{S}_n) = \sum_{k=0}^{n} \text{card}\left(\Pi_n^{(k)}\right)$$

ومن ثَمّ

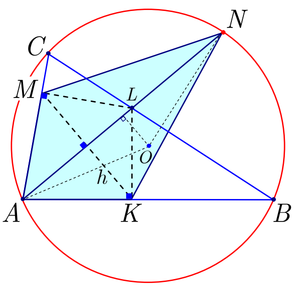
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \sum_{k=0}^{n} \pi_n(k) \qquad (2)$$

نأتي الآن إلى حساب المجموع المطلوب في نصّ المسألة :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k \cdot \pi_n(k) &\overset{❶}{=} \sum_{k=1}^{n} kC_n^k \cdot \pi_{n-k}(0) \overset{❷}{=} n \times \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \cdot \pi_{n-k}(0) \\ &= n \times \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} \cdot \pi_{n-1-k}(0) \overset{❶}{=} n \times \sum_{k=0}^{n-1} \pi_{n-1}(k) \\ &\overset{❸}{=} n \times (n-1)! = n!\end{aligned}$$

إذ استفدنا من (1) في المساواتين ❶، واستفدنا من المساواة $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ في ❷ و من (2) في ❸. وبذا يتمّ الإثبات. ◼

② **نتأمّل مثلّثاً حادّ الزوايا ABC. يتلاقى المنصّف الداخلي للزاوية A مع الضلع $[BC]$ في L، ويقطع الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC في نقطة ثانية N. ليكن K المسقط القائم للنقطة L على (AB)، ولتكن M المسقط القائم للنقطة L على (AC). أثبت أنّ للمثلّث ABC وللرباعي $AKNM$ المساحة نفسها.**



لنرمز بالرمز O إلى مركز الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC، وليكن R نصف قطرها. عندئذ نستنتج من المثلّث AON، ومن كون الزاوية المركزيّة $\widehat{NOA}$ تساوي $2\left(\widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{A}\right)$، ما يلي :

$$\frac{\frac{1}{2}AN}{R} = \sin\left(\widehat{B} + \tfrac{1}{2}\widehat{A}\right)$$

وعليه نرى أنّ

$$AN = 2R\sin\left(\widehat{B} + \tfrac{1}{2}\widehat{A}\right) \qquad (1)$$

ومن جهة أخرى، لمّا كان المثلّثان AKL و AML طبوقين، استنتجنا أنّ بُعد النقطة K عن (AN) يساوي بُعد النقطة M عن المستقيم (AN). لنرمز بالرمز h إلى هذا المقدار الذي يساوي طول الارتفاع النازل من K في المثلّث AKL.

عندئذ يكون

$$\mathcal{A}(AKNM) = h \cdot AN \tag{2}$$

وقد رمزنا $\mathcal{A}(AKNM)$ إلى مساحة الرباعي $AKNM$.

ولكن، بملاحظة أنّ

$$\widehat{ALB} = \pi - \left(\widehat{B} + \tfrac{1}{2}\widehat{A}\right)$$

نستنتج من علاقة الجيب في المثلّث ALB ما يلي :

$$\frac{AB}{\sin\left(\widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{A}\right)} = \frac{AL}{\sin\widehat{B}}$$

إذن

$$AL = \frac{\sin\widehat{B}}{\sin\left(\widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{A}\right)} AB$$

ومن المثلّث القائم AKL نجد

$$h \cdot AL = AK \cdot KL = AL\cos\left(\tfrac{1}{2}\widehat{A}\right) \cdot AL\sin\left(\tfrac{1}{2}\widehat{A}\right)$$

إذن

$$h = \frac{1}{2}AL \cdot \sin\widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\widehat{A} \cdot \sin\widehat{B}}{\sin\left(\widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{A}\right)} AB \tag{3}$$

فإذا استفدنا من (1) و (2) و (3) استنتجنا أنّ

$$\mathcal{A}(AKNM) = R \cdot AB \cdot \sin\widehat{A} \cdot \sin\widehat{B} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\widehat{B}$$

والطرف الأيمن من المساواة السابقة هو مساحة المثلّث ABC، فنكون بذلك قد أثبتنا صحّة الخاصّة المطلوبة. ◼

③ **نتأمّل أعداداً حقيقيّة $(x_1, \ldots, x_n)$ تُحقّق $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$، وعدداً طبيعيّاً p أكبر أو يساوي 2. أثبت وجود أعداد صحيحة $(a_1, \ldots, a_n)$ ليست جميعها أصفاراً وتحقّق من جهة أولى $\forall i \in \mathbb{N}_n, |a_i| \leq p - 1$، وتُحقّق، من جهة ثانية، المتراجحة**

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n| \leq \frac{p-1}{p^n - 1}\sqrt{n}$$

لنعرّف $y_k = |x_k|$ في حالة $1 \leq k \leq n$، ولنضع $D = \{0,1,\ldots,p-1\}^n$. ثُمّ لنتأمّل التطبيق φ التالي :

$$\varphi : D \to \mathbb{R},\ \varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k$$

- استناداً إلى متراجحة كوشي شوارتز نرى أنّه، في حالة $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ من D، لدينا

$$0 \leq \varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \leq \sqrt{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}_{1}} \cdot \sqrt{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2}_{\alpha_k \leq p-1}} \leq (p-1)\sqrt{n}$$

إذن يأخذ φ قيمه في المجال $I = [0,(p-1)\sqrt{n}]$.

- لنتأمّل جماعة المجالات $(I_j)_{0\leq j<p^n-1}$ المعرّفة كما يلي :

$$I_j = \left[j\frac{p-1}{p^n-1}\sqrt{n}, (j+1)\frac{p-1}{p^n-1}\sqrt{n} \right]$$

لمّا كان $I = \bigcup_{0\leq j<p^n-1} I_j$، وعدد هذه المجالات $p^n - 1$، و $\operatorname{card}(D) = p^n$، استنتجنا وجود عنصرين **مختلفين** $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ و $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ من D، تنتمي صورتاهما $\varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ و $\varphi(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ إلى المجال الجزئي نفسه وليكن I_{j_0}.

وينتج من ذلك

$$|\varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) - \varphi(\beta_1,\ldots,\beta_n)| \leq \frac{p-1}{p^n-1}\sqrt{n}$$

فإذا عرّفنا في حالة $0 \leq k \leq n$ المقدار ε_k بأنّه يساوي 0 في حالة $x_k = 0$، ويساوي $\operatorname{sgn}(x_k)$ في حالة $x_k \neq 0$، استنتجنا أنّ

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(\alpha_k - \beta_k)\varepsilon_k}_{a_k} x_k \right| \leq \frac{p-1}{p^n-1}\sqrt{n}$$

يكفي إذن وضع $a_k = (\alpha_k - \beta_k)\varepsilon_k$ في حالة $0 \leq k \leq n$ ليتحقّق المطلوب. ■

④ **أثبت أنّه لا يوجد تابعٌ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ يُحقّق الشرط**

$$f(f(n)) = n + 1987$$

وذلك أيّاً كانت قيمة n من $\mathbb{N}$

في الحقيقة، هذه النتيجة واضحة بناءً على الخاصّة التالية :

مبرهنة : ليكن p من $\mathbb{N}$. عندئذ يوجدُ تطبيقٌ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ يُحقّق

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f(f(n))=n+p \qquad (\mathcal{P})$$

إذا وفقط إذا كان p عدداً زوجيّاً.

الإثبات

لنتأمّل تابعاً $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ يُحقّق الخاصّة $(\mathcal{P})$. نلاحظ أوّلاً أنّ التطبيق f تطبيقٌ متباينٌ لأنّ $f\circ f$ متباينٌ. ثُمّ نعرّف المجموعتين

$$A=\{k\in\mathbb{N}: k<p \text{ و } f(k)<p\}$$

$$B=\{k\in\mathbb{N}: k<p \text{ و } f(k)\geq p\}$$

- لتكن k من A، ولنضع $q=f(k)$، عندئذ يكون

$$f(q)=k+p\geq p \quad \text{و} \quad q<p$$

وهذا يعني أنّ $q\in B$، فنكون قد أثبتنا أنّ $f(A)\subset B$.

- وبالعكس، ليكن k من B، ولنعرّف $s=f(k)-p$. لمّا كان

$$f(f(s))=s+p=f(k)$$

استنتجنا من كون f متبايناً أنّ $f(s)=k<p$.

ومن جهة أخرى، إذا افترضنا أنّ $s\geq p$، استنتجنا من المساواة $f(f(s-p))=s$ أنّ

$$k=f(s)=f\circ f(f(s-p))=f(s-p)+p\geq p$$

وهذا خُلفٌ. إذن لا بُدّ أن يكون $s<p$. والمتراجحتان $s<p$ و $f(s)<p$ تعنيان أنّ $s\in A$، ولأنّ $k=f(s)$ استنتجنا أنّ $k\in f(A)$. فنكون قد أثبتنا أنّ $B\subset f(A)$.

- نستنتج مما سبق أنّ $f(A)=B$. وبوجه خاص $\operatorname{card}(A)=\operatorname{card}(B)$ لأنّ f تطبيقٌ متباينٌ. ولكن من الواضح أنّ (A,B) هي تجزئة للمجموعة $[0,p[$ التي عدد عناصرها يساوي p، ومنه $p=\operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B)=2\operatorname{card}(A)$، أي إنّ العدد p عددٌ زوجي.

- وبالعكس، في حالة $p=2m$، يُحقّق التابع $n\overset{f}{\mapsto}n+m$ الخاصّة $(\mathcal{P})$. ويتمّ إثبات المبرهنة.

⑤ ليكن n عدداً طبيعيّاً أكبر أو يساوي 3. أثبت وجود مجموعة $\mathcal{P}$ مكوَّنة من n نقطةً من نقاط المستوي، تكون المسافة بين أيِّ نقطتين من نقاطها عدداً غير عادي، ومساحة أي مثلّث رؤوسه من نقاط $\mathcal{P}$ عدداً عاديّاً موجباً تماماً.

يكفي أن نختار $\mathcal{P} = \{A_k : 1 \leq k \leq n\}$ و A_k هي النقطة التي إحداثيّاها (k, k^2).

▫ من جهة أولى، تُحسب المسافة $d(A_k, A_\ell)$ بين النقطتين A_k و A_ℓ بالصيغة :

$$d(A_k, A_\ell) = \sqrt{(k-\ell)^2 + (k^2-\ell^2)^2} = |k-\ell|\sqrt{1+(k+\ell)^2}$$

وهنا نستفيد من الخاصّة البسيطة التالية : إذا كان الجذر التربيعي لعدد طبيعي N عدداً عاديّاً r كان r عدداً طبيعياً. (في الحقيقة، إذا كان $r = \dfrac{p}{q}$ و p و q عددان طبيعيّان أوّليّان فيما بينهما، استنتجنا من المساواة $p^2 = Nq^2$ أنّ كلّ قاسم أوّلي للعدد q يقسم العدد p، وهذا يقتضي أنّ $q = 1$ لأنّ $\gcd(p,q) = 1$. إذن $r = p \in \mathbb{N}$). ولكن نستنتج من المتراجحة

$$(k+\ell)^2 < 1 + (k+\ell)^2 < (1+k+\ell)^2$$

أنّ $\sqrt{1+(k+\ell)^2}$ ليس عدداً طبيعيّاً، فهو إذن لا ينتمي إلى مجموعة الأعداد العاديّة $\mathbb{Q}$، أي

$$\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}_n^2, \quad k \neq \ell \Rightarrow d(A_k, A_\ell) \notin \mathbb{Q}$$

▫ ومن جهة أخرى، في حالة ثلاثة أعداد مختلفة i و j و k، تُحسب $\mathcal{A}(A_iA_jA_k)$ أي مساحة المثلّث $A_iA_jA_k$ بالصيغة

$$\mathcal{A}(A_iA_jA_k) = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} k-i & j-i \\ k^2-i^2 & j^2-i^2 \end{bmatrix}\right| = \frac{|(k-i)(j-i)(j-k)|}{2}$$

ومنه

$$\forall (i,j,k) \in \mathbb{N}_n^3, \quad \operatorname{card}(\{i,j,k\}) = 3 \Rightarrow \mathcal{A}(A_iA_jA_k) \in \mathbb{Q}_+^*$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

⑥ ليكن n عدداً طبيعيّاً أكبر أو يساوي 2. أثبت أنّه إذا كان k^2+k+n عدداً أوّلياً أيّاً كان العدد الطبيعي k من المجال $[0, \sqrt{\frac{n}{3}}]$، كانت جميع الأعداد $(k^2+k+n)_{0 \leq k \leq n-2}$ أعداداً أوّليّة.

يعتمد الإثبات على الخاصّة البسيطة التالية :

خاصّة : ليكن q عدداً طبيعيّاً موجباً تماماً، عندئذ تتحقّق الخاصّتان التاليتان :

1. إذا كان m أوّليّاً مع الأعداد $\{q+1,\ldots,2q\}$ ، كان m أوّلياً مع الأعداد $\{1,2,\ldots,q\}$. أي إنّ الشرط

$$\forall k \in \{q+1,\ldots,2q\},\ \gcd(m,k)=1 \qquad (\mathcal{H})$$

يقتضي $\forall k \in \{1,\ldots,2q\},\ \gcd(m,k)=1$.

2. إذا حقّق m ، إضافة إلى الشرط $(\mathcal{H})$ المتراجحة $m<(2q+1)^2$ كان m عدداً أوّلياً.

في الحقيقة، لّما كان $\gcd(m,2q)=1$ استنتجنا أنّ m عددٌ فردي. ليكن r عدداً ما من المجموعة $\{1,2,\ldots,q\}$ ، ولنعرف $k=\left\lfloor \log_2\left(\frac{q}{r}\right)\right\rfloor$ ، فيكون

$$2^k r \le q < 2^{k+1} r \le 2q$$

إذن استناداً إلى الفرْض $(\mathcal{H})$ يكون $\gcd\left(m,2^{r+1}r\right)=1$ ، ولكنّ m عددٌ فردي، إذن $\gcd(m,r)=1$ ، وبذا يكتمل إثبات 1.

وإذا حقّق العدد m ، إضافة إلى $(\mathcal{H})$ المتراجحة $m<(2q+1)^2$ ، استنتجنا بناءً على 1. أنّ $\gcd(m,k)=1$ أياً كان العدد k الذي يُحقّق $1\le k\le\sqrt{m}$ ، وهذا يعني أنّ m عددٌ أوّلي.

نأتي الآن إلى المسألة المطروحة، ونعرّف $\ell=\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{3}}\right\rfloor$. فيكون $n=3\ell^2+s$ ، و s عدد طبيعي من المجال $[0,6\ell+2]$ ، المسألة تافهة في حالة $\ell=0$ ، لذلك سنفترض أنّ $\ell\ge1$.
وإذا رمزنا $\mathcal{P}$ إلى مجموعة الأعداد الأوّليّة، عرّفنا الخاصّة $\mathbb{P}_k$ التالية :

$$\text{« } k(k+1)+n\in\mathcal{P} \text{ »}$$

فيأخُذ الفرْض الصيغة التالية : إنّ $\mathbb{P}_k$ صحيحة في حالة k من $\{0,1,\ldots,\ell\}$. والمطلوب هو إثبات صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_k$ في حالة k من المجموعة $\{\ell+1,\ldots,n-2\}$. سنثبتُ ذلك بالتدريج على العدد k بالاعتماد على الخاصّة بدأنا بإثباتها.

لنفترض إذن أنّ $\mathbb{P}_{k'}$ صحيحة في حالة $k'<k$. ولنثبت صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_k$. نرمز اختصاراً m إلى $k(k+1)+n$ ، و k عددٌ من المجموعة $\{\ell+1,\ldots,n-2\}$.

من جهة أولى، نرى أنّ

$$\begin{aligned}(2k+1)^2-m &= 3k^2+3k+1-n\\ &= 3k^2+3k+1-3\ell^2-s\\ &= 3k^2+3k-3\ell^2-3\ell+3\ell+1-s\\ &= 3(k-\ell)(k+\ell+1)+3\ell+1-s\\ &\geq 3(2\ell+2)+3\ell+1-s=9\ell+7-s>0\end{aligned}$$

إذن $m<(2k+1)^2$ لأنّ $s\leq 6\ell+2$.

لنفترض أنّ $\gcd(m,q)\neq 1$ في حالة عددٍ q من $\{k+1,\ldots,2k\}$. عندئذ يكون

$$\gcd(m-q(2k+1-q),q)\neq 1 \tag{1}$$

ولكن

$$\begin{aligned}m-q(2k+1-q) &= k^2+k+n+q^2-q(2k+1)\\ &= (q-k-1)(q-k)+n\\ &= k'(k'+1)+n\end{aligned}$$

إذ عرّفنا $k'=q-k-1$ وهو عددٌ من المجموعة $\{0,1,\ldots,k-1\}$، ولمّا كانت القضيّة $\mathbb{P}_{k'}$ صحيحة استنتجنا أنّ $k'(k'+1)+n$ عددٌ أوّلي، ومن (1) نجد أنّ

$$(n+k'(1+k'))\mid q$$

ولكن

$$q\leq 2k\leq 2(n-2)<2n$$

فإذا قَبِل q القسمة على العدد على الأوّلي $n+k'(k'+1)$، الذي هو أكبر أو يساوي n، وجب أن يكون $q=k'(k'+1)+n$. ومن ثَمّ

$$k'^2=q-k'-n=k+1-n\leq n-2+1-n=-1<0$$

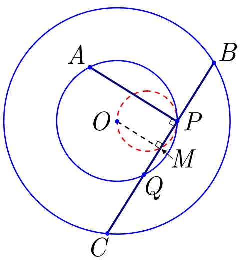
وهذا خُلفٌ واضح.

إذن $\gcd(m,q)=1$ في حالة $k+1\leq q\leq 2k$، ولأننا رأينا أنّ $m<(2k+1)^2$، استنتجنا بناءً على الخاصّة التي بدأنا بإثباتها أنّ m عددٌ أوّلي، ومنه صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_k$. وبذا يتمّ الإثبات. ∎

أولمبياد الرياضيّات التاسع والعشرون

① **نتأمّل في المستوي دائرتين متحدتين في المركز O، ونصفي قطريهما R و r حيث $r < R$. النقطة P هي نقطة مثبّتة على الدائرة الصغرى، والنقطة B نقطة تتحوّل على الدائرة الكبرى. يلاقي المستقيم (BP) الدائرة الكبرى ثانية في C، ويلاقي المستقيم العمودي على (BP) في P، الدائرة الصغرى ثانيةً في A، (وإذا كان هذا العمود مماساً للدائرة الصغرى عرفنا $A = P$).**

1. **أوجد مجموعة القيم التي يأخذها المقدار $AB^2 + BC^2 + CA^2$.**
2. **أوجد المحلّ الهندسي لمنتصف القطعة المستقيمة $[BC]$**



لتكن Q النقطة الثانية، غير P، التي يتقاطع فيها المستقيم (BP) مع الدائرة الصغرى، ولتكن M المسقط القائم للنقطة O، المركز المشترك للدائرتين، على المستقيم (BP). فتكون M، في آن معاً، منتصف القطعة $[BC]$، ومنتصف القطعة $[PQ]$.

1. نلاحظ من جهة أولى أنّ

$$AB^2 = AP^2 + PB^2 = AP^2 + (BM - MP)^2$$

$$AC^2 = AP^2 + PC^2 = AP^2 + (BM + MP)^2$$

ومن ثَمّ $AB^2 + AC^2 = 2\left(AP^2 + BM^2 + MP^2\right)$. ولكن من المثلّث القائم OMB نجد $BM^2 = R^2 - OM^2$، ومن المثلّث القائم OMP نجد كذلك أنّ $MP^2 = r^2 - OM^2$، وأخيراً من المثلّث القائم APQ نجد $AP = 2OM$، إذن

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 2\left(4OM^2 + R^2 - OM^2 + r^2 - OM^2\right) \\ &= 2\left(2OM^2 + R^2 + r^2\right) \end{aligned}$$

ولكن، من جهة ثانية، لدينا $BC^2 = 4BM^2 = 4\left(R^2 - OM^2\right)$، إذن

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 + BC^2 &= 4OM^2 + 2\left(R^2 + r^2\right) + 4R^2 - 4OM^2 \\ &= 6R^2 + 2r^2 \end{aligned}$$

إذن يبقى المقدار $AB^2 + AC^2 + BC^2$ ثابتاً عندما تتحوّل النقطة B على الدائرة الكبرى ويحافظ على القيمة $6R^2 + 2r^2$.

2. عندما تتحوّل B على الدائرة الكبرى، ترسم Q الدائرة الصغرى، ولمّا كانت M هي منتصف $[PQ]$، استنتجنا أنّ M هي صورة Q وفق التحاكي h الذي مركزه P ونسبته $\frac{1}{2}$. إذن المحل الهندسي للنقطة M هو صورة الدائرة الصغرى (التي ترسمها Q) وفق التحاكي h، فهو إذن الدائرة التي قطرها $[OP]$. ■

② **ليكن n عدداً طبيعيّاً موجباً تماماً، ولتكن $(A_k)_{1\le k\le 2n+1}$ مجموعات جزئيّة من مجموعة B. نفترض ما يلي :**

❶ **أياً كانت k من المجموعة $\mathbb{N}_{2n+1} = \{1,\ldots,2n+1\}$ كان $\operatorname{card}(A_k) = 2n$.**

❷ **في حالة i و j من $\mathbb{N}_{2n+1}$، إذا كان $j \ne i$ كان $\operatorname{card}(A_i \cap A_j) = 1$.**

❸ **كلُّ عنصرٍ من B ينتمي إلى مجموعتين اثنتين على الأقل من المجموعات $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_{2n+1}}$.**

ما هي قيم n التي يمكن عندها أن نقرن بكل عنصرٍ من B أحد العددين 0 أو 1، بأسلوبٍ يكون بناءً عليه عدد العناصر المقرونة بالعدد 0 من كلٍّ من المجموعات $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_{2n+1}}$ مساوياً n ؟

ليكن n عدداً طبيعيّاً موجباً تماماً، ولتكن $(A_k)_{1\le k\le 2n+1}$ مجموعات جزئيّة من مجموعة B، تُحقّق الخواص ❶ و ❷ و ❸.

نعرّف في حالة k من $\mathbb{N}_{2n+1}$ المجموعة $D_k = \mathbb{N}_{2n+1}/\{k\}$، ثُمّ نتأمّل في حالة j من A_k المجموعة الجزئيّة S_j من D_k المعرّفة كما يلي :

$$S_j = \{\ell \in D_k : j \in A_\ell\} \subset D_k$$

- استناداً إلى ❸ يكون لدينا $\forall j \in A_k,\ S_j \ne \varnothing$.
- وفي حالة $j \ne j'$ من A_k، لدينا $S_j \cap S_{j'} = \varnothing$. لأنّه إذا انتمى ℓ إلى التقاطع $S_j \cap S_{j'}$ كان $\{j, j'\} \subset A_\ell \cap A_k$ وهذا يتناقض مع ❷.
- وعليه نستنتج، من المتراجحة

$$2n = \sum_{j\in A_k} 1 \le \sum_{j\in A_k} \operatorname{card}(S_j) \le \operatorname{card}\left(\bigcup_{j\in A_k} S_j\right) \le \operatorname{card}(D_k) = 2n$$

أنّ $\forall j \in A_k,\ \operatorname{card}(S_j) = 1$. إذن لقد أثبتنا الخاصّة ❸′ التالية :

❸′ كلُّ عنصرٍ من B ينتمي إلى مجموعتين اثنتين، وفقط اثنتين، من المجموعات $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_{2n+1}}$.

لنتأمّل الآن المجموعة

$$\mathcal{B}_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : 1 \le i < j \le 2n+1\}$$

ولنعرّف في حالة (i,j) من $\mathcal{B}_n$ العنصر $\varphi(i,j)$ من B المعرّف وفق ❷ بالعلاقة

$$A_i \cap A_j = \{\varphi(i,j)\}$$

ثُمّ لنتأمّل التطبيق $\varphi : \mathcal{B}_n \to B, (i,j) \mapsto \varphi(i,j)$. تعني الخاصّة ❸′ أنّ هذا التطبيق تقابلٌ، وبوجه خاصٍّ لا بُدَّ أن يكون

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(B) = \operatorname{card}(\mathcal{B}_n) &= \sum_{j=2}^{2n+1} \operatorname{card}(\{i : 1 \le i \le j-1\}) \\ &= \sum_{j=2}^{2n+1}(j-1) = \sum_{j=1}^{2n} j = n(2n+1)\end{aligned}$$

لنعرّف كذلك، المجموعات $(\mathcal{A}_{k,n})_{k\in\mathbb{N}_{2n+1}}$ الجزئيّة من $\mathcal{B}_n$ بالصيغة

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{k,n} &= \Big\{(i,j) \in \mathcal{B}_n : (i=k) \text{ أو } (j=k)\Big\} \\ &= \{(i,k) : 1 \le i < k\} \cup \{(k,j) : k < j \le 2n+1\}\end{aligned}$$

التي عدد عناصر كلٍّ منها يساوي $2n$، كما إنّ $\varphi(\mathcal{A}_{k,n}) \subset A_k$، ولأنّ عدد عناصر كلٍّ من هاتين المجموعتين يساوي $2n$ استنتجنا أنّ $\forall k \in \mathbb{N}_{2n+1},\ \varphi(\mathcal{A}_{k,n}) = A_k$.

لنبحث الآن عن شرطٍ لازمٍ ليتحقّق إضافة إلى ما سبق الشرط الإضافي ❹ التالي.

❹ يوجد تطبيق $\theta : B \to \{0,1\}$ يُحقّق $\forall k \in \mathbb{N}_{2n+1},\quad \sum_{x\in A_k} \theta(x) = n$.

وهي الخاصّة الإضافيّة التي وردت في نصّ المسألة. عندئذ بتعريف $\Theta = \theta \circ \varphi$ نستنتج أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}_{2n+1},\quad \sum_{i=1}^{k-1}\Theta(i,k) + \sum_{j=k+1}^{2n+1}\Theta(k,j) = n$$

وبالجمع نجد

$$\sum_{k=2}^{2n+1}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\Theta(i,k)\right) + \sum_{k=1}^{2n}\left(\sum_{j=k+1}^{2n+1}\Theta(k,j)\right) = n(2n+1)$$

ولكنّ المجموعين السابقين متساويان، إذْ كلٌّ منهما يساوي $\sum_{(p,q)\in\mathcal{B}_n}\Theta(p,q)$ أو $\sum_{x\in B}\theta(x)$. إذن يجب أن يكون $n(2n+1)$ عدداً زوجياً، أي أن يكون n نفسه عدداً زوجيّاً، وهو الشرط اللازم.

سنثبتُ فيما يلي أنّ كون العدد n عدداً زوجيّاً هو شرطٌ كافٍ لوجود مجموعة B ومجموعات جزئيّة $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_{2n+1}}$ من B تُحقّق الشروط ❶ و ❷ و ❸ و ❹.

لنفترض أنّ $n = 2m$، ولنعرّف $B = \mathcal{B}_{2m}$ أي

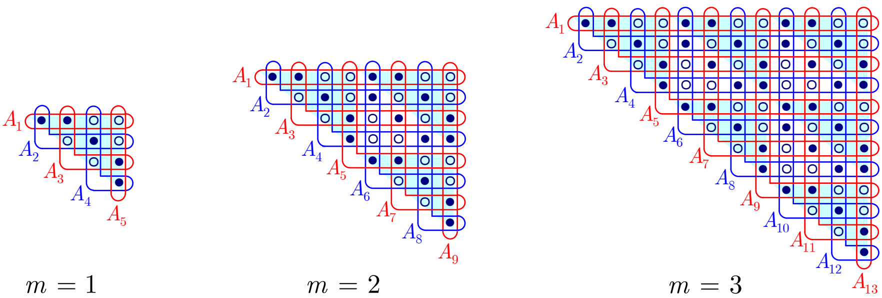
$$\mathcal{B}_{2m} = \{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : 1 \le i < j \le 4m+1\}$$

كما نعرّف في حالة $1 \le k \le 4m+1$ المجموعة $A_k = \mathcal{A}_{k,2m}$ أي

$$\begin{aligned} A_k = \mathcal{A}_{k,2m} &= \Big\{(i,j) \in \mathcal{B}_{2m} : (i=k) \text{ أو } (j=k)\Big\} \\ &= \{(i,k) : 1 \le i < k\} \cup \{(k,j) : k < j \le 4m+1\} \end{aligned}$$

عندئذ تتحقّق وضوحاً الخواص ❶ و ❷ و ❸.

المسألة هي في إيجاد التابع $\theta : B \to \{0,1\}$ الذي يُحقّق الخاصّة ❹ المرجوّة. هنا قد يساعدنا بعض التجريب عند القيم الصغيرة للعدد m. نبين في الشكل التالي حلولاً توافق حالات $m=1$ و $m=2$ و $m=3$.



فنرى أنّ حالة $m=1$ توافق حالة قاعديّة، يجرى تكرارها في الحالات اللاحقة، ونصل إلى الصيغة النهائيّة، بعد بعض التفكير.

لنعرّف في حالة ℓ من $\mathbb{N}$ المقدار s_ℓ بأنّه باقي قسمة الجزء الصحيح للمقدار $\frac{\ell+1}{2}$ على 2، أي

$$s_\ell = \left\lfloor \frac{\ell+1}{2} \right\rfloor \bmod 2 = \begin{cases} 0 & : \ \ell \bmod 4 \in \{0,3\} \\ 1 & : \ \ell \bmod 4 \in \{1,2\} \end{cases}$$

ثُمّ لنعرّف

$$\Theta : \mathcal{B}_{2m} \to \{0,1\}, \Theta(i,j) = \big(i + j + s_{i+1}s_j\big) \bmod 2$$

يمكن كتابة $\Theta(i,j)$ بصيغة أكثر مُلاءمة لعمليّة الجمع هي

$$\Theta(i,j)=\frac{1}{2}-\frac{(-1)^{i+j}}{2}+(-1)^{i+j}\,s_{i+1}s_j$$

لتكن k من $\mathbb{N}_{4m+1}$ عندئذ

$$\begin{aligned}\sum_{X\in A_k}\Theta(X)&=\sum_{i=1}^{k-1}\Theta(i,k)+\sum_{j=k+1}^{4m+1}\Theta(k,j)\\&=\underbrace{\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{(-1)^{i+k}}{2}+(-1)^{i+k}\,s_{i+1}s_k\right)}_{\Delta_1}\\&\qquad+\underbrace{\sum_{j=k+1}^{4m+1}\left(\frac{1}{2}-\frac{(-1)^{k+j}}{2}+(-1)^{k+j}\,s_{k+1}s_j\right)}_{\Delta_2}\end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned}\Delta_1&=\frac{k-1}{2}-\frac{(-1)^k}{2}\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i+(-1)^k\,s_k\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i\,s_{i+1}\\\Delta_2&=\frac{4m+1-k}{2}-\frac{(-1)^k}{2}\sum_{i=k+1}^{4m+1}(-1)^i-(-1)^k\,s_{k+1}\sum_{i=k}^{4m}(-1)^i\,s_{i+1}\end{aligned}$$

وهنا نلاحظ أنّه بوجه عامٍّ لدينا

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4q}(-1)^{i+1}\,s_{i+1}&=\sum_{i=2}^{4q+1}(-1)^i\,s_i=\sum_{i=0}^{4q-1}(-1)^i\,s_i\\&=\sum_{\ell=0}^{q-1}(s_{4\ell}-s_{4\ell+1}+s_{4\ell+2}-s_{4\ell+3})=0\end{aligned}$$

وكذلك أنّ

$$\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i+\sum_{i=k+1}^{4m+1}(-1)^i=\left(\sum_{i=1}^{4m+1}(-1)^i\right)-(-1)^k=-1-(-1)^k$$

إذن

$$\Delta_1+\Delta_2=2m+\frac{1+(-1)^k}{2}-(-1)^k\,(s_k+s_{k+1})\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}\,s_{i+1}$$

ولكن نستنتج من كون $\sum_{i=1}^{4q}(-1)^{i+1} s_{i+1} = 0$ أنّ

$$\sum_{i=1}^{4q+1}(-1)^{i+1} s_{i+1} = s_{4q+2} = s_2 = 1$$

ومن ثَمّ

$$\sum_{i=1}^{4q+2}(-1)^{i+1} s_{i+1} = 1 - s_3 = 1 \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{4q+3}(-1)^{i+1} s_{i+1} = 1 + s_0 = 1$$

إذن

$$\sum_{i=1}^{\ell-1}(-1)^{i+1} s_{i+1} = \begin{cases} 0 & : \quad \ell = 1 \bmod 4 \\ 1 & : \quad \ell \neq 1 \bmod 4 \end{cases}$$

ومن جهة أخرى

$$s_{\ell+1} + s_\ell = \begin{cases} 0 & : \quad \ell = 3 \bmod 4 \\ 1 & : \quad \ell = 0 \bmod 2 \\ 2 & : \quad \ell = 1 \bmod 4 \end{cases}$$

ومن ثَمّ

$$(-1)^\ell (s_{\ell+1} + s_\ell) \sum_{i=1}^{\ell-1}(-1)^{i+1} s_{i+1} = \begin{cases} 0 & : \quad \ell = 1 \bmod 2 \\ 1 & : \quad \ell = 0 \bmod 2 \end{cases}$$

أي

$$(-1)^\ell (s_{\ell+1} + s_\ell) \sum_{i=1}^{\ell-1}(-1)^{i+1} s_{i+1} = \frac{1 + (-1)^\ell}{2}$$

وبالعودة إلى عبارة $\Delta_1 + \Delta_2$، نستنتج أنّ $\Delta_1 + \Delta_2 = 2m$ أو

$$\sum_{X \in A_k} \Theta(X) = 2m = n$$

وهذا يُثبِتُ كفاية الشرط. أي إنّ الشرط اللازم والكافي، على العدد n، حتى توجد مجموعات جزئيّة $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_{2n+1}}$ تُحقّق الخواص ❶ و ❷ و ❸ و ❹ هو أن يكون n عدداً زوجيّاً. ◪

③ **نتأمّل تابعاً** $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ **يُحقّق الخواص التالية :**

❶ $f(1)=1$ و $f(3)=3$.

❷ **مهما تكن** n **من** $\mathbb{N}^*$ **فلدينا**

- $f(2n)=f(n)$.
- $f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)$.
- $f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$.

المطلوب تعيين عدد الأعداد n **التي هي أصغر أو تساوي** 1988 **وتُحقّق** $f(n)=n$.

تأتي الفكرة الأساسيّة من ملاحظة أثر تطبيق التابع f على الكتابة الإثنانيّة، أي بالأساس 2، للعدد n . لنتأمّل هذا الأثر عند بعض القيم الصغيرة للعدد n . في الجدول التالي سنكتب $(A)_2$ دلالة على الكتابة بالأساس 2 للعدد A .

n	$f(n)$	$(n)_2$	$(f(n))_2$
1	1	1	1
2	1	10	01
3	3	11	11
4	1	100	001
5	5	101	101
6	3	110	011
7	7	111	111
8	1	1000	0001
9	9	1001	1001
10	5	1010	0101
11	13	1011	1101
12	3	1100	0011
13	11	1101	1011
14	7	1110	0111
15	15	1111	1111

فنلاحظ أنّه إذا كانت $(b_\ell b_{\ell-1}\dots b_1 b_0)_2$ هي الكتابة الإثنانيّة للعدد m، (مع $b_\ell \neq 0$ أي $\ell=\lfloor \log_2 m\rfloor$) كانت $(b_0 b_1\dots b_{\ell-1} b_\ell)_2$ هي الكتابة الإثنانيّة للعدد $f(m)$، وذلك في حالة $m<16$. سنبرهن فيما يلي أنّ هذه الخاصّة خاصّة عامّة، وذلك بإثبات القضيّة $\mathbb{P}_n$ التالية بالتدريج على العدد n . لتكن $\mathbb{P}_n$ القضيّة التالية : » مهما يكن $(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1})$ من المجموعة $\{0,1\}^{n-1}$ يكن

$$f\left(2^n+\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k 2^k\right)=1+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{n-k}2^k \text{ «}$$

لقد رأينا أنّ $\mathbb{P}_n$ صحيحة في حالة $1 \leq n \leq 3$. لنفترض إذن أنّ $\mathbb{P}_n$ صحيحة أياً كانت n من المجموعة $\{1,2,\ldots,m-1\}$، ولنثبت صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_m$.

لنتأمّل إذن عدداً $x = (b_m b_{m-1} \ldots b_0)_2 = \sum_{k=0}^{m} b_k 2^k$ مع $b_m = 1$. يمكننا إذن أن نكتب $x = b_0 + 2b_1 + 4y$ حيث $y = (b_m b_{m-1} \ldots b_2)_2 = \sum_{k=0}^{m-2} b_{k+2} 2^k$.
نناقش إذن الحالات التالية :

- حالة $b_0 = 0$. في هذه الحالة يكون x عدداً زوجياً، فإذا عرّفنا $b_{k+1} = \delta_k$ كان

$$x = 2z \quad \text{و} \quad z = \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k 2^k$$

ومن ثَمّ، استناداً إلى تعريف f، وبناءً على صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_{m-1}$، يكون لدينا

$$\begin{aligned} f(x) = f(z) &= 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \delta_{m-1-k} 2^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{m-1} b_{m-k} 2^k = 1 + \sum_{k=1}^{m} b_{m-k} 2^k \end{aligned}$$

وقد نتجت المساواة الأخيرة من كون $b_0 = 0$. ومنه صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_m$ في هذه الحالة.

SMC

- حالة $(b_0, b_1) = (1,0)$. إذن $x = 1 + 4y$ ومن ثَمّ

$$f(x) = f(1+4y) = 2f(1+2y) - f(y)$$

وهنا نستفيد من صحّة الخاصّتين $\mathbb{P}_{m-1}$ و $\mathbb{P}_{m-2}$ لنستنتج أنّ

$$\begin{aligned} f((b_m b_{m-1} \ldots b_2 01)_2) = f(x) &= 2f((b_m \ldots b_2 1)_2) - f((b_m \ldots b_2)_2) \\ &= 2\left(2^{m-1} + \sum_{k=0}^{m-2} b_{m-k} 2^k\right) - \sum_{k=0}^{m-2} b_{m-k} 2^k \\ &= 2^m + \sum_{k=0}^{m-2} b_{m-k} 2^k = (10 b_2 \ldots b_{m-1} b_m)_2 \end{aligned}$$

ومنه صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_m$ في هذه الحالة أيضاً.

- حالة $(b_0, b_1) = (1,1)$. إذن $x = 3 + 4y$ ومن ثَمّ

$$f(x) = f(3+4y) = 3f(1+2y) - 2f(y)$$

وهنا نستفيد مجدّداً من صحّة الخاصّتين $\mathbb{P}_{m-1}$ و $\mathbb{P}_{m-2}$ لنستنتج أنّ

$$\begin{aligned} f\left(\left(b_m b_{m-1}\ldots b_2 11\right)_2\right) = f(x) &= 3f\left(\left(b_m\ldots b_2 1\right)_2\right) - 2f\left(\left(b_m\ldots b_2\right)_2\right) \\ &= 3\left(2^{m-1} + \sum_{k=0}^{m-2} b_{m-k}2^k\right) - 2\sum_{k=0}^{m-2} b_{m-k}2^k \\ &= 2^m + 2^{m-1} + \sum_{k=0}^{m-2} b_{m-k}2^k = \left(11b_2\ldots b_{m-1}b_m\right)_2 \end{aligned}$$

ونكون بذلك قد انتهينا من إثبات صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_m$ بوجه عام.

علينا الآن إيجاد عدد عناصر المجموعة

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* : (n \leq 1988) \text{ و } (f(n) = n) \right\}$$

لقد رأينا سابقاً أنّ المساواة $f(n) = n$ تعني أنّ الكتابة الإثنانيّة للعدد n متناظرة. ومنه إذا رمزنا بالرمز L_ℓ إلى الأعداد التي تتألّف كتابتها بالأساس 2 من $\ell+1$ خانةً، أي

$$L_\ell = \left\{ \left(1\varepsilon_{\ell-1}\ldots\varepsilon_0\right)_2 : \left(\varepsilon_k\right)_{0\leq k<\ell} \in \{0,1\}^\ell \right\}$$

ثُمّ رمزنا بالرمز S_ℓ إلى الأعداد n التي تتألّف كتابتها بالأساس 2 من $\ell+1$ خانةً، وتُحقّق $f(n) = n$، كان

$$S_\ell = \left\{ \left(1\varepsilon_{\ell-1}\varepsilon_{\ell-2}\ldots\varepsilon_2\varepsilon_1 1\right)_2 \in L_\ell : \forall k \in \{1,\ldots,[\ell/2]\}, \varepsilon_k = \varepsilon_{\ell-k} \right\}$$

ومن ثَمّ

$$\operatorname{card}(S_\ell) = 2^{[\ell/2]}$$

نعلم أنّ

$$1988 = 2^{11} - \left(2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2\right) = (11111000010)_2$$

إذن

$$(*) \quad \{n \leq 1988 : f(n) = n\} = \left(\bigcup_{0\leq\ell\leq 10} S_\ell\right) \setminus \left(S_{10} \cap \left]1988, 2047\right]\right)$$

لنبحث عن عناصر المجموعة $S_{10} \cap \left]1988, 2047\right]$. ولكنّ المتراجحة

$$\left(1\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_4\varepsilon_3\varepsilon_2\varepsilon_1 1\right)_2 \geq 1989 = (11111000011)_2$$

تُكافئ

$$\sum_{k=1}^{5} \varepsilon_k 2^k \geq \sum_{k=1}^{4} \left(1-\varepsilon_k\right) 2^{10-k} + 2$$

فإذا افترضنا أنّ أحد أعداد المجموعة $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ لا يساوي 1 وصلنا من المتراجحة السابقة إلى التناقض

$$2^6 - 2 \geq \sum_{k=1}^{5} \varepsilon_k 2^k \geq \sum_{k=1}^{4} (1 - \varepsilon_k) 2^{10-k} + 2 \geq 2 + 2^6$$

إذن يجب أن يكون $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$ ، وعليه

$$S_{10} \cap]1988, 2047] \subset \{(11111011111)_2, (11111111111)_2\}$$

والاحتواء العكسي واضحٌ. ومنه

$$\operatorname{card}(S_{10} \cap]1988, 2047]) = 2$$

وبالعودة إلى $(*)$ نجد

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(\{n \leq 1988 : f(n) = n\}) &= \left(\sum_{\ell=0}^{10} 2^{\lfloor \ell/2 \rfloor}\right) - 2 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{4} 2^{\lfloor 2k/2 \rfloor} + 2^{\lfloor (2k+1)/2 \rfloor}\right) + 2^5 - 2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{5} 2^k\right) + 30 = 2^6 - 2 + 30 = 92\end{aligned}$$

وبالنتيجة، فإنّ عدد الأعداد n التي هي أصغر أو تساوي 1988 وتُحقّق $f(n) = n$، يساوي 92. ■

④ أثبت أنّ مجموعة الأعداد الحقيقيّة x التي تُحقّق المتراجحة

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

هي اجتماع مجالات منفصلة مثنى مثنى، ومجموع أطوالها يساوي 1988.

لنتأمّل بوجه عام، وفي حالة n من $\mathbb{N}^*$ ، التابع

$$f : (\mathbb{R} \backslash \mathbb{N}_n) \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x-k}$$

التابع f معرّفٌ على $\mathbb{R} \backslash \mathbb{N}_n = I_0 \cup I_1 \cup \cdots \cup I_{n-1} \cup I_n$ وقد عرّفنا $I_0 =]-\infty, 1[$ و $I_n =]n, +\infty[$ و $I_k =]k, k+1[$ في حالة $1 \leq k < n$.

لنتأمّل إذن في حالة $h>0$ المجموعة $\mathcal{E}_h=\{x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}_n : f(x)\geq h\}$.

- التابع f سالبٌ تماماً على I_0، إذن $\mathcal{E}_h\cap I_0=\varnothing$.
- في حالة $1\leq k<n$، التابع f متناقصٌ تماماً على I_k وهو يُحقّق

$$\lim_{x\to k^+} f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to(k+1)^-} f(x)=-\infty$$

فللمعادلة $f(x)=h$، حلٌّ وحيدٌ ينتمي إلى I_k وليكن x_k، وعندها يكون

$$\mathcal{E}_h\cap I_k=\,]k,x_k\,]$$

- وأخيراً، التابع f متناقصٌ تماماً على I_n وهو يُحقّق

$$\lim_{x\to n^+} f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

فللمعادلة $f(x)=h$، حلٌّ وحيدٌ ينتمي إلى I_n وليكن x_n، وعندها يكون

$$\mathcal{E}_h\cap I_n=\,]n,x_n\,]$$

وهكذا نرى أنّ

$$\mathcal{E}_h=\bigcup_{1\leq k\leq n}\,]k,x_k\,]$$

أمّا قياس المجموعة $\mathcal{E}_h$ فيساوي

$$\lambda(\mathcal{E}_h)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-k)=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)-\frac{n(n+1)}{2}$$

وهنا نذكّر أنّ x_k هو الحلّ الوحيد من I_k للمعادلة $f(x)=h$. ولكن

$$f(x)=h\Leftrightarrow P(x)=0$$

و P هو كثير الحدود

$$P(X)=\prod_{1\leq j\leq n}(X-j)-\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n}k\prod_{1\leq j\leq n,j\neq k}(X-j)$$

ولّما كان $\deg P=n$ استنتجنا أنّ $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ هي جذور كثير الحدود P وأنها جميعاً جذورٌ بسيطة. إذن أمثال X^{n-1} في كثير الحدود P تساوي $-\sum_{k=1}^{n}x_k$، ومنه

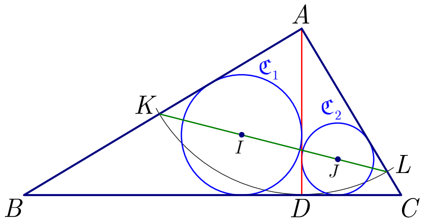
$$\sum_{k=1}^{n}x_k=\left(\sum_{k=1}^{n}j\right)+\frac{1}{h}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)=\left(1+\frac{1}{h}\right)\frac{n(n+1)}{2}$$

وأخيراً $\lambda(\mathcal{E}_h)=\dfrac{n(n+1)}{2h}$. وفي حالة $n=70$ و $h=\dfrac{5}{4}$ نجد $\lambda(\mathcal{E}_h)=1988$.

وهي النتيجة المرجوّة.

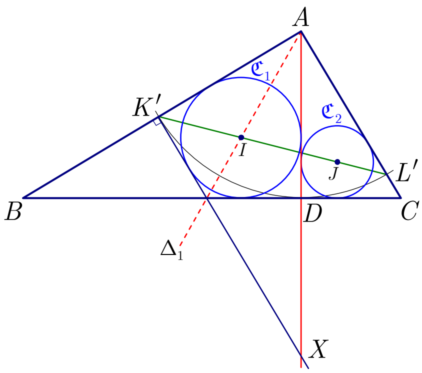
⑤ **نتأمّل مثلّثاً ABC قائماً في A. ولتكن D موقع الارتفاع النازل من A. يتقاطع المستقيم الواصل بين مركزَي الدائرتَيْن الماسّتَيْن داخلاً للمثلّثين ABD و ACD مع الضلعين $[AB]$ و $[AC]$ في النقطتين K و L بالترتيب. أثبت أنّ مساحة المثلّث ABC تساوي على الأقل ضعفي مساحة المثلّث AKL.**

الفكرة الأساس هي في إثبات أنّ $AK = AL = AD$.



لإثبات ذلك سنتبع الأسلوب التالي :

- لنعرّف النقطتين K' من $[AB]$ و L' من $[AC]$ بالمساواة $AK' = AD = AL'$، فيكون $L'AK'$ مثلّثاً قائماً ومتساوي الساقين. ثُمّ لنعرّف X نقطة تقاطع العمود على (AB) من K' مع المستقيم (AD). عندها يكون $(K'L')$ منصّف الزاوية $AK'X$.



- المثلّث $AK'X$ هو صورة ADB وفق التناظر القائم S_1 بالنسبة إلى المستقيم Δ_1، منصّف الزاوية $\widehat{BAD}$، ولكن المستقيم Δ_1 هو محور تناظر للدائرة $\mathfrak{C}_1$ الماسّة لأضلاع المثلّث ABD داخلاً، لأنّ مركزها I يقع على Δ_1. وهذا يقتضي أنّ $\mathfrak{C}_1$ هي أيضاً الدائرة الماسّة لأضلاع المثلّث $AK'X$ داخلاً. فمركزها I يقع على منصّف الزاوية $AK'X$، أي $(K'L')$.
- وبأسلوب مماثلٍ لِما سبق، نبرهن أيضاً أنّ J، مركز الدائرة $\mathfrak{C}_2$ الماسّة لأضلاع ADC داخلاً، يقع أيضاً على $(K'L')$. إذن $(K'L')$ هو أيضاً المستقيم المارُّ بمركزي الدائرتين $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$، ومن ثَمّ $K = K'$ و $L = L'$. لقد أثبتنا إذن أنّ $AK = AL = AD$.

لنأتِ الآن إلى مسألتنا، ولنكتب $\mathcal{A}_{UVW}$ دلالة على مساحة مثلّث UVW. عندئذ

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}AD \cdot BC \quad \text{و} \quad \mathcal{A}_{AKL} = \frac{1}{2}AK \cdot AL = \frac{1}{2}AD^2$$

ولكن، إذا كانت M منتصف الضلع $[BC]$ كان $BC = 2AM \geq 2AD$، ومن ثَمّ

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC \geq AD^2 = 2\mathcal{A}_{AKL}$$

وتحدث المساواة إذا وفقط إذا انطبقت M على D، أي إذا وفقط إذا كان المثلّث القائم ABC متساوي الساقين. ◼

⑥ **ليكن a و b عددان طبيعيّان موجبان تماماً، نفترض أنّ $ab+1$ يقسم a^2+b^2، والمطلوب هو إثبات أنّ خارج قسمة a^2+b^2 على $ab+1$ هو مربّعٌ كاملٌ في هذه الحالة.**

يمكن أن نفترض بسبب تناظر المسألة أنّ $0 < a \leq b$. لنرمز بالرمز q إلى أنّ خارج قسمة a^2+b^2 على $ab+1$.

- في حالة $a = b$، يكون a^2+1 قاسماً للعدد $2a^2$ ولكنّه أوّلي مع a^2، فهو إذن قاسمٌ للعدد 2، ولكن $2 \mid (a^2+1)$ يقتضي أنّ $a = 1$، ومن ثَمّ $q = 1$، والنتيجة المطلوبة محقّقة.
- لنفترض إذن أنّ $0 < a < b$ ثُمّ لنعرّف المجموعة

$$\mathcal{D}_q = \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2 : (0 < \alpha < \beta) \text{ و } \left(\alpha^2+\beta^2 = q(\alpha\beta+1)\right)\right\}$$

إنّ $\mathcal{D}_q \neq \varnothing$ وذلك لأنّ $(a,b) \in \mathcal{D}_q$. لنعرّف إذن العدد الطبيعي c بالعلاقة

$$c = \min\left\{\alpha \in \mathbb{N}^* : \exists\beta \in \mathbb{N},\ (\alpha,\beta) \in \mathcal{D}_q\right\}$$

عندئذ يوجد d من $\mathbb{N}$ يُحقّق

$$c^2+d^2 = q(cd+1) \quad \text{و} \quad 0 < c < d$$

ثُمّ نضع $m = cq - d$.

- من جهة أولى لدينا

$$qcd < q(cd+1) = c^2+d^2 < cd+d^2$$

ومن ثَمّ $qc < c+d$ أو $m < c$.

- ومن جهة ثانية لدينا

$$\begin{aligned} m^2+c^2-q(mc+1) &= (qc-d)^2+c^2-qc(qc-d)-q \\ &= c^2+d^2-q(cd+1) = 0 \end{aligned}$$

إذن

$$m^2 + c^2 = q(mc+1) \qquad (*)$$

وهذا يقتضي بوجه خاصّ أنّ $m \geq 0$.

- فإذا كان $m > 0$، استنتجنا ممّا سبق أنّ $(m,c) \in \mathcal{D}_q$ وهذا يتناقض مع تعريف c، لأنّ $m < c$.
- إذن يجب أن يكون $m = 0$، وعندئذ نستنتج من $(*)$ أنّ $q = c^2$. فالعدد q هو مربّع كامل.

وبذا يكتمل إثبات الخاصّة المرجوّة. ◼

① **أثبت أنّه يمكن تجزئة المجموعة $\{1,2,\ldots,1989\}$ إلى 117 مجموعة جزئيّة $(A_i)_{1\le i\le 117}$ يحوي كلٌّ منها 17 عنصراً، ومجموع عناصر كلٍّ منها مقدارٌ ثابت لا يتعلّق بها.**

لنلاحظ ما يلي :

- لمّا كان مجموع عناصر المجموعة $\mathbb{N}_{1989}=\{1,2,\ldots,1989\}$ يساوي 1989×995 استنتجنا أنّ عدد عناصر كلّ واحدة من المجموعات A_i يجب أن يساوي

$$\frac{1989\times 995}{117}=17\times 995$$

- في حالة k من $\mathbb{N}_{1989}$ سنكتب $\overline{k}=1990-k$، ونعرّف في حالة k من المجموعة $\mathbb{N}_{1989}\backslash\{995\}$، المجموعة الجزئيّة $C_k=\{k,\overline{k}\}$. عندئذ يكون مجموعُ عناصر كلّ واحدة من هذه المجموعات ذاوت العنصرين يساوي 2×995. ويكون

$$\mathbb{N}_{1989}=\{995\}\cup\Big(\bigcup_{1\le k\le 994}C_k\Big)$$

- تأتي الفكرة من ملاحظة أنّ $7\times 2+3=17$، فننشئ كلّ مجموعة من المجموعات A_i من اجتماع 7 مجموعات من بين $(C_k)_{1\le k\le 994}$، ومجموعة D_i مكوّنة من ثلاثة عناصر، مجموع عناصرها يساوي 3×995.

- إذن نبدأ بإنشاء المجموعات $(D_i)_{1\le i\le 117}$، على أن تكون منفصلة مثنى مثنى وعدد عناصر كلٍّ منها يساوي 3 ومجموع عناصر كلٍّ منها يساوي 3×995، وتكون متمّمة اجتماعها مكوّنة من اجتماعٍ لمجموعات من بين $(C_k)_{1\le k\le 994}$.

- لتحقيق ما سبق، يجب أن ينتمي العدد 995 إلى إحدى المجموعات $(D_i)_{1\le i\le 117}$ ولتكن D_{117}، عندئذ يمكننا أن نختار $D_{117}=C_1\cup\{995\}=\{1,995,1989\}$.
ثُمّ علينا إيجاد المجموعات $(D_i)_{1\le i\le 116}$ بأسلوبٍ تكون فيه متمّمة اجتماعها مكوّنة من اجتماعٍ لمجموعات من بين $(C_k)_{2\le k\le 994}$. ولكن

$$\mathrm{card}\left(\cup_{1\le i\le 116}D_i\right)=3\times 116=2\times 174$$

إذن علينا إيجاد مجموعة J محتواة في $\{2,\ldots,994\}$ وعدد عناصرها 174 تُحقّق

$$\cup_{1\le i\le 116}D_i=\cup_{k\in J}C_k$$

يكفي لتحقيق ذلك أن نُنشئ المجموعات $(D_i)_{i\leq 116}$ أزواجاً، فإذا أنشأنا المجموعة $D_{2\ell+1}=\{a,b,c\}$ عرّفنا $D_{2\ell+2}=\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ ليكون

$$D_{2\ell}\cup D_{2\ell+1}=C_a\cup C_b\cup C_c$$

بالطبع، علينا أن نضمن كون هذه المجموعات منفصلة ليتمّ الإنشاء، ولتحقيق ذلك سنعمل على اختيار هذه المجموعات بأسلوبٍ يقع فيه a و b و c و $\bar{a}$ و $\bar{b}$ و $\bar{c}$ في مجالات منفصلة ضمن المجموعة $\{2,\ldots,1988\}$.

هناك العديد من الخيارات، فمثلاً إذا عرّفنا، في حالة $0\leq\ell\leq 57$، ما يلي :

$$a_\ell=470+\ell \text{ و } b_\ell=528+\ell \text{ و } c_\ell=1987-2\ell$$

كان $a_\ell\in[470,527]$ و $b_\ell\in[528,585]$ و $c_\ell\in[1873,1987]$ ، وكذلك $\overline{a_\ell}\in[1463,1520]$ و $\overline{b_\ell}\in[1405,1462]$ و $\overline{c_\ell}\in[3,117]$ ، ومن الواضح أنّ المجالات $[3,117]$ و $[470,527]$ و $[528,585]$ و $[1463,1520]$ و $[1405,1462]$ و $[1873,1987]$ مجالات منفصلة مثنى مثنى. فنعرّف

$$D_{2\ell+1}=\{a_\ell,b_\ell,c_\ell\} \text{ و } D_{2\ell+2}=\{\overline{a_\ell},\overline{b_\ell},\overline{c_\ell}\}$$

ونضع

$$J=\{470+\ell:0\leq\ell\leq 115\}\bigcup\{1+2\ell,0\leq\ell\leq 58\}$$

فتكون المجموعات $(D_i)_{1\leq i\leq 117}$ منفصلة مثنى مثنى، وعدد عناصر كلٍّ منها يساوي 3 ومجموع عناصر كلٍّ منها يساوي 3×995. وأخيراً

$$\bigcup_{i=1}^{117}D_i=\{995\}\cup\left(\bigcup_{j\in J}C_j\right)$$

ومن ثَمّ

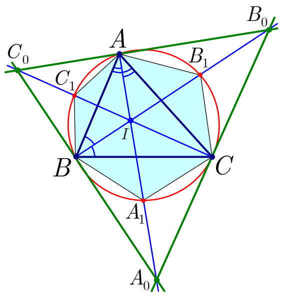
$$\mathbb{N}_{1989}\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{117}D_i\right)=\bigcup_{j\in\mathbb{N}_{994}\backslash J}C_j$$

ولكن

$$\operatorname{card}(\mathbb{N}_{994}\backslash J)=994-175=819=7\times 117$$

إذن يكفي أنّ نجزّئ، لا على التعيين، المجموعة $\mathbb{N}_{994}\backslash J$ إلى اجتماع 117 مجموعة جزئيّة $(J_i)_{1\leq i\leq 117}$ عدد عناصر كلٍّ منها يساوي 7، ثُمّ نضع $A_i=D_i\cup\left(\bigcup_{j\in J_i}C_j\right)$ لتحقّق المجموعات $(A_i)_{1\leq i\leq 117}$ الخاصّة المطلوبة. ∎

② **نتأمّل مثلّثاً حاد الزوايا ABC . يُلاقي المنصّف الداخلي للزاوية $\widehat{A}$ الدائرة $\mathfrak{C}$ ، المارّة برؤوس المثلّث ABC ، ثانية في A_1 . وكذلك يلاقي المنصّف الداخلي للزاوية $\widehat{B}$ الدائرة $\mathfrak{C}$ ثانية في B_1 ، و يلاقي المنصّف الداخلي للزاوية $\widehat{C}$ الدائرة $\mathfrak{C}$ ثانية في C_1 . نعرّف A_0 نقطة تقاطع المستقيم (AA_1) مع المنصّفين الخارجيّين للزاويتين $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$. ونعرّف بأسلوب مماثلٍ النقطتين B_0 و C_0 . أثبت أنّ مساحة المثلّث $A_0B_0C_0$ تساوي ضعفَي مساحة المضلّع السداسي $AC_1BA_1CB_1$ ، وهي تساوي على الأقل أربعة أمثال مساحة ABC .**



لنذكّر أنّ نقطة تقاطع المنصّفين الخارجيّين للزاويتين $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ تبعد عن المستقيمات (AC) و (BC) و (AB) البعدَ نفسه، وهي من ثَمّ تقع على المنصّف الداخلي (AA_1) للزاوية $\widehat{A}$ ، وهذا ما يبرِّر تعريف A_0 بأنها نقطة تقاطع المستقيمات الثلاثة (AA_1) والمنصّفين الخارجيّين للزاويتين $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$. وبالمُماثلة نبرّر تعريف النقطتين B_0 و C_0 .

▫ لتكن I نقطة تقاطع المنصّفات الداخليّة في المثلّث ABC ، أي مركز الدائرة الماسّة لأضلاع المثلّث ABC داخلاً.

من جهة أولى، لدينا

$$\widehat{IAC} = \tfrac{1}{2}\widehat{A} \quad \text{و} \quad \widehat{CAB_1} = \widehat{CBB_1} = \tfrac{1}{2}\widehat{B}$$

ومن جهة ثانية، من المثلّث ABI ، نجد

$$\widehat{B_0IA} = \tfrac{1}{2}\widehat{A} + \tfrac{1}{2}\widehat{B}$$

إذن $\widehat{B_0IA} = \widehat{IAB_1}$ ، ومن ثَمّ $B_1A = B_1I$.

ولّما كان المثلّث IAB_0 قائماً في A استنتجنا أنّ

$$\widehat{B_1AB_0} = \tfrac{\pi}{2} - \widehat{IAC} - \widehat{CAB_1} = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\widehat{B} - \tfrac{1}{2}\widehat{A}$$

و

$$\widehat{IB_0A} = \tfrac{\pi}{2} - \widehat{B_0IA} = \tfrac{\pi}{2} - \left(\tfrac{1}{2}\widehat{B} + \tfrac{1}{2}\widehat{A}\right)$$

وعليه نرى أنّ $\widehat{B_1AB_0} = \widehat{IB_0A}$ ، ومن ثَمّ $B_1A = B_1B_0$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ B_1 هي منتصف الوتر $[IB_0]$ في المثلّث القائم IAB_0 . فإذا رمزنا $\mathcal{A}(P)$ دلالة على مساحة مضلّع P ، استنتجنا مما سبق أنّ $\mathcal{A}(IAB_0) = 2\mathcal{A}(IAB_1)$.

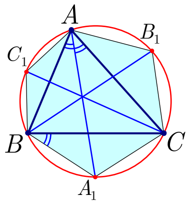
ونبرهن بالمُماثلة أنّ $\mathcal{A}(IAC_0) = 2\mathcal{A}(IAC_1)$. وكذلك

$$\mathcal{A}(IBC_0) = 2\mathcal{A}(IBC_1), \quad \mathcal{A}(IBA_0) = 2\mathcal{A}(IBA_1)$$
$$\mathcal{A}(ICA_0) = 2\mathcal{A}(ICA_1), \quad \mathcal{A}(ICB_0) = 2\mathcal{A}(ICB_1)$$

وبجمع المساويات السابقة طرفاً إلى طرفٍ نجد

$$\mathcal{A}(A_0B_0C_0) = 2\mathcal{A}(AC_1BA_1CB_1)$$

▫ لإثبات الشقّ الثاني، نرمز كالعادة a و b و c إلى أطوال أضلاع المثلّث ABC المُقابلة للزوايا $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$، ونرمز R إلى نصف قطر الدائرة المارّة برؤوسه.



لحساب مساحة المثلّث المتساوي الساقين BA_1C، نلاحظ أنّ $BC = a$ وأنّ طول الارتفاع النازل من A_1 يساوي $\frac{1}{2}a\tan\left(\frac{1}{2}\widehat{A}\right)$، وعليه فإنّ

$$\mathcal{A}(BA_1C) = \frac{a^2}{4}\tan\left(\tfrac{1}{2}\widehat{A}\right) = R^2\sin^2\widehat{A}\cdot\tan\left(\tfrac{1}{2}\widehat{A}\right)$$

فإذا عرّفنا $x = \tan\left(\frac{1}{2}\widehat{A}\right)$، كان $\sin\widehat{A} = \dfrac{2x}{1+x^2}$، ومن ثَمّ

$$\mathcal{A}(BA_1C) = 4R^2\frac{x^3}{(1+x^2)^2}$$

وبالمُماثّلة، إذا عرّفنا $y = \tan\left(\frac{1}{2}\widehat{B}\right)$ و $z = \tan\left(\frac{1}{2}\widehat{C}\right)$ كان

$$\mathcal{A}(AC_1B) = 4R^2\frac{z^3}{(1+z^2)^2} \quad \text{و} \quad \mathcal{A}(CB_1A) = 4R^2\frac{y^3}{(1+y^2)^2}$$

وعليه إذا عرّفنا

$$\mathcal{S} = \mathcal{A}(BA_1C) + \mathcal{A}(CB_1A) + \mathcal{A}(AC_1B)$$

استنتجنا من بالاستفادة من المتراجحة المعروفة بين المتوسطين الحسابي والهندسي، أنّ

$$\frac{\mathcal{S}}{3} = \frac{4R^2}{3}\left(\frac{x^3}{(1+x^2)^2} + \frac{y^3}{(1+y^2)^2} + \frac{z^3}{(1+z^2)^2}\right)$$
$$\geq 4R^2\cdot\sqrt[3]{\frac{x^3}{(1+x^2)^2}\cdot\frac{y^3}{(1+y^2)^2}\cdot\frac{z^3}{(1+z^2)^2}}$$

ومن ثَم

$$\mathcal{S} \geq 12R^2\cdot\frac{xyz}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2(1+y^2)^2(1+z^2)^2}}$$

أمّا مساحة المثلّث ABC فتعطى بالصيغة

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ABC) &= 2R^2 \sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}\\ &= 16R^2\frac{xyz}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}\end{aligned}$$

ومنه نستنتج أنّ

$$\frac{\mathcal{S}}{\mathcal{A}(ABC)} \geq \frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} \qquad (1)$$

من جهة أخرى، إذا تأمّلنا التابع

$$f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, f(t) = \ln\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right) = -2\ln(\cos t)$$

لاحظنا أنّ التابع f'، المعرّف بالصيغة $f'(t) = 2\tan(t)$، تابعٌ متزايدٌ تماماً على $[0,\frac{\pi}{2}[$، وهذا يقتضي أنّ التابع f تابع محدّبٌ على المجال $[0,\frac{\pi}{2}[$ نفسه. وعليه فإنّ

$$\frac{1}{3}\left(f\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)+f\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)+f\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)\right) \geq f\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}}{6}\right)$$

أو

$$\frac{1}{3}(\ln(1+x^2)+\ln(1+y^2)+\ln(1+z^2)) \geq \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

وأخيراً

$$\sqrt[3]{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} \geq \frac{4}{3}$$

فإذا استفدنا من هذه المتراجحة في (1) استنتجنا أنّ $\mathcal{S} \geq \mathcal{A}(ABC)$، ولكن من الواضح أنّ $\mathcal{A}(AC_1BA_1CB_1) = \mathcal{S} + \mathcal{A}(ABC)$، إذن

$$\mathcal{A}(AC_1BA_1CB_1) \geq 2\mathcal{A}(ABC)$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\mathcal{A}(A_0B_0C_0) = 2\mathcal{A}(AC_1BA_1CB_1) \geq 4\mathcal{A}(ABC)$$

ويتمّ الإثبات. ■

③ n و k عددان طبيعيّان موجبان تماماً، و $\mathcal{Q}$ مجموعة مؤلّفة من n نقطة من نقاط المستوي لا تقع أي ثلاث منها على استقامة واحدة. نفترض أنّ أيّ نقطة P من $\mathcal{Q}$ تبعد المسافة نفسها عن k نقطة على الأقلّ من نقاط $\mathcal{Q}$. أثبت أنّ $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

لنرمز بالرمز $\mathcal{S} = \mathcal{Q}^{(2)}$ إلى مجموعة المجموعات الجزئيّة من $\mathcal{Q}$ المكوّنة من عنصرين، والتي يمكن المطابقة بينها وبين مجموعة القطع المستقيمة الواصلة بين نقطتين من $\mathcal{Q}$.

ثُمّ لنتأمّل المجموعة $\mathfrak{D}$ المكوّنة من الثنائيّات $(P,[AB])$، إذْ P نقطة من $\mathcal{Q}$، و $[AB]$ قطعة مستقيمة من $\mathcal{S}$ ومحورها يمر بالنقطة P. فيكون $\mathfrak{D} \subset \mathcal{Q} \times \mathcal{S}$. سنجزّئ المجموعة $\mathfrak{D}$ بأسلوبين :

- في حالة قطعة مستقيمة $s = [AB]$ من $\mathcal{S}$ نعرّف

$$\mathcal{Q}_s = \{P \in \mathcal{Q} : (P,s) \in \mathfrak{D}\}$$

إذن $\mathcal{Q}_s$ هي مجموعة نقاط المجموعة $\mathcal{Q}$ المتساوية البُعد عن طرَفَي القطعة المستقيمة s. استناداً إلى الفرْض، لا يوجد في $\mathcal{Q}$ ثلاث نقاط على استقامة واحدة، وهذا يقتضي أنّه بوجه عام لدينا $\operatorname{card}\left(\mathcal{Q}_s\right) \leq 2$.

- وفي حالة نقطة P من $\mathcal{Q}$ نعرّف

$$\mathcal{S}_P = \{s \in \mathcal{S} : (P,s) \in \mathfrak{D}\}$$

إذن $\mathcal{S}_P$ هي مجموعة القطع المستقيمة الواصلة بين نقاط من $\mathcal{Q}$ وتبعد عن P أطرافها البُعد نفسه. استناداً إلى الفرْض، يوجد في $\mathcal{Q}$ مجموعة جزئيّة عدد عناصرها k على الأقل مؤلّفة من نقاط تبعد البُعد نفسه عن P، فالنقطة P تقع على محور $\frac{k(k-1)}{2}$ قطعة مستقيمة من $\mathcal{S}$ على الأقل. وهذا يقتضي أنّ $\operatorname{card}\left(\mathcal{S}_P\right) \geq \frac{k(k-1)}{2}$.

ولكن لدينا وضوحاً

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{Q}_s = \bigcup_{P \in \mathcal{Q}} \mathcal{S}_P$$

إذن

$$\operatorname{card}(\mathfrak{D}) = \sum_{P \in \mathcal{Q}} \operatorname{card}(\mathcal{S}_P) \geq \operatorname{card}(\mathcal{Q}) \times \frac{k(k-1)}{2} = n \times \frac{k(k-1)}{2}$$

$$\operatorname{card}(\mathfrak{D}) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \operatorname{card}\left(\mathcal{Q}_s\right) \leq \operatorname{card}(\mathcal{S}) \times 2 = \frac{n(n-1)}{2} \times 2$$

نستنتج إذن أنّ $n(n-1) \geq n \times \frac{k(k-1)}{2}$ أو

$$k^2 - k + 2 \leq 2n$$

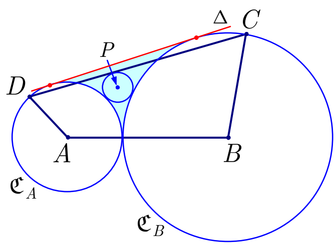
وهذا يقتضي أنّ $\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 = k^2 - k + \frac{1}{4} < 2n$ ، ومن ثَمّ $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$. ■

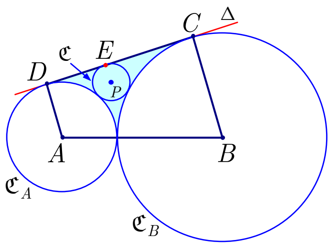
④ **ليكن $ABCD$ رُباعيّاً محدّباً في المستوي تُحقّق أضلاعه $[AB]$ و $[BC]$ و $[AD]$ المساواة $AB = AD + BC$ ، ونفترض وجود نقطة P داخل الرباعي تبعد عن المستقيم (CD) مسافة تساوي h وتُحقّق $AP = h + AD$ و $BP = h + BC$. أثبت أنّ**

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

من الواضح أننا نسعى إلى تعيين الحدّ الأعلى للقيم التي يمكن أن يأخذها المقدار h .

لتكن $\mathfrak{C}_A$ الدائرة التي مركزها A وتمرّ بالنقطة D ، ولتكن $\mathfrak{C}_B$ الدائرة التي مركزها B وتمرّ بالنقطة C ، استناداً إلى الفرض، تكون هاتان الدائرتان متماسّتين في نقطة من الضلع $[AB]$. وأخيراً لتكن $\mathfrak{C}$ الدائرة التي مركزها P ونصف قطرها h ، وأخيراً ليكن Δ المماس المشترك للدائرتين $\mathfrak{C}_A$ و $\mathfrak{C}_B$ والواقع من جهة C و D بالنسبة إلى المستقيم (AB) .

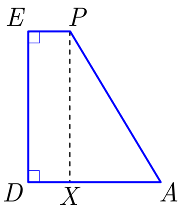




المستقيم Δ يقسم المستوي إلى نصفَي مستويين أحدهما، وليكن $\mathcal{P}_+$ ، يحوي الدائرتين $\mathfrak{C}_A$ و $\mathfrak{C}_B$ فهو نفسه يحوي النقطتين C و D ، ومن ثَمّ يحوي الضلع $[CD]$. ولمّا كانت الدائرة $\mathfrak{C}$ تمسّ خارجاً الدائرتين $\mathfrak{C}_A$ و $\mathfrak{C}_B$ كما تمسّ الضلع $[CD]$ ، استنتجنا مما سبق أنها محتواة في جزء المستوي الواقع داخل $\mathcal{P}_+$ وخارج الدائرتين $\mathfrak{C}_A$ و $\mathfrak{C}_B$. أي إنّ الدائرة $\mathfrak{C}$ محتواة في « المثلّث المنحني » المكوّن من الدائرتين $\mathfrak{C}_A$ و $\mathfrak{C}_B$ والمماس المشترك Δ .

وعلى هذا يبلغ h قيمته العظمى h_0 عندما ينطبق (CD) على المماس المشترك Δ . وتكون من ثَمّ C و D هما نقطتا التقاء المماس المشترك Δ مع الدائرتين $\mathfrak{C}_A$ و $\mathfrak{C}_B$. لنفترض إذن أننا في هذا الوضع ولنحسب h_0 .

لتكن E نقطة تماس الدائرة $\mathfrak{C}$ مع المستقيم Δ . عندئذ من شبه المنحرف $APED$ نستنتج أنّ



$$\begin{aligned} ED^2 &= AP^2 - AX^2 \\ &= (AD + h_0)^2 - (AD - h_0)^2 = 4AD \cdot h_0 \end{aligned}$$

ونجد بأسلوبٍ مماثل، من شبه المنحرف $BPEC$ أنّ

$$EC^2 = 4BC \cdot h_0$$

وأخيراً، بالاعتماد على شبه المنحرفّ $ABCD$ نجد كذلك أنّ $CD^2 = 4AD \cdot BC$.

وعندها تُكتب المساواة $CD = CE + ED$ بالشكل

$$2\sqrt{AD} \cdot \sqrt{BC} = 2\sqrt{BC}\sqrt{h_0} + 2\sqrt{AD}\sqrt{h_0}$$

أي

$$\frac{1}{\sqrt{h_0}} = \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

ولمّا كانت أيّ قيمة للعدد h تُحقّق المتراجحة $h \le h_0$ استنتجنا صحّة المتراجحة المطلوبة. ■

⑤ أثبت أنّه أيّاً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n، فتوجد مجموعة S مكوّنة من عددٍ n من الأعداد الطبيعيّة المتتالية، دون أن تحوي أي عددٍ أوّليّ أو أيّة قوّة لعددٍ أوّلي.

لنتأمّل في حالة $2 \le k \le m$ ، العدد الطبيعي $A_{k,m} = (m!)^2 + k$. ولنلاحظ أنّه إذا عرّفنا $Q_{k,m}$ بأنّه خارج قسمة $m!$ على k ، وهو من ثَمّ جداء ضرب جميع الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً وأصغر من m ، والمختلفة عن k . عندئذ نرى مباشرة أنّ

$$A_{k,m} = k^2 (Q_{k,m})^2 + k = k\Big(k \times (Q_{k,m})^2 + 1\Big) \qquad (1)$$

- إذن العدد $A_{k,m}$ ليس عدداً أوّلياً لأنّه يقبل القسمة على k ، وخارج القسمة أكبر تماماً من الواحد.
- إذا كان $A_{k,m}$ قوّةً لعددٍ أوّلي p ، كانت جميع قواسم $A_{k,m}$ ، عدا الواحد، قوى لهذا العدد، ووصلنا من العلاقة (1) إلى التناقض التالي :

$$k \times (Q_{k,m})^2 + 1 = 0 \bmod p \quad \text{و} \quad k = 0 \bmod p$$

يكفي إذن أن نختار $S = \{A_{k,n+1} : 2 \le k \le n+1\}$ ليتم المطلوب. ■

⑥ **نقول إنّ التبديل σ من $\mathfrak{S}_{2n}$ ، أي مجموعة تباديل المجموعة $\mathbb{N}_{2n} = \{1,2,\dots,2n\}$ ، يُحقّق الخاصّة $\mathbb{P}$ إذا وفقط إذا وُجِدَ دليلٌ i من المجموعة $\{1,2,\dots,2n-1\}$ يُحقق**

$$|\sigma(i)-\sigma(i+1)| = n$$

أثبت أنّه مهما تكن قيمة n ، يكن عدد التباديل من $\mathfrak{S}_{2n}$ التي تُحقّق الخاصّة $\mathbb{P}$ أكبر من عدد التباديل التي لا تُحقّقها.

لنعرّف المجموعات $(A_i)_{i\in\mathbb{N}_{2n-1}}$ مع $A_i = \{i,i+1\}$ ، وكذلك المجموعات $(B_k)_{k\in\mathbb{N}_n}$ مع $B_k = \{k,k+n\}$. ثُمّ لنعرّف المجموعات الجزئيّة $(\mathcal{S}_{i,k})_{(i,k)\in\mathbb{N}_{2n}\times\mathbb{N}_n}$ من $\mathfrak{S}_{2n}$ بالصيغة

$$\mathcal{S}_{i,k} = \{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n} : \sigma(A_i) = B_k\}$$

ثُمّ لنضع $\mathcal{T}_k = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_{2n-1}} \mathcal{S}_{i,k}$ ، و $\mathcal{P} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} \mathcal{T}_k$. عندئذ يُحقّق σ الخاصّة $\mathbb{P}$ إذا وفقط إذا كان σ عنصراً من $\mathcal{P}$ ، والمطلوب هو إثبات أنّ $\operatorname{card}(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{2}\operatorname{card}(\mathfrak{S}_{2n})$.

لتحقيق ذلك سنستفيد من الخاصّة التالية :

خاصّة : في حالة مجموعات منتهية $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_n}$ تتحقّق المتراجحة

$$\operatorname{card}\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}_n} X_j\Big) \geq \sum_{j=1}^{n}\operatorname{card}(X_j) - \sum_{1\leq \ell<k\leq n}\operatorname{card}(X_\ell\cap X_k)$$

في الحقيقة، يجري إثبات هذه الخاصّة بالتدريج على العدد n ، إذْ إنّها صحيحة وضوحاً في حالة $n=1$ و $n=2$. وإذا كانت صحيحة في حالة n يكون لدينا

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}_{n+1}} X_j\Big) &= \operatorname{card}\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}_n} X_j\Big) + \operatorname{card}(X_{n+1}) - \operatorname{card}\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}_n}(X_j\cap X_{n+1})\Big)\\
&\geq \sum_{j=1}^{n+1}\operatorname{card}(X_j) - \sum_{1\leq\ell<k\leq n}\operatorname{card}(X_\ell\cap X_k) - \sum_{1\leq\ell\leq n}\operatorname{card}(X_\ell\cap X_{n+1})\\
&= \sum_{j=1}^{n+1}\operatorname{card}(X_j) - \sum_{1\leq\ell<k\leq n+1}\operatorname{card}(X_\ell\cap X_k)
\end{aligned}$$

وهي النتيجة في حالة $n+1$.

- ولكن من جهة أولى لدينا $\operatorname{card}(\mathcal{S}_{i,k}) = 2\times(2n-2)!$ إذن

$$\operatorname{card}(\mathcal{T}_k) = \sum_{i=1}^{2n-1}\operatorname{card}(\mathcal{S}_{i,k}) = 2(2n-1)!$$

- ومن جهة ثانية، في حالة $\ell < k$ لدينا

$$\operatorname{card}\left(S_{i,k} \cap S_{j,\ell}\right) = \begin{cases} 0 & : \quad |i-j| \leq 1 \\ 2 \times 2 \times (2n-4)! & : \quad |i-j| > 1 \end{cases}$$

إذن

$$\begin{aligned} \operatorname{card}(\mathcal{T}_\ell \cap \mathcal{T}_k) &= \sum_{1 \leq i,j \leq 2n-1} \operatorname{card}\left(\mathcal{S}_{i,k} \cap \mathcal{S}_{j,\ell}\right) \\ &= 4(2n-2)(2n-3) \times (2n-4)! = 4(2n-2)! \end{aligned}$$

ولكن اعتماداً على الخاصّة التي أثبتناها نرى أنّ

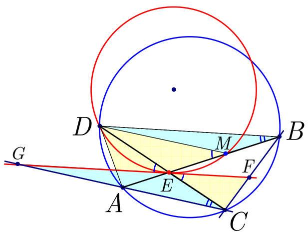
$$\begin{aligned} \operatorname{card}(\mathcal{P}) &\geq \sum_{k=1}^{n} \operatorname{card}(\mathcal{T}_k) - \sum_{1 \leq \ell < k \leq n} \operatorname{card}(\mathcal{T}_\ell \cap \mathcal{T}_k) \\ &\geq n \times 2(2n-1)! - \frac{n(n-1)}{2} \times 4(2n-2)! \\ &\geq (2n)! - \frac{n-1}{2n-1}(2n)! \\ &= (2n)! \times \left(\frac{n}{2n-1}\right) > \frac{1}{2} \times (2n)! \end{aligned}$$

وبذا يتمّ إثبات الخاصّة المطلوبة. ■

أولمبياد الرياضيّات الحادي والثلاثون

① **نتأمّل في دائرة $\mathfrak{C}$ وترين $[AB]$ و $[CD]$، يتقاطعان داخلها في نقطة E. لتكن M نقطة من داخل القطعة المستقيمة $[EB]$، عندئذ يقطع المماس المُنشأ من E للدائرة المارّة برؤوس المثلّث DEM المستقيمين (BC) و (AC) في F و G بالترتيب. أوجد عبارة النسبة $\frac{EG}{EF}$ بدلالة المقدار** $t = \frac{AM}{AB}$.

■ لنثبت أوّلاً تشابه المثلّثين CEG و BMD.



في الحقيقة، $\widehat{ECG} = \widehat{DBM}$ لأنّ $ACBD$ رباعي دائري.
وكذلك، الزاوية المماسيّة $\widehat{DEG}$ تساوي الزاوية المحيطيّة $\widehat{DME}$ التي تشترك معها بالقوس $\widehat{DE}$. ومنه نستنتج تَساوي الزاويتين المكمّلتين $\widehat{BMD}$ و $\widehat{CEG}$. وبذا يكتمل إثبات تشابه المثلّثين CEG و BMD، وبوجه خاصّ يكون

$$\frac{EC}{BM} = \frac{EG}{DM} \qquad (1)$$

■ لنثبت كذلك تشابه المثلّثين CEF و AMD.

في الحقيقة، $\widehat{ECF} = \widehat{DAM}$ لأنّ $ACBD$ رباعي دائري. وكذلك، لدينا

$$\widehat{FEC} = \widehat{GED} = \widehat{DME} = \widehat{DMA}$$

وبذا يكتمل إثبات تشابه المثلّثين CEF و AMD، وبوجه خاصّ يكون

$$\frac{AM}{EC} = \frac{DM}{EF} \qquad (2)$$

وبضرب المساواتين (1) و (2) طرفاً بطرف نستنتج أنّ

$$\frac{EG}{EF} = \frac{AM}{BM} = \frac{AM}{AB - AM} = \frac{t}{1-t}$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

② **نتأمّل عدداً طبيعيّاً $n \geq 3$، ومجموعة $\mathcal{E}$ مكوّنة من $2n-1$ نقطة مختلفة موزّعة على محيط دائرة. نفترض أنّ علينا تلوين k نقطة منها باللون الأسود. نقول إنّ هذا التلوين « جيدٌ » إذا احتوى داخلُ قوسٍ، طرفاه نقطتين من هذه النقاط السوداء، على n نقطة من نقاط المجموعة $\mathcal{E}$. أوجد أصغر قيمة للعدد k يكون عندها كلُّ تلوينٍ لعددٍ k من نقاط $\mathcal{E}$ « جيّداً ».**

لنطابق بين نقاط المستوي والمستوي العقدي $\mathcal{P}$، ولنضع $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{2n-1}\right)$. عندئذ يمكن أن نفترض أنّ

$$\mathcal{E} = \left\{\omega^k : k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\omega^k : 0 \leq k < 2n-1\right\}$$

ولنعرّف التقابل φ وتقابله العكسي φ^{-1} على المجموعة $\mathcal{E}$ كما يلي :

$$\varphi \ : \mathcal{E} \to \mathcal{E}, z \mapsto \omega^{n+1} \cdot z$$

$$\varphi^{-1} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}, z \mapsto \omega^{n-2} \cdot z$$

عندئذ نقول إنّ المجموعة الجزئيّة $\mathcal{B}$ من $\mathcal{E}$ « جيّدة »، (وهي تمثّل مجموعة العناصر الملوّنة باللون الأسود)، إذا وفقط إذا وُجدَ z من $\mathcal{B}$، يُحقّق أنّ $\varphi(z) \in \mathcal{B}$ أو $\varphi^{-1}(z) \in \mathcal{B}$.

وعلى هذا تكون المجموعة الجزئيّة $\mathcal{B}$ من $\mathcal{E}$ « سيِّئة »، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط : أيّاً كان z من $\mathcal{B}$، كان $\varphi(z) \notin \mathcal{B}$ و كان $\varphi^{-1}(z) \notin \mathcal{B}$، أي

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathcal{E}, \quad z \in \mathcal{B} &\Rightarrow (z \notin \varphi(\mathcal{B})) \wedge \left(z \notin \varphi^{-1}(\mathcal{B})\right) \\ &\Rightarrow z \in \mathcal{E} \backslash \left(\varphi(\mathcal{B}) \cup \varphi^{-1}(\mathcal{B})\right) \end{aligned}$$

وهذا الشرط يُكافئ

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{E} \backslash \left(\varphi(\mathcal{B}) \cup \varphi^{-1}(\mathcal{B})\right)$$

أو

$$\mathcal{B} \bigcap \left(\varphi(\mathcal{B}) \cup \varphi^{-1}(\mathcal{B})\right) = \varnothing$$

ولأنّ φ تقابلٌ، فإنّ هذا الشرط يُكافئ $\varphi(\mathcal{B}) \bigcap \left(\varphi^2(\mathcal{B}) \cup \mathcal{B}\right) = \varnothing$. ولكن

$$\forall z \in \mathcal{E}, \varphi^2(z) = \omega^{2n+2} \cdot z = \omega^3 \cdot z$$

إذن تكون المجموعة الجزئيّة $\mathcal{B}$ من $\mathcal{E}$ « سيِّئة »، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط :

$$\varphi(\mathcal{B}) \bigcap \left(\omega^3 \mathcal{B} \cup \mathcal{B}\right) = \varnothing$$

نعرّف إذن العدد ℓ_n من $\{0,1,\ldots,2n-1\}$ بالصيغة

$$\ell_n = \max\left\{\operatorname{card}(\mathcal{B}) : (\mathcal{B} \subset \mathcal{E}) \wedge \left(\varphi(\mathcal{B}) \bigcap \left(\omega^3\mathcal{B} \cup \mathcal{B}\right) = \varnothing\right)\right\}$$

أي إنّ ℓ_n يساوي عدد عناصر أكبر مجموعة «سيِّئة» في $\mathcal{E}$. وعلى هذا يكون العدد k المطلوب في نصّ المسألة مساوياً $\ell_n + 1$.

لتكن $\mathcal{B}$ مجموعة سيِّئة، عندئذ نستنتج من كون المجموعتين $\varphi(\mathcal{B})$ و $\omega^3\mathcal{B} \cup \mathcal{B}$ منفصلتين أنّ

$$\operatorname{card}(\varphi(\mathcal{B})) + \operatorname{card}\left(\omega^3\mathcal{B} \cup \mathcal{B}\right) \leq \operatorname{card}(\mathcal{E}) = 2n - 1$$

ولكن

$$\operatorname{card}(\mathcal{B}) \leq \operatorname{card}\left(\omega^3\mathcal{B} \cup \mathcal{B}\right) \quad \text{و} \quad \operatorname{card}(\varphi(\mathcal{B})) = \operatorname{card}(\mathcal{B})$$

إذن، لا بُدّ أن يكون $2\operatorname{card}(\mathcal{B}) \leq 2n - 1$، ومن ثَمّ $\operatorname{card}(\mathcal{B}) \leq n - 1$. وهكذا نكون قد أثبتنا بوجه عامٍّ أنّ $\ell_n \leq n - 1$.

من الواضح أنّه كلّما كان التقاطع $\omega^3\mathcal{B} \cap \mathcal{B}$ صغيراً كان الاجتماع $\omega^3\mathcal{B} \cup \mathcal{B}$ كبيراً، وكان الفراغ المتروك للمجموعة $\varphi(\mathcal{B})$، (ومن ثَمّ للمجموعة $\mathcal{B}$)، صغيراً. فإذا أردنا إيجاد مجموعة سيِّئة $\mathcal{B}$ كبيرة العدد فعلينا إيجادها من بين المجموعات التي تجعل التقاطع $\omega^3\mathcal{B} \cap \mathcal{B}$ كبيراً، أي تلك المجموعات التي ضرب عنصرٍ منها بالعدد ω^3 لا يُخرجه منها إلاّ نادراً. وهنا نرى الدور المهمّ الذي تؤدّيه مجموعات جزئيّة من $\mathcal{E}$ من الشكل

$$A_{(r,a,b)} = \left\{\omega^{3k+r} : a \leq k < b\right\}$$

أمّا تأثير φ على هذه المجموعات فيتبع باقي قسمة n على 3 ومنه الحالات التالية.

- حالة $n \bmod 3 = 0$، أي $n = 3m$.

سنثبت في هذه الحالة أنّ $\ell_n = n - 1$ وذلك بإيجاد مجموعة سيّئة $\mathcal{B}$ عدد عناصرها يساوي $3m - 1$. نلاحظ أوّلاً أنّه في هذه الحالة $\gcd(3, 2n-1) = 1$ إذن العدد ω^3 هو مولّدٌ لزمرة الجذور من المرتبة $2n - 1$ للواحد، وهذا يعني أنّ

$$\mathcal{E} = \left\{\omega^{3k} : 0 \leq k < 6m - 1\right\}$$

يكفي أن نعرّف

$$\mathcal{B} = \left\{\omega^{3k} : 0 \leq k < 3m - 1\right\}$$

فنلاحظ أوّلاً أنّ $\operatorname{card}(\mathcal{B}) = 3m - 1 = n - 1$.

ولمّا كان $\omega^{6m}=\omega$ استنتجنا أنّ $\omega^{n+1}=\omega^{3m+6m}=\omega^{3(3m)}$، وعليه نرى أنّ

$$\begin{aligned}\varphi(\mathcal{B})&=\left\{\omega^{3(k+3m)}:0\le k<3m-1\right\}\\&=\left\{\omega^{3k}:3m\le k<6m-1\right\}\end{aligned}$$

و $\omega^3\mathcal{B}\cup\mathcal{B}=\mathcal{B}\cup\left\{\omega^{3(3m-1)}\right\}$، ومن ثَمّ $\varphi(\mathcal{B})\cap\left(\omega^3\mathcal{B}\cup\mathcal{B}\right)=\varnothing$. أي إنّ المجموعة $\mathcal{B}$ مجموعة سيِّئة عددُ عناصرها يساوي الحد الأعلى $n-1$. فنكون قد أثبتنا صحّة الاقتضاء:

$$n\bmod 3=0\Rightarrow \ell_n=n-1 \qquad (1)$$

- حالة $n\bmod 3=1$، أي $n=3m+1$.

سنثبت في هذه الحالة أيضاً أنّ $\ell_n=n-1$ وذلك بإيجاد مجموعة سيّئة $\mathcal{B}$ عدد عناصرها يساوي $n-1=3m$. نلاحظ أوّلاً أنّه في هذه الحالة $\gcd(3,2n-1)=1$ إذن العدد ω^3 هو مولّدٌ لزمرة الجذور من المرتبة $2n-1$ للواحد، وهذا يعني أنّ

$$\mathcal{E}=\left\{\omega^{3k}:0\le k<6m-1\right\}$$

نعرّف كما في السابق

$$\mathcal{B}=\left\{\omega^{3k}:0\le k<3m\right\}$$

فنلاحظ أوّلاً أنّ $\operatorname{card}(\mathcal{B})=3m=n-1$.

ولمّا كان $\omega^{6m+3}=\omega^2$ استنتجنا أنّ $\omega^{n+1}=\omega^{3m+6m+3}=\omega^{3(3m+1)}$، وعليه نرى

$$\begin{aligned}\varphi(\mathcal{B})&=\left\{\omega^{3(k+3m+1)}:0\le k<3m\right\}\\&=\left\{\omega^{3k}:3m+1\le k<6m+1\right\}\end{aligned}$$

و $\omega^3\mathcal{B}\cup\mathcal{B}=\mathcal{B}\cup\left\{\omega^{3(3m)}\right\}$، ومن ثَمّ $\varphi(\mathcal{B})\cap\left(\omega^3\mathcal{B}\cup\mathcal{B}\right)=\varnothing$. أي إنّ المجموعة $\mathcal{B}$ مجموعة سيِّئة عددُ عناصرها يساوي الحد الأعلى $n-1$. فنكون قد أثبتنا صحّة الاقتضاء:

$$n\bmod 3=1\Rightarrow \ell_n=n-1 \qquad (2)$$

- حالة $n\bmod 3=2$، أي $n=3m+2$.

سنثبت في هذه الحالة أنّ $\ell_n=n-2$. والسبب في ذلك أنّ $\gcd(3,2n-1)=3$، وعلى هذا يمكن تجزئة المجموعة $\mathcal{E}$ في هذه الحالة إلى ثلاث مجموعات منفصلة A_0 و A_1 و A_2، هي $A_r=\left\{\omega^{3k+r}:0\le k<2m+1\right\}$ مع r من $\{0,1,2\}$.

كلٌّ من هذه المجموعات يُحقّق $A_r = \omega^3 A_r$ و $\varphi(A_r) = A_r$. وعليه إذا كانت $\mathcal{B}$ مجموعة سيِّئة، وعرّفنا $\mathcal{B}_r = \mathcal{B} \cap A_r$ في حالة r من $\{0,1,2\}$، استنتجنا من الفرْض

$$\varphi(\mathcal{B}) \cap \left(\omega^3 \mathcal{B} \cup \mathcal{B}\right) = \varnothing$$

أنّ

$$\forall r \in \{0,1,2\}, \quad \varphi(\mathcal{B}_r) \cap \left(\omega^3 \mathcal{B}_r \cup \mathcal{B}_r\right) = \varnothing$$

وهذا يقتضي، في حالة r من $\{0,1,2\}$، أنّ $2\,\mathrm{card}(\mathcal{B}_r) \le \mathrm{card}(A_r) = 2m+1$.

وعليه يكون $\forall r \in \{0,1,2\}, \ \mathrm{card}(\mathcal{B}_r) \le m$، وأخيراً

$$\mathrm{card}(\mathcal{B}) = \mathrm{card}(\mathcal{B}_0) + \mathrm{card}(\mathcal{B}_1) + \mathrm{card}(\mathcal{B}_2) \le 3m = n-2$$

إذن في هذه الحالة لدينا $\ell_n \le n-2$. ولإثبات تحقُّق المساواة يكفي أن نوجد مجموعة سيِّئة $\mathcal{B}$ لها هذا العدد، أي $3m$، من العناصر.

في الحقيقة، سنعرّف في حالة r من $\{0,1,2\}$، المجموعة

$$\mathcal{B}_r = \left\{\omega^{3k+r} : 0 \le k < m\right\}$$

ثُمّ نضع $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. فيكون من جهة أولى $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = 3m = n-2$، ومن جهة ثانية :

$$\varphi(\mathcal{B}_r) = \left\{\omega^{3(k+m+1)+r} : 0 \le k < m\right\} = A_r \backslash \left(\mathcal{B}_r \cup \left\{\omega^{3m+r}\right\}\right)$$

في حين $\omega^3 \mathcal{B}_r \cup \mathcal{B}_r = \mathcal{B}_r \cup \left\{\omega^{3m+r}\right\}$، وهذا يُثبتُ أنّ

$$\varphi(\mathcal{B}) \cap \left(\omega^3 \mathcal{B} \cup \mathcal{B}\right) = \varnothing$$

أي إنّ المجموعة $\mathcal{B}$ مجموعة سيِّئة عددُ عناصرها يساوي الحد الأعلى $n-2$. فنكون قد أثبتنا صحّة الاقتضاء :

$$n \bmod 3 = 2 \Rightarrow \ell_n = n-2 \qquad (3)$$

ومن النتائج (1) و (2) و (3) نرى أننا قد حسبنا ℓ_n في جميع الحالات. أمّا العدد k الذي تُصبح بدءاً منه جميع المجموعات التي عدد عناصرها k جيِّدة فيساوي $\ell_n + 1$، وهو من ثَمّ يساوي n في حالة $n \bmod 3 \in \{0,1\}$ ويساوي $n-1$ في حالة $n \bmod 3 = 2$. ■

SMC

③ **نقول إنّ العدد الطبيعي الموجب تماماً n يُحقّق الخاصّة $\mathbb{P}_n$ إذا كان n^2 قاسماً للعدد 2^n+1. عيِّن جميع الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً n التي تُحقّق الخاصّة $\mathbb{P}_n$.**

نلاحظ مباشرة أنّ الخاصتين $\mathbb{P}_1$ و $\mathbb{P}_3$ مُحقّقتان. كما إنّ تَحقُّقَ الخاصّة $\mathbb{P}_n$ يقتضي كون العدد n عدداً فرديّاً لأنّ 2^n+1 عددٌ فرديٌّ. سنبرهن فيما يلي أنّ $\mathbb{P}_n$ محقّقة فقط في حالة n من المجموعة $\{1,3\}$. ولتحقيق ذلك سنعتمد على الخاصّتين ❶ و ❷ التاليتين :

الخاصّة ❶ لنفترض أنّ a عددٌ طبيعي موجبٌ تماماً يُحقق $\gcd(a,6)=1$. نعرّف العدد $b_k=2^{3^k a}+1$، فيكون

$$\forall k\ge 0,\quad \left(3^{k+1}\mid b_k\right)\wedge\left(3^{k+2}\nmid b_k\right)$$

في الحقيقة، يجري إثبات هذه الخاصّة بالتدريج على العدد k.

- لإثبات حالة $k=0$، نلاحظ أوّلاً أنّ $\gcd(a,6)=1$ يقتضي أنّ a عددٌ فردي ومن ثَمّ يكون

$$2^a+1=(-1)^a+1=-1+1=0 \bmod 3$$

أي إنّ $3\mid b_0$.

ومن جهة ثانية، لأنّ $3\nmid a$ استنتجنا أنّ $a=3q+r$ مع $r\in\{1,2\}$. ومن ثَمّ يكون $2^a=\left(2^3\right)^q\cdot 2^r=(-1)^q\,2^r \bmod 9$، أي

$$2^a \bmod 9\in\{2,4,7,5\}$$

وهذا يقتضي أنّ $2^a+1\ne 0 \bmod 9$ أو $9\nmid b_0$. فالخاصّة المطلوبة صحيحة في حالة $k=0$.

- لنفترض إذن صحّة الخاصّة في حالة k. عندئذ يكون $b_k=3^{k+1}a_k$ مع $3\nmid a_k$. ولكن

$$b_{k+1}=\left(2^{3^k a}\right)^3+1=(b_k-1)^3+1=b_k\left(b_k^2-3b_k+3\right)$$

إذن

$$b_{k+1}=3^{k+2}a_k\left(3^{2k+1}a_k^2-3^{k+1}a_k+1\right)$$

وبهذه الصيغة نرى مباشرة أنّ $3^{k+2}\mid b_{k+1}$ و $3^{k+3}\nmid b_{k+1}$. فالخاصّة المطلوبة صحيحة في حالة $k+1$.

وبذا يكتمل إثبات الخاصّة ❶.

الخاصّة ❷ لنفترض أنّ n عددٌ طبيعي أكبر أو يساوي 2، يُحقق
$$2^n = -1 \bmod n$$
نعرّف، في حالة عددٍ أوّلي p يقسم n، العددَ ℓ_p بالعلاقة
$$\ell_p = \min\{k > 0 : 2^k = -1 \bmod p\}$$
عندئذ يكون $\ell_p < p-1$ و ℓ_p يقسم n.

لإثبات الخاصّة ❷ نلاحظ ما يلي :

- لمّا كان $p \mid n$ و $n \mid (2^n+1)$ استنتجنا أنّ $2^n = -1 \bmod p$، إذن المجموعة $\{k > 0 : 2^k = -1 \bmod p\}$ غير خالية، لاحتوائها العدد n، وهذا ما يتيح لنا تعريف ℓ_p بأنّه أصغر عنصر فيها.
- ومن جهة أخرى، لمّا كان $2^{p-1} = 1 \bmod p$ اعتماداً على مبرهنة Fermat، استنتجنا أنّ المجموعة $\{k > 0 : 2^k = 1 \bmod p\}$ غير خالية، لاحتوائها العدد $p-1$، وهذا ما يتيح لنا تعريف m_p بأنّه أصغر عنصر فيها، فيكون $m_p \le p-1$.
- نجري قسمة إقليديّة للعدد ℓ_p على m_p، فيكون $\ell_p = m_pQ + R$ وتتحقّق المتراجحة $0 \le R < m_p$. وعندها نجد
$$-1 = 2^{\ell_p} = \left(2^{m_p}\right)^Q \cdot 2^R = 2^R \bmod p$$
ولكنّ كون 2^n+1 عدداً فرديّاً يقتضي أنّ n عددٌ فردي، ومن ثَمّ أنّ $2 \ne p$. ومنه نستنتج أنّ $R \ne 0$، ومنه $\ell_p \le R$ اعتماداً على تعريف ℓ_p، نستنتج إذن أنّ
$$0 < \ell_p < m_p \le p-1$$
- نُجري الآن قِسمة إقليديّة للعدد n على ℓ_p :
$$n = \ell_p q + r, \quad 0 \le r < \ell_p$$
عندئذ
$$-1 = 2^n = \left(2^{\ell_p}\right)^q \cdot 2^r = (-1)^q\, 2^r \bmod p$$
أو $2^r = (-1)^{q+1} \bmod p$. فإذا افترضنا جدلاً أنّ $r > 0$ تناقض هذا مع تعريف m_p في حالة $q = 1 \bmod 2$ ومع تعريف ℓ_p في حالة $q = 0 \bmod 2$. إذن يجب أن يكون $r = 0$، وهذا يعني أنّ ℓ_p يقسم n ويتمّ إثبات الخاصّة ❷.

لنرجع الآن إلى مسألتنا. ولنتأمّل عدداً طبيعيّاً فرديّاً n أكبر تماماً من 1، ولنفترض تَحقُّق الخاصّة $\mathbb{P}_n$.

- ليكن p أصغر عددٍ أوّلي يقسم n، عندئذ بالاعتماد على الخاصّة ❷، نستنتج من كون $\ell_p < p$ و $\ell_p \mid n$ أنّ $\ell_p = 1$، ومن ثَمّ $2^1 = -1 \bmod p$، أي إنّ $p = 3$. فالعدد 3 هو أصغر عدد أوّلي يقسم n.

- لتكن 3^k أكبر قوّة للعدد 3 تقسم n. عندئذ يكون $n = 3^k a$، و $a \nmid 3$. ولكنّ n عددٌ فرديٌّ إذن $a \nmid 2$، ومن ثَمّ $\gcd(a,6) = 1$. ولدينا، بناءً على صحّة $\mathbb{P}_n$ أنّ $(3^{2k}a^2) \mid (2^n + 1)$ أي $3^{2k} \mid \left(2^{3^k a} + 1\right)$. فإذا استفدنا من الخاصّة ❶ استنتجنا وجوب تحقّق المتراجحة $2k \le k + 1$ أو $k \le 1$. وعند تأمّل النقطتين السابقتين نرى أننا قد أثبتنا أنّ $n = 3a$ مع $\gcd(a,6) = 1$.

- لنفترض أنّ $a > 1$. وليكن p' أصغر عددٍ أوّلي يقسم a، فيكون $p' \ge 5$. وبالاعتماد على الخاصّة ❷، يكون $\ell_{p'}$ قاسماً للعدد n أصغر تماماً من p'. إذن لا بُدّ أن يكون $\ell_{p'} = 1$ أو $\ell_{p'} = 3$. أي

$$2 = -1 \bmod p' \quad \text{أو} \quad 2^3 = -1 \bmod p'$$

وهذان الشرطان يؤدّيان إلى النتيجة $p' = 3$ وهذا خُلفٌ. إذن يجب أن يكون $a = 1$، ومن ثَمّ $n = 3$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$n^2 \mid (2^n + 1) \Leftrightarrow n \in \{1, 3\}$$

وبهذا يكتمل الحلّ. ■

④ **أنشئ تابعاً** $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}_+^*$ **على مجموعة الأعداد العاديّة الموجبة تماماً يُحقّق**

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{Q}_+^*, \quad f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

لنرمز $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ إلى مجموعة المتتاليات **شبه المعدومة** التي تأخذ قيمها في $\mathbb{Z}$. أي

$$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \Leftrightarrow \operatorname{card}(\{k \in \mathbb{N} : \alpha_k \ne 0\}) < +\infty$$

ولتكن $\mathcal{P} = \{P_k : k \in \mathbb{N}\}$ مجموعة الأعداد الأوّليّة.

تنص المبرهنة الأساسيّة في الحساب على أنّ التطبيق

$$\varphi : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{Q}_+^*, (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \prod_{n\in\mathbb{N}} P_n^{\alpha_n}$$

يعرّف تقابلاً بين $\mathbb{Q}_+^*$ و $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$. يكفي إذن أن نضع

$$f\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} P_n^{\alpha_n}\right) = \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} P_{2n}^{\alpha_{2n+1}}\right)\cdot\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} P_{2n+1}^{-\alpha_{2n}}\right)$$

فإذا كان $x = \prod_{n\in\mathbb{N}} P_n^{\alpha_n}$ و $y = \prod_{n\in\mathbb{N}} P_n^{\beta_n}$ عنصرين ما من $\mathbb{Q}_+^*$ كان

$$\begin{aligned} xf(y) &= \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} P_{2n}^{\alpha_{2n}}\right)\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} P_{2n+1}^{\alpha_{2n+1}}\right)\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} P_{2n}^{\beta_{2n+1}}\right)\cdot\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} P_{2n+1}^{-\beta_{2n}}\right) \\ &= \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} P_{2n}^{\alpha_{2n}+\beta_{2n+1}}\right)\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} P_{2n+1}^{\alpha_{2n+1}-\beta_{2n}}\right) \end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} f(xf(y)) &= \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} P_{2n}^{\alpha_{2n+1}-\beta_{2n}}\right)\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} P_{2n+1}^{-\alpha_{2n}-\beta_{2n+1}}\right) \\ &= \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} P_{2n}^{\alpha_{2n+1}}\right)\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} P_{2n+1}^{-\alpha_{2n}}\right)\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} P_{2n}^{-\beta_{2n}}\right)\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} P_{2n+1}^{-\beta_{2n+1}}\right) \\ &= \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} P_{2n}^{\alpha_{2n+1}}\right)\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} P_{2n+1}^{-\alpha_{2n}}\right)\Big/\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} P_n^{\beta_n}\right) = \frac{f(x)}{y} \end{aligned}$$

والتابع f يُحقّق الخاصّة المرجوّة.

⑤ انطلاقاً من قيمة بدء n_0 ، وهي عدد طبيعي أكبر تماماً من الواحد، يختار لاعبان A و B أعداداً n_1 ثُمّ n_2 ثمّ n_3 وهكذا ⋯بالتوالي وذلك وفقاً للقواعد التالية :

$\mathfrak{R}_1$– بمعرفة n_{2k} يختار اللاعب A أيّ عددٍ طبيعي n_{2k+1} من المجال $[n_{2k}, n_{2k}^2]$.

$\mathfrak{R}_2$– بمعرفة n_{2k+1} يختار اللاعب B عدداً n_{2k+2} يجعل النسبة $\dfrac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ تساوي قوّة غير تافهة لعددٍ أوّلي. (أي تساوي p^α مع p عدد أوّلي و $\alpha \geq 1$.)

يربح A إذا اختار العدد 1990، ويربح B إذا اختار العدد 1. عيِّن قيم n_0 التي يكون للاعب A عندها استراتيجيّة رابحة، وتلك التي يكون للاعب B عندها استراتيجيّة رابحة، وأخيراً عيِّن تلك القيم التي لا يكن لأيٍّ من اللاعبَيْن عندها استراتيجيّة رابحة.

سنبرهن أنّه في حالة $2 \leq n_0 \leq 5$ يمتلك B استراتيجيّة رابحة، وفي حالة $n_0 \geq 8$ يمتلك A استراتيجيّة رابحة، أمّا حالة $n_0 \in \{6,7\}$ فهي حالة تعادل، ولا يمتلك أيٌّ من اللاعبين في هذه الحالة استراتيجيّة رابحة.

لنعرّف في حالة عددٍ طبيعي n أكبر أو يساوي 2، العدد الطبيعي $\theta(n)$ الناتج من قسمة n على أكبر قوّة لعددٍ أوّلي تقسم n. سيؤدّي التابع θ دوراً مهمّاً فيما يأتي.

❶ استراتيجيّة B الرابحة في حالة $2 \leq n_0 \leq 5$. انطلاقاً من n_{2k+1} يختار B العدد n_{2k+2} المعرّف بالصيغة : $n_{2k+2} = \theta\left(n_{2k+1}\right)$.

- يساعد الجدول التالي في شرح هذه الاستراتيجيّة :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\theta(n)$	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	3	1
n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\theta(n)$	2	3	1	1	2	1	4	3	2	1	3	1

- إذا كانت n_0 من المجموعة $\{2,\ldots,5\}$، كانت n_1 من $\{2,\ldots,25\}$، فإذا طبّق B استراتيجيّته، اختار n_2 من المجموعة $\{1,\ldots,4\}$ كما هو مبيّن في الجدول السابق، فإذا كانت $n_2 = 1$ ربح B. وإلاّ كانت n_2 من $\{2,3,4\}$.
- إذا كانت n_2 من المجموعة $\{2,3,4\}$، كانت n_3 من $\{2,\ldots,16\}$، فإذا طبّق B استراتيجيّته، اختار n_4 من المجموعة $\{1,2,3\}$ كما هو مبيّن في الجدول السابق، فإذا كانت $n_4 = 1$ ربح B. وإلاّ كانت n_4 من $\{2,3\}$.
- إذا كانت n_4 من المجموعة $\{2,3\}$، كانت n_5 من $\{2,\ldots,9\}$، فإذا طبّق B استراتيجيّته، اختار n_6 من المجموعة $\{1,2\}$ كما هو مبيّن في الجدول السابق، فإذا كانت $n_6 = 1$ ربح B. وإلاّ كانت $n_6 = 2$.
- وأخيراً في حالة $n_6 = 2$، يمكن أن يختار A العدد n_7 من بين الأعداد $\{2,3,4\}$. وعندها يختار B العدد $n_8 = 1$ ويربح.

❷ استراتيجيّة A الرابحة في حالة $n_0 \in [45,1990]$. يختار A العدد n_1 مساوياً 1990 ويربح.

❸ استراتيجيّة A الرابحة في حالة $n_0 \in [30,44]$. يختار A العدد

$$n_1 = 840 = 7 \times 5 \times 3 \times 2^3$$

عندئذ على B أن يختار n_2 من المجموعة :

$$\left\{\frac{840}{7}, \frac{840}{5}, \frac{840}{3}, \frac{840}{2}, \frac{840}{4}, \frac{840}{8}\right\}$$

وجميع هذه الأعداد أكبر من 105. فيختار A العدد $n_3 = 1990$ ويربح.

❹ استراتيجيّة A الرابحة في حالة $n_0 \in [15,29]$. يختار A العدد

$$n_1 = 210 = 7 \times 5 \times 3 \times 2$$

عندئذ على B أن يختار n_2 من المجموعة :

$$\left\{\frac{210}{7}, \frac{210}{5}, \frac{210}{3}, \frac{210}{2}\right\}$$

وجميع هذه الأعداد أكبر من 30. فيختار A العدد $n_3 = 840$ ويتابع كما في ❸ فيربح.

❺ استراتيجيّة A الرابحة في حالة $n_0 \in \{12,13,14\}$. يختار A العدد

$$n_1 = 105 = 7 \times 5 \times 3$$

عندئذ على B أن يختار n_2 من المجموعة :

$$\left\{\frac{105}{7}, \frac{105}{5}, \frac{105}{3}\right\}$$

وجميع هذه الأعداد أكبر من 15. فيختار A العدد $n_3 = 210$ ويتابع كما في ❹ فيربح.

❻ استراتيجيّة A الرابحة في حالة $n_0 \in \{8,9,10,11\}$. يختار A العدد

$$n_1 = 60 = 5 \times 3 \times 2^2$$

عندئذ على B أن يختار n_2 من المجموعة :

$$\left\{\frac{60}{5}, \frac{60}{3}, \frac{60}{4}, \frac{60}{2}\right\}$$

وجميع هذه الأعداد أكبر من 12. فيختار A العدد $n_3 = 105$ ويتابع كما في ❺ فيربح.

❼ استراتيجيّة A الرابحة في حالة $n_0 = 1991$. يختار A العدد

$$n_1 = 1991 = 11 \times 181$$

عندئذ على B أن يختار n_2 من المجموعة $\{11,181\}$، وفي كِلا الحالتين لدى A استراتيجيّته ليربح، إذ يتابع كما في ❺ إذا كان $n = 11$، وكما في ❷ إذا كان $n_2 = 181$.

❽ سنبرهن بالتدريج على العدد r من $\mathbb{N}$، أنّ للاّعب A استراتيجيّة رابحة في حالة

$$(11)^r \times 181 + 1 \leq n_0 \leq (11)^{r+1} \times 181$$

هذه النتيجة واضحة في حالة $r = 0$، بناءً على ما أثبتناه سابقاً. لنفترض إذن أنها صحيحة في حالة $0 \leq r < \rho$ ولنثبت صحّتها في حالة ρ.

لنفترض إذن أنّ

$$(11)^\rho \times 181 + 1 \leq n_0 \leq (11)^{\rho+1} \times 181$$

عندئذ يختار A العدد $n_1 = (11)^{\rho+1} \times 181$، فيكون على B أن يختار n_2 من المجموعة

$$\{(11)^{\rho+1}, (11)^\rho \times 181, (11)^{\rho-1} \times 181, \ldots, 181\}$$

وفي جميع الأحوال ينتمي n_2 إلى المجموعة

$$[121,181] \cup \left(\bigcup_{r=0}^{\rho-1} \left[(11)^r \times 181 + 1, (11)^{r+1} \times 181 \right] \right)$$

واستناداً إلى فرْض التدريج و إلى ما أثبتناه سابقاً يمكن للاّعب A أن يتابع بدءاً من n_2 ويربح.

❾ بقي علينا تفحّص حالتَي $n_0 = 6$ و $n_0 = 7$. وهنا من المفيد أنّ نمدّد جدول قيم التابع θ كما يلي :

n	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
$\theta(n)$	2	1	4	1	6	1	1	3	2	5	4	1
n	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
$\theta(n)$	2	3	5	1	6	1	4	5	2	1	3	1

فإذا اختار A_1 العدد n_1 من خارج المجموعة $\{30, 42\}$، وطبّق B استراتيجيّته باختيار $n_2 = \theta(n_1)$، ربح B أو وقع n_2 في المجموعة $\{2, 3, 4, 5\}$ وكانت لديه استراتيجيّته للربح. إذن يجب أن يقع اختيار A على أحد العددين 30 أو 42 حتّى يُحافظ على حظوظه في الربح.

فإذا كان $n_1 = 30$، كان على B أن يختار n_2 من المجموعة $\{6,10,15\}$. فإذا اختار أحد العددين 10 أو 15 تمكّن A من الربح بتطبيق استراتيجيّته لأنّ هذين العددين أكبر تماماً من 7. وعليه يجب أن يختار B العدد n_2 مساوياً 6 ليحافظ على حظوظه في الربح.

وكذلك الأمر في حالة $n_1 = 42$، إذْ على B أن يختار n_2 من المجموعة $\{6,14,21\}$. فإذا اختار أحد العددين 14 أو 21 تمكّن A من الربح بتطبيق استراتيجيّته لأنّ هذين العددين أكبر تماماً من 7. وعليه يجب أن يختار B العدد n_2 مساوياً 6 ليحافظ على حظوظه في الربح.

وهكذا نرى أنّه يمكن أن يختار A الأعداد $(n_{2k+1})_{k\geq 0}$ جميعها مساوية 30، ويختار B جميع الأعداد $(n_{2k})_{k\geq 1}$ مساوية 6. وعندها لا يستطيع أيٌّ من اللاعبين الربح، وأيٌّ منهما يخرق هذا الشرط بعد المرحلة الأولى يخسر. ◼

⑥ **أثبت وجود مضلّع محدّب ذو 1990 ضلعاً، زواياه متساوية، ومجموعة أطوال أضلاعه هي المجموعة** $\{k^2 : 1 \leq k \leq 1990\}$.

سنبرهن بوجه أعمّ، أنّه في حالة $n = pqr$ والأعداد p و q و r هي ثلاثة أعداد أوّليّة مختلفة، يوجد مضلّع محدّبٌ ذو n ضلعاً، زواياه متساوية، ومجموعة أطوال أضلاعه هي المجموعة $\{k^2 : 1 \leq k \leq n\}$. ثُمّ نطبّق هذه النتيجة على $n = 1990 = 199 \times 5 \times 2$.

▫ تؤول المسألة إلى إيجاد تقابلٍ $\sigma : \{0,\ldots,n-1\} \to \mathbb{N}_n$ يُحقّق

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sigma(k)^2 \omega^k = 0 \qquad (\mathcal{C})$$

مع $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$. إذ عندها نختار رؤوس المضلّع $(A_m)_{0\leq m<n}$ لتكون A_m النقطة الممثَّلة بالعدد العقديّ $\sum_{k=0}^{m} (\sigma(k))^2 \omega^{k-1}$، فيتمّ المطلوب.

سنرمز $x \bmod y$ إلى باقي القسمة الإقليديّة للعدد الصحيح x على العدد الصحيح y، وهو عموماً عددٌ من المجموعة $\{0,1,\ldots,y-1\}$ التي سنرمز إليها $\mathbb{Z}_y$. نعرّف في حالة ℓ من المجموعة $\mathbb{Z}_n$، العدد $\sigma(\ell)$ بالصيغة

$$\sigma(\ell) = 1 + (\ell \bmod p) + p(\ell \bmod q) + pq(\ell \bmod r)$$

فيكون

$$1 \leq \sigma(\ell) \leq 1 + p - 1 + p(q-1) + pq(r-1) = pqr = n$$

إذن

$$\forall \ell \in \mathbb{Z}_n, \sigma(\ell) \in \{1, \ldots, n\} = \mathbb{N}_n$$

وهذا ما يتيح لنا تعريف التطبيق $\sigma : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{N}_n, \ell \mapsto \sigma(\ell)$. وسنبرهن فيما يلي أنّ σ يُؤدّي الدور المطلوب.

◻ لمّا كانت الأعداد qr و pr و pq أوّليّة فيما بينها مثنى مثنى، استنتجنا وجود أعداد صحيحة u و v و w تُحقّق $uqr + vpr + wpq = 1$. نعّرف إذن الأعداد الصحيحة $a = uqr$ و $b = vpr$ و $c = wpq$. ستساعدنا هذه الأعداد في إثبات أنّ التطبيق σ الذي عرّفناه أعلاه تقابلٌ.

في الحقيقة نبدأ بمبرهنة البواقي الصينيّة. فنتأمّل التطبيقين

$$\theta : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r, \ell \mapsto (\ell \bmod p, \ell \bmod q, \ell \bmod r)$$

$$\varphi : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r \to \mathbb{Z}_n, (i,j,k) \mapsto (ai + bj + ck) \bmod n$$

في حالة (i,j,k) من $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r$ لدينا

$$(ai + bj + ck) \bmod p = ai \bmod p = i \bmod p = i$$

وذلك لأنّ $p \mid b$ و $p \mid c$ و $a = 1 \bmod p$. ونجد بالمُماثلة أنّ

$$(ai + bj + ck) \bmod r = k \quad \text{و} \quad (ai + bj + ck) \bmod q = j$$

وهذا يبرهن على أنّ $\theta \circ \varphi(i,j,k) = (i,j,k)$. ومنه $\theta \circ \varphi = I_{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r}$. فالتطبيق φ تطبيق متباينٌ بين مجموعتين لهما عدد العناصر نفسه، وهو $n = pqr$، إذن φ تقابلٌ، والمساواة $\theta \circ \varphi = I_{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r}$ تقتضي أنّ $\theta = \varphi^{-1}$.

ومن ناحية أخرى، التطبيق

$$\psi : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r \to \mathbb{N}_n, (i,j,k) \mapsto 1 + i + pj + pqk$$

تطبيقٌ متباينٌ، لأنّ $\psi(i,j,k) = \psi(i',j',k')$، يقتضي، بعد طرح 1 من الطرفين، ثُم حساب باقي قسمة الناتج على p، أنّ $i = i'$، وبعد الاختصار على p، نستنتج أنّ $j + qk = j' + qk'$، ثُم بحساب باقي قسمة الطرفين على q نجد أنّ $j = j'$، ونجد أخيراً أنّ $k = k'$. فهو إذن تقابلٌ لأنّ لمنطلقه ومستقرّه عدد العناصر نفسه.

وأخيراً، لأنّ $\sigma = \psi \circ \theta$ نستنتج مباشرة أنّ σ تقابلٌ.

وكذلك لدينا

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \sigma(\ell)^2\,\omega^{\ell} &= \sum_{(i,j,k)\in\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\times\mathbb{Z}_r} \sigma(\varphi(i,j,k))\,\omega^{\varphi(i,j,k)} \\
&= \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{q-1}\sum_{k=0}^{r-1}(1+i+pj+pqk)^2\,\omega^{ai+bj+ck} \\
&= p^2q^2\left(\cancel{\sum_{i=0}^{p-1}\omega^{ai}}\right)\left(\cancel{\sum_{j=0}^{q-1}\omega^{bj}}\right)\left(\sum_{k=0}^{r-1}k^2\omega^{ck}\right)+ \\
&\quad 2pq\left(\sum_{i=0}^{p-1}(1+i)\,\omega^{ai}\right)\left(\cancel{\sum_{j=0}^{q-1}\omega^{bj}}\right)\left(\sum_{k=0}^{r-1}k\omega^{ck}\right)+ \\
&\quad 2p^2q\left(\cancel{\sum_{i=0}^{p-1}\omega^{ai}}\right)\left(\sum_{j=0}^{q-1}j\omega^{bj}\right)\left(\sum_{k=0}^{r-1}k\omega^{ck}\right)+ \\
&\quad \left(\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{q-1}(1+i+pj)^2\,\omega^{ai+bj}\right)\left(\cancel{\sum_{k=0}^{r-1}\omega^{ck}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

وذلك لأنّ جميع الحدود المشطوبة في المجموع أعلاه معدومة. في الحقيقة، المساواة $\omega^a = 1$ تقتضي أنّ $a \mid n$ وهذا يقتضي أنّ $a \mid p$ ويتناقض مع كون $a = 1 \bmod p$. إذن $\omega^a \neq 1$ ومن ثَمّ

$$\sum_{i=0}^{p-1}\omega^{ai} = \frac{\omega^{ap}-1}{\omega^a-1} = 0$$

لأنّ $n \mid ap$. ونبرهن بالمماثلة أنّ

$$\sum_{j=0}^{q-1}\omega^{bj} = 0 \quad \text{و} \quad \sum_{k=0}^{r-1}\omega^{ck} = 0$$

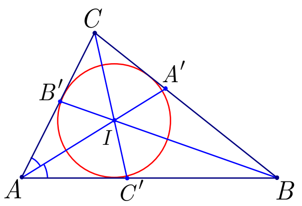
وهكذا ينتهي الإثبات.

أولمبياد الرياضيّات الثاني والثلاثون

① ليكن I مركز الدائرة الماسّة لأضلاع المثلّث ABC داخلاً. نفترض أنّ المنصّفات الداخليّة للزوايا $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ تُلاقي الأضلاع المُقابلة لهذه الزوايا في A' و B' و C' بالترتيب. أثبت أنّ

$$\frac{1}{4} < \frac{AI}{AA'} \cdot \frac{BI}{BB'} \cdot \frac{CI}{CC'} \leq \frac{8}{27}$$

من المثلّث $AA'B$ نرى أنّ



$$\frac{AA'}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin\left(\widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{A}\right)}$$

ومن المثلّث AIB نجد

$$\frac{AI}{\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{B}\right)} = \frac{AB}{\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{A}\right)}$$

وعليه،

$$\frac{AI}{AA'} = \frac{\sin\left(\widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{A}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{A}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{B}\right)}{\sin \widehat{B}} = \frac{\sin\left(\widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{A}\right)}{2\cos\left(\frac{1}{2}\widehat{C}\right)\cos\left(\frac{1}{2}\widehat{B}\right)}$$

ولكن

$$\begin{aligned}\sin\left(\widehat{B} + \tfrac{1}{2}\widehat{A}\right) &= \sin\left(\tfrac{1}{2}\widehat{B} + \tfrac{1}{2}\left(\widehat{B} + \widehat{A}\right)\right)\\ &= \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\left(\widehat{C} - \widehat{B}\right)\right) = \cos\left(\tfrac{1}{2}\left(\widehat{C} - \widehat{B}\right)\right)\end{aligned}$$

إذن

$$\frac{AI}{AA'} = \frac{1}{2}\left(1 + \tan\left(\tfrac{1}{2}\widehat{C}\right)\tan\left(\tfrac{1}{2}\widehat{B}\right)\right)$$

لنعرّف إذن الأعداد الموجبة تماماً x و y و z بالصيغ

$$z = \tan\left(\tfrac{\widehat{B}}{2}\right)\tan\left(\tfrac{\widehat{A}}{2}\right) \quad \text{و} \quad y = \tan\left(\tfrac{\widehat{A}}{2}\right)\tan\left(\tfrac{\widehat{C}}{2}\right) \quad \text{و} \quad x = \tan\left(\tfrac{\widehat{C}}{2}\right)\tan\left(\tfrac{\widehat{B}}{2}\right)$$

فنستنتج مما سبق أنّ $\dfrac{AI}{AA'} = \dfrac{1+x}{2}$ ونجد بالمماثلة أنّ

$$\frac{CI}{CC'} = \frac{1+z}{2} \quad \text{و} \quad \frac{BI}{BB'} = \frac{1+y}{2}$$

فإذا وضعنا

$$\Lambda = \frac{AI}{AA'} \cdot \frac{BI}{BB'} \cdot \frac{CI}{CC'}$$

استنتجنا مما سبق أنّ

$$\Lambda = \frac{1}{8}(1+x)(1+y)(1+z)$$

ولكن لنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} y+z &= \tan\left(\tfrac{\widehat{A}}{2}\right)\tan\left(\tfrac{\widehat{C}}{2}\right) + \tan\left(\tfrac{\widehat{B}}{2}\right)\tan\left(\tfrac{\widehat{A}}{2}\right) \\ &= \tan\left(\tfrac{\widehat{A}}{2}\right)\left(\tan\left(\tfrac{\widehat{C}}{2}\right) + \tan\left(\tfrac{\widehat{B}}{2}\right)\right) \\ &= \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\widehat{C}}{2} - \tfrac{\widehat{B}}{2}\right)\left(\tan\left(\tfrac{\widehat{C}}{2}\right) + \tan\left(\tfrac{\widehat{B}}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\tan\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) + \tan\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2}\right)} = 1 - \tan\left(\tfrac{\widehat{C}}{2}\right)\tan\left(\tfrac{\widehat{B}}{2}\right) = 1 - x \end{aligned}$$

إذن $x+y+z=1$.

- فإذا استفدنا من المتراجحة بين المتوسطين الحسابي والهندسي وجدنا

$$\sqrt[3]{\Lambda} = \sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{2}\right)\left(\frac{1+y}{2}\right)\left(\frac{1+z}{2}\right)} \leq \frac{1}{6}(3+x+y+z) = \frac{2}{3}$$

ومن ثَمّ $\Lambda \leq \frac{8}{27}$، وهي المتراجحة الأولى.

- ومن جهة ثانية،

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{8}(1+x+y+z+xy+yz+zx+xyz) \\ &> \frac{1+x+y+z}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

وبذا يتمّ إثبات صحّة المتراجحة الثانية. ◪

② **نتأمّل عدداً طبيعيّاً n أكبر تماماً من 6. ولتكن $\{a_j : 1 \leq j \leq k\}$ مجموعة الأعداد الطبيعيّة الموجبة الأوّليّة مع العدد n وأصغر منه. نفترض أنّ**

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} > 0$$

أثبت أنّ n عددٌ أوّلي أو أنّه قوّة للعدد 2.

نعلم أنّ $\gcd(n,1)=\gcd(n,n-1)=1$ ، إذن لا بُدّ أن يكون

$$a_1=1 \quad \text{و} \quad a_k=n-1$$

فإذا رمزنا بالرمز ℓ إلى المقدار a_2-a_1 استنتجنا من الفرْض أنّ

$$\forall i\in\{1,\ldots,k\},\quad a_i=1+(i-1)\ell$$

مع $n-1=1+(k-1)\ell$ أو

$$n=2+(k-1)\ell$$

لنناقش إذن الحالات التالية :

- إذا كان n عدداً فردياً، استنتجنا، من كون $\gcd(2,n)=1$ في هذه الحالة، أنّ $a_2=2$ ، ومن ثَمّ $\ell=1$. وهذا يقتضي أنّ $\gcd(n,i)=1$ أيّاً كان i من المجموعة $\{1,2,\ldots,n-1\}$ ، فالعددُ n عددٌ أوّلي.
- إذا كان $n=0 \bmod 4$ ، مثلاً $n=4b$ مع $b\geq 2$. كان

$$\gcd(2b-1,n)=\gcd(2b+1,n)=1 \quad \text{و} \quad \gcd(2b,n)\neq 1$$

ومنه نستنتج أنّ $\ell=2$ ، والعدد n أوّلي مع جميع الأعداد الفرديّة التي هي أصغر منه، وبوجه خاصّ، لا يقبل n القسمة على أيِّ عددٍ أوّلي فردي أصغر منه. فهو إذن قوّة للعدد 2.

- إذا كان $n=2 \bmod 4$ ، مثلاً $n=4b+2$ مع $b\geq 2$. كان

$$\gcd(2b+3,n)=\gcd(2b+5,n)=1 \quad \text{و} \quad \gcd(2b+4,n)\neq 1$$

ولأنّ $2b+5<n$ ، استنتجنا من ذلك أنّ $\ell=2$ ، ولكنَّ هذا يؤدّي إلى التناقض $\gcd(2b+1,n)=1$. إذن لا يمكن أن يكون $n=2 \bmod 4$.

وبذا يتمّ الإثبات. ■

③ لتكن المجموعة $S=\mathbb{N}_{280}=\{1,2,\ldots,280\}$. أوجد أصغر عددٍ طبيعي k ، يُحقّق أنّ كلّ مجموعة جزئيّة من S مكوّنة من k عنصرٍ تحوي خمسة عناصر أوّليّة فيما بينها مثنى مثنى.

سنبرهن أنّ الجواب هو 217.

▫ لنتأمّل أوّلاً المجموعة $\mathcal{A}$ الجزئيّة من $\mathcal{S}$ والمكوّنة من مضاعفات أحد الأعداد 2 أو 3 أو 5 أو 7. ثُمّ لنعرّف في حالة عددٍ ℓ من $\mathcal{A}$، العدد $\varphi(\ell)$ بأنّه أصغر عنصرٍ من المجموعة $\{2,3,5,7\}$ يقسم ℓ.

لتكن $\mathcal{B}$ مجموعة جزئيّة ما من $\mathcal{A}$، تُحقّق $\operatorname{card}(\mathcal{B}) = 5$. عندئذ لا يمكن أنّ يكون التطبيق $\varphi_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \{2,3,5,7\}, \ell \mapsto \varphi(\ell)$ متبايناً. ومن ثَمّ لا يمكن أن تكون عناصر $\mathcal{B}$ أوّليّة فيما بينها مثنى مثنى. إذن لا بُدّ أن يُحقّق العدد k المطلوب المتراجحة $k > \operatorname{card}(\mathcal{A})$.

علينا إذن حساب $\operatorname{card}(\mathcal{A})$. لنرمز بالرمز $\mathcal{S}_a$ إلى مجموعة مُضاعفات العدد a في $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}_a = \{na : 1 \le na \le 280\}$$

عندئذ يكون $n_a = \operatorname{card}(\mathcal{S}_a) = \left\lfloor \frac{280}{a} \right\rfloor$. كما يكون

$$\mathcal{A} = \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_5 \cup \mathcal{S}_7$$

فإذا استفدنا من مبدأ الاحتواء والاستثناء ولاحظنا أنّه في حالة $\gcd(a,b) = 1$ لدينا $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b = \mathcal{S}_{ab}$، استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(\mathcal{A}) &= n_2 + n_3 + n_5 + n_7 - n_6 - n_{10} - n_{14} - n_{15} - n_{21} - n_{35}\\ &\quad + n_{30} + n_{42} + n_{70} + n_{105} - n_{210}\\ &= 140 + 93 + 56 + 40 - 46 - 28 - 20 - 18 - 13 - 8\\ &\quad + 9 + 6 + 4 + 2 - 1 \ = 216\end{aligned}$$

وعليه لا بُدّ أن يكون $k > 216$.

▫ سنبرهن الآن أنّ كلَّ مجموعة جزئيّة $\mathcal{C}$ من $\mathcal{S}$ عدد عناصرها 217، تحوي مجموعة جزئيّة عدد عناصرها 5، وعناصرها أوليّة فيما بينها مثنى مثنى. لتحقيق ذلك سنتأمّل المجموعات الست التالية :

- A_0 وهي مكوّنة من العدد 1، والأعداد الأوّليّة في $\mathcal{S}$. إنّ $\operatorname{card}(A_0) = 60$.

$$\begin{aligned}A_0 = \{\ &1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\\ &29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47,\ 53,\ 59,\ 61,\ 67,\\ &71,\ 73,\ 79,\ 83,\ 89,\ 97,\ 101,\ 103,\ 107,\ 109,\\ &113,\ 127,\ 131,\ 137,\ 139,\ 149,\ 151,\ 157,\ 163,\ 167,\\ &173,\ 179,\ 181,\ 191,\ 193,\ 197,\ 199,\ 211,\ 223,\ 227,\\ &229,\ 233,\ 239,\ 241,\ 251,\ 257,\ 263,\ 269,\ 271,\ 277\ \}\end{aligned}$$

◆ والمجموعات A_1 و A_2 و A_3 و A_4 و A_5 التالية :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{2\times 47,\ 3\times 43,\ 5\times 41,\ 7\times 37,\ 11\times 23,\ 13\times 19\},\\
A_2 &= \{2\times 43,\ 3\times 41,\ 5\times 37,\ 7\times 31,\ 11\times 19,\ 13\times 17\},\\
A_3 &= \{2\times 41,\ 3\times 37,\ 5\times 31,\ 7\times 29,\ 11\times 17,\ 13\times 13\},\\
A_4 &= \{2\times 37,\ 3\times 31,\ 5\times 29,\ 7\times 23,\ 11\times 13\},\\
A_5 &= \{2\times 31,\ 3\times 29,\ 5\times 23,\ 7\times 19,\ 11\times 11\}.
\end{aligned}$$

تتميّز هذه المجموعات الجزئيّة من $\mathcal{S}$ بكون أيّ عددين مُختارَين في أيٍّ واحدة منها أوّليّان فيما بينهما، كما إنّها منفصلة مثنى مثنى مما يجعل عدد عناصر اجتماعها Q يساوي 88 عنصراً.

$$\operatorname{card}(Q) = \operatorname{card}\left(\bigcup_{0\le i\le 5} A_i\right) = 88$$

لنتأمّل الآن مجموعة جزئيّة ما $\mathcal{C}$ من $\mathcal{S}$ عدد عناصرها 217. ولنفترض على سبيل الجدل أنّ

$$\forall i\in\{0,1,\ldots,5\},\ \operatorname{card}(A_i\cap\mathcal{C})\le 4$$

عندئذ يكون لدينا $\operatorname{card}(Q\cap\mathcal{C})\le 6\times 4 = 24$، ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(\mathcal{C}) &= \operatorname{card}(Q^c\cap\mathcal{C}) + \operatorname{card}(Q\cap\mathcal{C})\\
&\le \operatorname{card}(Q^c) + \operatorname{card}(Q\cap\mathcal{C})\\
&\le (280-88)+24 = 216
\end{aligned}$$

وهذا خُلفٌ. إذن يوجد i_0 في المجموعة $\{0,1,\ldots,5\}$ تُحقّق $\operatorname{card}(A_{i_0}\cap\mathcal{C})\ge 5$، وأيُ مجموعة جزئيّة من $A_{i_0}\cap\mathcal{C}$ مكوّنة من خمسة عناصر، يكون كلُّ اثنين من عناصرها أوليّين فيما بينهما. وبذا يكتمل الإثبات. ■

④ **نتأمّل بياناً مترابطاً G له k حرفاً. أثبت أنّه بالإمكان ترقيم أحرفه بالأعداد $\{1,2,\ldots,k\}$ بأسلوبٍ يكون فيه الواحد هو القاسم المشترك الأعظم لأرقام الحروف المنبعثة من أيٍّ من الرؤوس التي ينبعث منها حرفين أو أكثر.**

البيان هو ثنائيّة $G=(V,E)$، حيث V هي مجموعة تسمّى عناصرها رؤوس البيان، و E هي مجموعة جزئيّة من $V^{(2)}=\{e\subset V : \operatorname{card}(e)=2\}$ تسمّى عناصرها حروفاً. نقول إنّ البيان G مترابطٌ إذا وفقط إذا تحقّق الشرط التالي : مهما يكن $\{a,b\}$ من $V^{(2)}$ توجد متتالية $(x_i)_{0\le i\le n+1}$ من عناصر V تُحقّق

$$x_0 = a \quad \text{و} \quad x_{n+1}=b \quad \text{و} \quad \{x_i,x_{i+1}\}\in E,\quad \forall i\in\{0,1,\ldots,n\}$$

لنبدأ بشرح الفكرة. لمّا كان البيان مترابطاً أمكن التجوال بين رؤوسه والوصول إلى أيٍّ منها انطلاقاً من أيّ رأسٍ معطى. يكفي إذن أن نتجوّل في البيان، انطلاقاً من رأسٍ معطى، مُرَقِّمين الحروف التي نمرُّ بها، مع الالتزام بشرط ألاّ نمرّ برأسٍ a، ما لم نضمن كون أرقام الحروف التي أحد طرفيها a أوليّة فيما بينها، (أو أن يكون a طرفاً لحرفٍ واحدٍ) فكيف يمكن تحقيق ذلك؟

- إذا كان الرأس a طرفاً لحرفٍ رقمه يساوي 1، كانت أرقام الحروف التي a طرف فيها أوّليّة فيما بينها وذلك أيّاً كانت أرقام بقيّة الحروف.
- إذا كان الرأس a طرفاً مشتركاً لحرفين رقماهما عددان متتاليان j و $j+1$، كانت أرقام الحروف التي a طرف فيها أوّليّة فيما بينها وذلك أيّاً كانت أرقام بقيّة الحروف.

في الحقيقة، تكفي هاتان الخاصّتان لإيجاد خوارزميّة لترقيم حروف البيان المترابط $G=(V,E)$ بأسلوبٍ يُحقّق الخاصّة المرجوّة.

فيما يلي، سنكتب E_a دلالة على مجموعة حروف البيان $G=(V,E)$ التي أحد طرفيها الرأس a، أي

$$E_a=\left\{e\in E:\exists b\in V,\ e=\{a,b\}\right\}$$

لنتأمّل إذن بياناً مترابطاً $G=(V,E)$ فيه $k=\operatorname{card}(E)\geq 1$. سنحتاج في شرح خوارزميّة ترقيم حروف G، أي تعريف التطبيق $\varphi:E\to\mathbb{N}_k$، إلى الرموز التالية :

- المجموعة E' تمثّل في كلِّ آنٍ مجموعة الحروف التي جرى ترقيمها، وهي في البدء خالية.
- المجموعة V' تمثّل في كلِّ آنٍ مجموعة الرؤوس التي مررنا بها، وكلٌّ منها يحقّق وفق آليّة إنشائه خاصّة كون أرقام الحروف المنبعثة منه أوليّة فيما بينها إذا كان عددها أكثر من 2. المجموعة V' في البدء خالية.
- الدليل i، يكون في البدء 0، ويزداد بمقدار 1 كلّما جرى ترقيم أحد الحروف.
- المؤشر X يؤشّر في كلِّ لحظة إلى الرأس الذي وصلنا إليه في تجوالنا في البيان.

خوارزميّة ترقيم حروف البيان $G = (V, E)$.

1. **التهيئة** : ضع $i := 0$ و $E' := \varnothing$، ثُمّ **اختر** رأساً X ما من V، وضع $V' := \{X\}$.
2. **إذا** كان $E_X \backslash E' \neq \varnothing$، **اختر** حرفاً $e = \{X, Y\}$ من $E_X \backslash E'$، ثُمّ
   - 1.2. **رقّم** الحرف e، أي ضع $i := i + 1$ و $\varphi(e) := i$.
   - 2.2. **وسّع** E' بإضافة e إليها : $E' := E' \cup \{e\}$.
   - 3.2. **أشِر** إلى Y، أي ضع $X := Y$ ثمّ **وسّع** V' بإضافة الرأس X إليها، إذا لم يكن أصلاً موجوداً فيها : $V' := V' \cup \{X\}$.
   - 4.2. **اذهب** إلى 2.
3. **إذا** كانت المجموعة $\{x \in V' : E_x \backslash E' \neq \varnothing\}$ غير خالية، **أشِر** إلى رأسٍ ما X من هذه المجموعة، ثُمّ **اذهب** إلى 2.
4. **انتهى**.

وهنا نلاحظ ما يلي :

– لا بُدّ أن تتوقّف هذه الخوارزميّة بعد المرور بالمرحلة 2. عدداً k من المرّات على الأكثر، لأنّه بعد كلِّ مرورٍ في هذه المرحلة يجري ترقيم حرفٍ من حروف البيان.

– ينضم رأسٌ جديد X إلى V' في إحدى الحالات التالية :

- أن يكون X أوّل عنصر ينضمّ إلى V'، عندئذ يكون X طرف حرفٍ رقمه 1.
- أن يكون طرفَ حرفٍ e رقمه $\varphi(e) = i$، دون أن يكون طرفاً لأيٍّ من الأحرف ذات الأرقام j مع $1 \leq j < i$. وفي هذه الحالة إذا تحقّق الشرط 2. تَبِع e حرفٌ جديدٌ e' يشترك مع e بالرأس X ويحقّق $\varphi(e') = i + 1$. وعندها أيّ ترقيم لبقيّة حروف E_X يُحقّق $\gcd\big(\varphi(E_X)\big) = 1$ لأنّ $\gcd(i, i+1) = 1$. أمّا إذا لم يتحقّق الشرط 2. فعندئذ يكون $E_X = \{e\}$، ولا شرط على X في هذه الحالة.

– عند انتهاء الخوارزميّة يكون $V' = V$، وذلك لأنّ البيان مترابطٌ. فإذا افترضنا وجود b من V لا ينتمي إلى V'، واخترنا a من V'. وجدنا متتالية $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ من عناصر V تُحقّق

$$x_0 = a \quad \text{و} \quad x_{n+1} = b \quad \text{و} \quad \{x_i, x_{i+1}\} \in E, \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

نعرّف $i_0 = \max\{j : x_j \in V'\}$، فيكون

$$u = x_{i_0} \in V' \quad \text{و} \quad v = x_{i_0+1} \notin V'$$

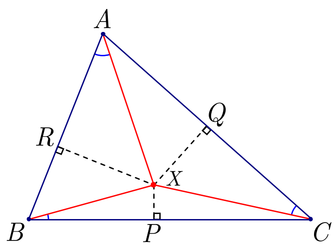
وهنا إذا كان $e = \{u, v\}$ عنصراً من E'، وجب أن ينتمي v إلى V' بناءً على 3.2. وإذا كان $e \notin E'$ كان $E_u \backslash E' \neq \varnothing$ مع $u \in V'$، وبناءً على 3. لا يجوز أن تتوقف الخوارزميّة عند هذا الحد.

– عند انتهاء الخوارزميّة يكون $E' = E$. لأنّ عدم تحقّق الشرط 3. مع العلم أنّ $V' = V$ يعني أنّ

$$\forall x \in V : E_x \backslash E' = \varnothing$$

وهذا يقتضي أنّ $E = \bigcup_{x \in V} E_x \subset E'$، ومنه $E' = E$. إذن عند انتهاء الخوارزميّة نكون قد رقّمنا جميع أحرف البيان، بأسلوب تتحقّق فيه الخاصّة المرجوّة.

⑤ نتأمّل مثلّثاً ABC، ولتكن X نقطة تقع داخل ABC. أثبت أنّ قياس واحدة على الأقلّ من الزوايا $\widehat{XAB}$ و $\widehat{XBC}$ و $\widehat{XCA}$ أصغر أو يساوي $\frac{\pi}{6}$.



سنرمز كالعادة بالرموز a و b و c إلى أطوال أضلاع المثلّث BC و CA و AB بالترتيب. كما سنكتب P و Q و R دلالة على مساقط X على الأضلاع $[BC]$ و $[CA]$ و $[AB]$ بالترتيب. ولنرمز p و q و r إلى الأطوال XP و XQ و XR بالترتيب، و α و β و γ إلى الأطوال XA و XB و XC بالترتيب. وأخيراً لنكتب $\mathcal{A}(XYZ)$ دلالة على مساحة مثلّث XYZ.

لمّا كان

$$\mathcal{A}(XAB) + \mathcal{A}(XBC) + \mathcal{A}(XCA) = \mathcal{A}(ABC)$$

استنتجنا أنّ

$$rc + pa + qb = 2\mathcal{A}(ABC)$$

ولكن

$$2\mathcal{A}(ABC) \leq BC \cdot AP \leq BC \cdot (AX + XP) = a(\alpha + p)$$

إذن $rc + pa + qb \leq \alpha a + pa$ ومنه

$$rc + qb \leq \alpha a$$

فإذا استفدنا من المتراجحة $2\sqrt{xy} \leq x + y$ استنتجنا أنّ

$$2\sqrt{rq} \cdot \sqrt{bc} \leq \alpha a \qquad (1)$$

بأسلوب مماثلٍ لما سبق، وبالاستفادة من المتراجحتين

$$2\mathcal{A}(ABC) \leq CA \cdot BQ \leq b(\beta + q)$$

$$2\mathcal{A}(ABC) \leq AB \cdot CR \leq c(\gamma + r)$$

نجد

$$2\sqrt{pr} \cdot \sqrt{ca} \leq \beta b \quad \text{و} \quad 2\sqrt{qp} \cdot \sqrt{ab} \leq \gamma c \qquad (2)$$

ثُمّ بحساب جداء ضرب المتراجحات (1) و (2) نجد

$$8pqr \leq \alpha\beta\gamma$$

أو

$$\sin\left(\widehat{XAB}\right) \cdot \sin\left(\widehat{XBC}\right) \cdot \sin\left(\widehat{XCA}\right) = \frac{r}{\alpha} \cdot \frac{p}{\beta} \cdot \frac{q}{\gamma} \leq \frac{1}{8} \qquad (3)$$

لنفترض على سبيل الجدل أنّ جميع الزوايا $\widehat{XCA}$ و $\widehat{XBC}$ و $\widehat{XAB}$ أكبر تماماً من $\frac{\pi}{6}$، عندئذ نستنتج، من كون مجموعها أصغر من مجموع زوايا المثلّث $\widehat{ABC}$، أنها جميعاً أصغر تماماً من $\frac{5\pi}{6}$ و من ثَمّ أنّ $\sin\left(\widehat{XCA}\right) > \frac{1}{2}$ و $\sin\left(\widehat{XBC}\right) > \frac{1}{2}$ و $\sin\left(\widehat{XAB}\right) > \frac{1}{2}$، وهذا يقودنا إلى المتراجحة التالية

$$\sin\left(\widehat{XAB}\right) \cdot \sin\left(\widehat{XBC}\right) \cdot \sin\left(\widehat{XCA}\right) > \frac{1}{8}$$

التي تناقض المتراجحة (3) فلا بُدّ أن تكون إحدى الزوايا $\widehat{XCA}$ و $\widehat{XBC}$ و $\widehat{XAB}$ أصغر أو تساوي $\frac{\pi}{6}$. ■

⑥ **ليكن α عدداً حقيقيّاً أكبر تماماً من 1. أنشئ متتالية محدودة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تُحقّق**

$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\quad i\neq j \Rightarrow |x_i - x_j|\cdot|i-j|^{\alpha}\geq 1$$

تذكّر أنّ متتاليةً $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تكون محدودة إذا وُجِدَ عددٌ حقيقي M يُحقّق $|y_n|\leq M$ أيّاً كان الدليل n من $\mathbb{N}$.

لنتأمّل المجموعة $\mathcal{P}^{(\mathrm{f})}(\mathbb{N})$ أي مجموعة الأجزاء المنتهية من $\mathbb{N}$. يُعرّف التطبيق

$$\varphi:\mathcal{P}^{(\mathrm{f})}(\mathbb{N})\to\mathbb{N},\varphi(A)=\sum_{k\in A}2^k$$

تقابلاً، تقابله العكسي هو التطبيق الذي يقرن بكلِّ عددٍ n تمثيله بالأساس 2 هو

$$\left(\varepsilon_m^{(n)},\varepsilon_{m-1}^{(n)},\ldots,\varepsilon_1^{(n)},\varepsilon_0^{(n)}\right)_2$$

المجموعة $A=\left\{k:\varepsilon_k^{(n)}=1\right\}$.

ثُمّ لنعرّف في حالة A من $\mathcal{P}^{(\mathrm{f})}(\mathbb{N})$ العدد X_A بالصيغة : $X_A=\sum_{k\in A}2^{-\alpha k}$.

- ليكن A و B عنصرين من $\mathcal{P}^{(\mathrm{f})}(\mathbb{N})$ يُحقّقان $B\neq A$، عندها نعرّف i أصغر عنصرٍ من الفرق التناظري $A\Delta B$، فيكون 2^i قاسماً للفرق $\varphi(A)-\varphi(B)$ ومن ثَمّ $|\varphi(A)-\varphi(B)|\geq 2^i$. ومن جهة أخرى،

$$X_A-X_B=\sum_{k\in A/B}2^{-\alpha k}-\sum_{k\in B/A}2^{-\alpha k}=\sum_{k\in\mathbb{N}}\varepsilon_{A,B}(k)2^{-\alpha k}$$

مع $\varepsilon_{A,B}(k)\in\{-1,0,1\}$ و $\varepsilon_{A,B}(k)=0$ إذا كان $k<i$. إذن

$$|X_A-X_B|\geq 2^{-\alpha i}-\sum_{k=i+1}^{\infty}2^{-\alpha k}=2^{-\alpha i}\left(\frac{2^{\alpha}-2}{2^{\alpha}-1}\right)$$

إذن

$$|X_A-X_B|\cdot|\varphi(A)-\varphi(B)|^{\alpha}\geq\left(\frac{2^{\alpha}-2}{2^{\alpha}-1}\right)$$

- ومن جهة ثانية، أيّاً كان العنصر A من $\mathcal{P}^{(\mathrm{f})}(\mathbb{N})$ كان

$$0\leq X_A\leq\sum_{k=0}^{\infty}2^{-\alpha k}=\frac{1}{1-2^{-\alpha}}$$

يكفي إذن أن نعرّف $x_n=\frac{2^{\alpha}-1}{2^{\alpha}-2}X_{\varphi^{-1}(n)}$ لتحقّق المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ الخواص المرجوّة. ■

① **أوجد جميع الأعداد الطبيعيّة a و b و c التي تُحقّق $1 < a < b < c$ ويكون العدد $(a-1)(b-1)(c-1)$ قاسماً للعدد** $abc - 1$.

لنتأمّل ثلاثيّة (a,b,c) من $\mathbb{N}^3$ تحقّق المطلوب. ولنعرّف $\alpha = a - 1$ و $\beta = b - 1$ و $\gamma = c - 1$. عندئذ يكون لدينا $1 \leq \alpha < \beta < \gamma$، ويقسم العددُ $\alpha\beta\gamma$ العددَ $\alpha\beta\gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha + \beta + \gamma$ أو

$$\alpha\beta\gamma \mid (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha + \beta + \gamma)$$

لنعرّف إذن

$$F(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta}$$

فتؤول الخاصّة المطلوبة إلى

$$F(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{N} \quad \text{و} \quad 1 \leq \alpha < \beta < \gamma$$

- ولكن إذا كان $\alpha \geq 3$ كان $\beta \geq 4$ و $\gamma \geq 5$ ومن ثَمّ
$$F(\alpha,\beta,\gamma) \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} = \frac{59}{60} < 1$$
فلا بُدّ أن يكون $\alpha \in \{1,2\}$.

- لنتأمّل حالة $\alpha = 2$. إذا كان $\beta \geq 6$ كان $\gamma \geq 7$ ومنه $F(2,\beta,\gamma) \leq \frac{83}{84}$، فلا بُدّ أن يكون $\beta \in \{3,4,5\}$.

  - إذا كان $\beta = 3$ كان $F(2,3,\gamma) = 1 + \frac{11}{6\gamma}$، فإذا كان $k = F(2,3,\gamma)$ عدداً طبيعيّاً استنتجنا أنّ $6 \mid 11$ وهذا خُلفٌ.

  - وإذا كان $\beta = 5$، كان $F(2,5,\gamma) = \frac{17+8\gamma}{10\gamma}$، فإذا كان $k = F(2,5,\gamma)$ عدداً طبيعيّاً استنتجنا أنّ $2(5k-4)\gamma = 17$، وهذا خُلفٌ.

  - إذا كان $\beta = 4$، كان $F(2,4,\gamma) = \frac{7(\gamma+2)}{8\gamma}$، فإذا كان $k = F(2,4,\gamma)$ عدداً طبيعيّاً استنتجنا أنّ $(8k-7)\gamma = 14$، فالعدد γ عددٌ زوجي يقسم 14 وأكبر من 5، إذن $\gamma = 14$، ومنه $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,4,14)$.

▫ لنتأمّل حالة $\alpha = 1$.

$$F(1,\beta,\gamma) = 1 + 2\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) + \frac{1}{\beta\gamma} = \frac{(2\beta+1)(2\gamma+1)}{\beta\gamma} - 3$$

فإذا كان $F(1,\beta,\gamma)$ عدداً طبيعيّاً استنتجنا أنّ $\beta\gamma \mid (2\beta+1)(2\gamma+1)$، ولكن $\gcd(\beta, 2\beta+1) = 1$ إذن $\beta \mid (2\gamma+1)$ وكذلك $\gamma \mid (2\beta+1)$.

ولكن نعلم أنّ $\beta < \gamma$ إذن $2\beta + 1 < 2\gamma$، وينتج من كون $\gamma \mid (2\beta+1)$ أنّ $\gamma = 2\beta + 1$. وعندها يُكافئ الشرطُ $\beta \mid (2\gamma+1)$ الشرطَ $\beta \mid (4\beta+3)$ أو $\beta \mid 3$، ولكن $\beta > 1$ إذن $\beta = 3$ و $\gamma = 7$. ومنه $(\alpha,\beta,\gamma) = (1,3,7)$.

إذن لقد أثبتنا أنّ الشرطين $1 \le \alpha < \beta < \gamma$ و $F(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{N}$ يقتضيان $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,4,14)$ و $(\alpha,\beta,\gamma) = (1,3,7)$.

وبالعكس، نتيقّن مباشرة أنّ $F(2,4,14) = 1$ و $F(1,3,7) = 2$. إذن مجموعة الثلاثيات (a,b,c) من $\mathbb{N}^3$ التي تُحقّق المتراجحة $1 < a < b < c$، ويكون العدد $abc - 1$ مُضاعفاً للعدد $(a-1)(b-1)(c-1)$ هي $(3,5,15)$ و $(2,4,8)$. ■

② أوجد جميع التوابع الحقيقيّة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ التي تُحقّق

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(x^2 + f(y)\right) = y + (f(x))^2$$

لنتأمّل تابعاً $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ يُحقّق العلاقة التابعيّة السابقة والتي سنرمز إليها $(\mathcal{E})$.

❶ لنبدأ بإثبات أنّ $f(0) = 0$. ليكن $a = f(0)$ و $b = f(1)$، عندئذ بتعويض $x = y = 0$ في $(\mathcal{E})$ نجد $f(a) = a^2$. ثُمّ بتعويض $x = 0$ و $y = 1$ نجد $f(b) = 1 + a^2$. وأخيراً بتعويض $x = 1$ و $y = 0$ نجد $f(1+a) = b^2$.

وعندها يكون لدينا، من جهة أولى،

$$\begin{aligned} f\left(a^2 + b^2\right) &= f\left(a^2 + f(1+a)\right) \\ &= 1 + a + (f(a))^2 = 1 + a + a^4 \end{aligned}$$

ومن جهة ثانية،

$$\begin{aligned} f\left(a^2 + b^2\right) &= f\left(b^2 + f(a)\right) \\ &= a + (f(b))^2 = a + \left(1 + a^2\right)^2 \end{aligned}$$

وهكذا نستنتج أنّ

$$a+\left(1+a^2\right)^2=1+a+a^4$$

وهذا يقتضي أنّ $a=0$.

❷ بتعويض $x=0$ في $(\mathcal{E})$ نستنتج أنّ $\forall y\in\mathbb{R},\ f\circ f(y)=y$.

❸ بتعويض $f(y)$ مكان y في المعادلة التابعيّة، والاستفادة من الخاصّة السابقة نستنتج أنّ

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f\left(x^2+y\right)=f(y)+(f(x))^2$$

❹ التابعُ f تابعٌ متزايدٌ، لأنّه إذا كان $z>y$ عرّفنا $x=\sqrt{z-y}$ ، عندها يكون $z=x^2+y$ ومن ثَمّ $f(z)=f(y)+(f(x))^2\geq f(y)$.

❺ ليكن x من $\mathbb{R}$. ولنناقش كما يلي :

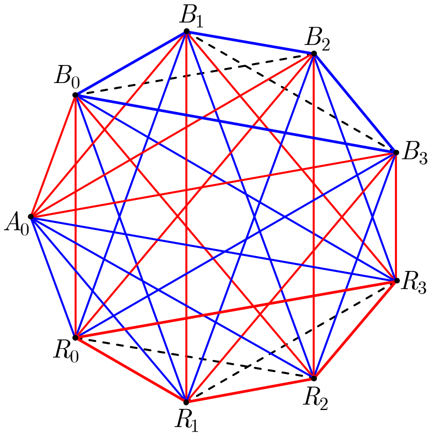
- إذا كان $f(x)>x$ ، استنتجنا مما سبق أنّ $x=f(f(x))\geq f(x)$ وهذا خُلفٌ.
- وكذلك، إذا كان $x>f(x)$ كان $x=f(f(x))\geq f(x)$ ، وهذا خُلفٌ أيضاً.

إذن لا بُدّ أن يكون $f(x)=x$. ومن ثَمّ نكون قد أثبتنا أنّه $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x$.

وبالعكس، من الواضح أنّ التطبيق المطابق $x\mapsto x$ يُحقّق العلاقة التابعيّة $(\mathcal{E})$ ، فهو إذن التابع الوحيد الذي يُحقّقها. ■

③ نتأمّل 9 نقاط في الفراغ، لا تقع أيّ أربع منها في مستوٍ واحدٍ. تصل بين كلّ نقطتين من هذه النقاط قطعة مستقيمة زرقاء اللّون، أو حمراء اللّون، أو غير ملوّنة. أوجد أصغر قيمةٍ لعدد n القطع المستقيمة الملّونة نضمن عندها وجود مثلّث تحمل أضلاعه اللون نفسه.

لنثبت أوّلاً أنّ $n\geq 33$ ، وذلك بإعطاء مثال يجري فيه تلوين 32 قطعة باللّونين الأحمر والأزرق دون مثلّث تحمل أضلاعه اللّون نفسه. يبيّن الشكل التالي هذا المثال، وقد رمزنا إلى النقاط بالرموز التالية : $(A_0,B_0,B_1,B_2,B_3,R_0,R_1,R_2,R_3)$.



وجرى تلوين القطع المستقيمة وفق القواعد التالية :

- القطع $[B_0B_2]$ و $[B_1B_3]$ و $[R_0R_2]$ و $[R_1R_3]$ بدون تلوين.
- أضلاع الرباعي $B_0B_1B_2B_3$ زرقاء، وأضلاع الرباعي $R_0R_1R_2R_3$ حمراء.
- القطع $([A_0R_i])_{0\leq i\leq 3}$ زرقاء، والقطع $([A_0B_i])_{0\leq i\leq 3}$ حمراء.
- في حالة $0\leq i,j\leq 3$ تُلوّن القطعة $[R_iB_j]$ باللّون الأحمر إذا كان $i-j$ زوجيّاً وباللون الأزرق إذا كان $i-j$ فرديّاً.

سنكتب كالعادة $B_i=B_{i\bmod 4}$ و $R_i=R_{i\bmod 4}$.

لنفترض وجود مثلّث أضلاعه حمراء اللّون. ولنناقش الحالات التالية :

- أن يكون أحد الأضلاع المثلّث هو ضلعٌ في الرباعي $R_1R_2R_3R_4$. وليكن $[R_iR_{i+1}]$، عندئذ يجب أن يكون الضلع الثاني $[R_iB_i]$ أو $[R_iB_{i+2}]$ لأنّه أحمر اللون، ولا يبقى للضلع الثالث إلاّ أن يكون أحد الضلعين $[R_{i+1}B_i]$ أو $[R_{i+1}B_{i+2}]$ وهو في الحالتين أزرق اللون. فهذه الحالة لا تقع.
- أن يكون أحد أضلاع المثلّث هو $[A_0B_i]$. عندئذ يجب أن يكون الضلع الثاني $[R_iB_i]$ أو $[B_iR_{i+2}]$ لأنّه أحمر اللون. ولا يبقى للضلع الثالث إلاّ أن يكون أحد الضلعين $[A_0R_i]$ أو $[A_0R_{i+2}]$، وهو في الحالتين أزرق اللون. فهذه الحالة أيضاً لا تقع.
- أن يكون $[R_iB_i]$ و $[R_iB_{i+2}]$ ضلعان في المثلّث، ولكن في هذه الحالة يكون الضلع الثالث $[B_iB_{i+2}]$ غير ملّون، فهذه الحالة أيضاً تؤدي إلى خُلفٍ.

نستنتج مما سبق أنّه لا يوجد مثلّث أضلاعه حمراء اللّون وفق هذا التلوين. ونبرهن بأسلوب مماثل عدم وجود مثلّث أزرق اللون أيضاً. إذن لا بُدّ أن يكون $n \geq 33$.

لثبت أنّه في الحقيقة $n = 33$. أي إذا أبقينا فقط ثلاث قطع مستقيمة دون تلوين فلا بُدّ أن يكون هناك مثلّث أضلاعه تحمل اللون نفسه.

لنختر ثلاث نقاط متباينة من بين أطراف القطع غير الملوّنة. ولنتأمّل $\mathcal{X}$ مجموعة النقاط الستّ المتبقية. عندئذ تكون جميع القطع المستقيمة التي تصل بين أيِّ نقطتين من $\mathcal{X}$ ملوّنة.

ثُمّ لنختر نقطة ما A من $\mathcal{X}$. عندئذ تحمل ثلاثُ قطعٍ مستقيمة من بين القطع المستقيمة الخمس $([AC])_{C\in\mathcal{X}\setminus\{A\}}$ اللون نفسه، ولتكن هذه القطع هي $([AC_k])_{0\leq k\leq 2}$. وعندها لا بُدّ أن تحمل أضلاع أحد المثلّثات AC_0C_1 أو AC_1C_2 أو AC_2C_0 أو $C_0C_1C_2$ اللون نفسه.

وبذا يكتمل الإثبات. ■

④ نتأمّل دائرة $\mathfrak{C}$، ونقطة M واقعة على مماسٍّ d للدائرة $\mathfrak{C}$. أوجد المحلّ الهندسي للنقاط P التي توجد في حالتها نقطتان Q و R على d متناظرتان بالنسبة إلى M، وتكون $\mathfrak{C}$ هي الدائرة الماسّة لأضلاع المثلّث PQR داخلاً.

لنختر جملة محاور إحداثيّة يكون فيها d محور الفواصل، و $(0,r)$ مع $r > 0$، إحداثيّات I مركز $\mathfrak{C}$، و $(m,0)$ مع $m > 0$ إحداثيات النقطة M. عندئذ يمكن أن نفترض أنّ $Q(m+t,0)$ و $R(m-t,0)$ مع $t > m$. لنفترض أنّ إحداثيّات P هي (x,y) عندئذ، بحساب مساحة المثلّث IPQ بطريقتين، نجد

$$r^2 \cdot PQ^2 = \left|\det\left(\overrightarrow{IP},\overrightarrow{IQ}\right)\right|^2$$

ومنه

$$r^2\left((x-m-t)^2+y^2\right) = \left(r(x-m-t)+(m+t)y\right)^2$$

أو

$$r^2y = (y-2r)(m+t)^2 + 2rx(m+t) \tag{1}$$

وبأسلوبٍ مماثلٍ، بحساب مساحة المثلّث IPR بطريقتين، نجد

$$r^2y = (y-2r)(m-t)^2 + 2rx(m-t) \tag{2}$$

فإذا طرحنا (2) من (1) وجدنا

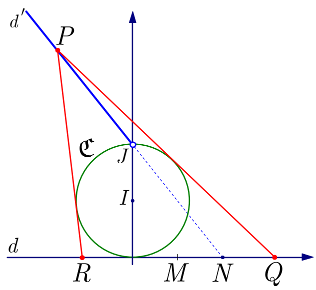
$$(y-2r)m+rx=0 \qquad (3)$$

وهي معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $J(0,2r)$، النقطة المُقابلة قطريّاً لنقطة تماس d مع $\mathfrak{C}$، والنقطة $N(2m,0)$، نظيرة نقطة تماس d مع $\mathfrak{C}$ بالنسبة إلى M.

وإذا جمعنا (1) و (2)، ثمّ أصلحنا العبارة وحسبنا x و y بدلالة t، وجدنا

$$y=\frac{2r\left(t^2-m^2\right)}{t^2-r^2-m^2} \quad \text{و} \quad x=\frac{-2mr^2}{t^2-r^2-m^2}$$

بالطبع، في حالة كون $\mathfrak{C}$ مماسّة داخلاً للمثلّث PQR يكون $y>0$ وهذه الحالة توافق إذن كون $t>\sqrt{m^2+r^2}$. وعندما ترسم t المجال $\left]\sqrt{m^2+r^2},+\infty\right[$ ترسم النقطة P الجزء من المستقيم d' الذي معادلته $(y-2r)m+rx=0$ الموافق لقيم x السالبة تماماً، أي نصف المستقيم المحمول على d'، الذي يبدأ من النقطة J ولا يحوي N. كما هو مبيّن في الشكل التالي :



وبذا يتمّ الإثبات. ■

⑤ لنتأمّل مجموعة منتهية S من نقاط الفراغ $\mathbb{R}^3$ المنسوب إلى جملة متعامدة تظاميّة $Oxyz$. ولتكن S_{xy} و S_{yz} و S_{xz} المساقط القائمة للمجموعة S على المستويات الإحداثيّة (Oxy) و (Oyz) و (Oxz) بالترتيب. أثبت أنّ

$$|S|^2 \leq |S_{xy}|\cdot|S_{yz}|\cdot|S_{xz}|$$

إذْ رمزنا في حالة مجموعة X بالرمز $|X|$ دلالة على $\operatorname{card}(X)$، أي عدد عناصر X.

لنعرّف الإسقاطات القائمة P_x و P_y و P_z على المحاور (Ox) و (Oy) و (Oz) بالترتيب كما يلي :

$$P_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, P_x\big((a,b,c)\big) = (a,0,0)$$
$$P_y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, P_y\big((a,b,c)\big) = (0,b,0)$$
$$P_z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, P_z\big((a,b,c)\big) = (0,0,c)$$

كما لنعرّف الإسقاطات $P_{xy} = P_x + P_y$ و $P_{yz} = P_y + P_z$ و $P_{xz} = P_x + P_z$، وهي الإسقاطات القائمة على المستويات (Oxy) و (Oyz) و (Oxz) بالترتيب.

نتأمّل في حالة n من $\mathbb{N}^*$ الخاصّة $\mathbb{P}_n$ المعرّفة كما يلي :

> أيّاً كانت المجموعة المنتهية $\mathcal{S}$، إذا كان $|P_z(\mathcal{S})| = n$ كان
> $$|\mathcal{S}|^2 \le \big|P_{xy}(\mathcal{S})\big|\big|P_{yz}(\mathcal{S})\big|\big|P_{xz}(\mathcal{S})\big|$$

سنثبتُ بالتدريج صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_n$ أيّاً كانت قيمة n، فيتمّ المطلوب.

- حالة $n = 1$. لنفترض مثلاً $P_z(\mathcal{S}) = \{c\}$، عندئذ يكون التطبيق

$$\mathcal{S} \to P_{xz}(\mathcal{S}) \times P_{yz}(\mathcal{S}) : (a,b,c) \mapsto ((a,0,c),(0,b,c))$$

متبايناً وضوحاً، ومن ثَمّ

$$|\mathcal{S}| \le \big|P_{yz}(\mathcal{S})\big|\big|P_{xz}(\mathcal{S})\big|$$

ومن جهة أخرى، $|\mathcal{S}| = \big|P_{xy}(\mathcal{S})\big|$. وهذا يُثبتُ صحّة المتراجحة المطلوبة

$$|\mathcal{S}|^2 \le \big|P_{xy}(\mathcal{S})\big|\big|P_{yz}(\mathcal{S})\big|\big|P_{xz}(\mathcal{S})\big|$$

فالخاصّة $\mathbb{P}_1$ صحيحة.

- لنفترض صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_k$ في حالة $k < n$، مع $n \ge 2$، ولنثبت صحّة $\mathbb{P}_n$.

لتكن $\mathcal{S}$ مجموعة منتهية تُحقّق $|P_z(\mathcal{S})| = n$. نعرّف m و M بالترتيب، أصغر وأكبر عناصر المجموعة $\{\gamma : (0,0,\gamma) \in P_z(\mathcal{S})\}$. لمّا كانت $n \ge 2$ استنتجنا أنّ $m < M$. ومن ثَمّ إذا اخترنا عدداً c يُحقّق $m < c < M$، وعرّفنا

$$\mathcal{L} = \{(x,y,z) \in \mathcal{S} : z \ge c\} \quad \text{و} \quad \mathcal{K} = \{(x,y,z) \in \mathcal{S} : z < c\}$$

كان

$$\mathcal{S} = \mathcal{K} \cup \mathcal{L} \text{ و } \mathcal{K} \cap \mathcal{L} = \varnothing \text{ و } \mathcal{L} \neq \varnothing \text{ و } \mathcal{K} \neq \varnothing$$

وكان من جهة أخرى،

$$|P_{xz}(\mathcal{S})| = |P_{xz}(\mathcal{L})| + |P_{xz}(\mathcal{K})|$$

و

$$|P_{yz}(\mathcal{S})| = |P_{yz}(\mathcal{L})| + |P_{yz}(\mathcal{K})|$$

$$|P_{xy}(\mathcal{S})| \geq |P_{yz}(\mathcal{K})|$$

و

$$|P_{xy}(\mathcal{S})| \geq |P_{yz}(\mathcal{L})|$$

بتطبيق فرْض التدريج على كلٍّ من $\mathcal{K}$ و $\mathcal{L}$ نجد

$$|\mathcal{L}| \leq \sqrt{|P_{xy}(\mathcal{L})||P_{yz}(\mathcal{L})||P_{xz}(\mathcal{L})|} \leq \sqrt{|P_{xy}(\mathcal{S})|}\sqrt{|P_{yz}(\mathcal{L})||P_{xz}(\mathcal{L})|}$$

و

$$|\mathcal{K}| \leq \sqrt{|P_{xy}(\mathcal{K})||P_{yz}(\mathcal{K})||P_{xz}(\mathcal{K})|} \leq \sqrt{|P_{xy}(\mathcal{S})|}\sqrt{|P_{yz}(\mathcal{K})||P_{xz}(\mathcal{K})|}$$

ومن ثَمّ

$$|\mathcal{S}| \leq \sqrt{|P_{xy}(\mathcal{S})|}\left(\sqrt{|P_{yz}(\mathcal{L})||P_{xz}(\mathcal{L})|} + \sqrt{|P_{yz}(\mathcal{K})||P_{xz}(\mathcal{K})|}\right)$$

وهنا نستفيد من المتراجحة

$$(a+b)(a'+b') - \left(\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'}\right)^2 = \left(\sqrt{ba'} - \sqrt{ab'}\right)^2 \geq 0$$

لنستنتج أنّ

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}|^2 &\leq |P_{xy}(\mathcal{S})|\left(|P_{yz}(\mathcal{L})| + |P_{yz}(\mathcal{K})|\right)\left(|P_{xz}(\mathcal{L})| + |P_{xz}(\mathcal{K})|\right) \\ &\leq |P_{xy}(\mathcal{S})||P_{yz}(\mathcal{S})||P_{xz}(\mathcal{S})| \end{aligned}$$

وهذا يبرهن صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_n$، والخاصّة المطلوبة بوجه عام. ◼

⑥ في حالة عددٍ طبيعي موجبٍ تماماً n، نعرّف $S(n)$ بأنّه أكبر عددٍ طبيعي يمكن، في حالة أيّ عددٍ طبيعي موجبٍ k أصغر منه، كتابة n^2 مجموع عددٍ يساوي k من المربّعات.

$$S(n)=\max\left\{p\in\mathbb{N}:\forall k\in\mathbb{N}_p,\exists(a_1,\dots a_k)\in\mathbb{N}^{*k}:n^2=\sum_{j=1}^{k}a_j^2\right\}$$

1. **أثبت أنّ** $\forall n\geq 4,\quad S(n)\leq n^2-14$.

2. **أوجد عدداً n يُحقّق** $S(n)=n^2-14$.

3. **أثبت وجود عددٍ لا نهائي من الأعداد n التي تُحقّق** $S(n)=n^2-14$.

في الحقيقة، هناك صياغة أكثر وضوحاً لتعريف $S(n)$، وربّما تكون أكثر فائدة في معالجة هذه المسألة. في حالة عددٍ طبيعي موجبٍ تماماً p نعرّف المجموعة $\mathcal{D}_p$ بأنّها مكوَّنة من جميع الأعداد الطبيعيّة التي تُكتب بشكل مجموع p مربّعاً لعددٍ طبيعي موجبٍ تماماً. أي

$$\mathcal{D}_p=\left\{\sum_{k\geq 1}\alpha_k k^2:\left(\forall k\in\mathbb{N}^*,\,\alpha_k\in\mathbb{N}\right)\wedge\left(\sum\nolimits_{k\geq1}\alpha_k=p\right)\right\}$$

بالطبع، تتألّف المجموعة $\mathcal{D}_1$ من مربعات الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً. نعرّف إذن، في حالة عددٍ طبيعي موجبٍ تماماً n، العدد $R(n)$ بأنّه أصغر دليل p يُحقّق $n^2\notin\mathcal{D}_p$، أي

$$R(n)=\min\left\{p\geq 2:n^2\notin\mathcal{D}_p\right\}$$

فنتيقّن مباشرة أنّ $R(n)=S(n)+1$.

1. لإثبات هذه الخاصّة يكفي أن نبرهن أنّ $n^2\notin\mathcal{D}_{n^2-13}$. لنفترض على سبيل الجدل وجود عددٍ n أكبر أو يساوي 4 ويُحقّق $n^2\in\mathcal{D}_{n^2-13}$. إذن توجد متتالية $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ من الأعداد الطبيعيّة تُحقّق في آن معاً الشرطين

$$n^2-13=\sum_{k\geq1}\alpha_k \quad \text{و} \quad n^2=\sum_{k\geq1}\alpha_k k^2$$

وبالطرح نجد $13=\sum_{k\geq2}\alpha_k\left(k^2-1\right)$.

بوجه خاص، نرى أنّه في حالة $k\geq 4$ لدينا $13\geq\alpha_k\left(k^2-1\right)\geq 15\alpha_k$، ومن ثَمّ

$$\forall k\geq 4,\quad \alpha_k=0$$

ومنه نستنتج أنّ $13=3\alpha_2+8\alpha_3$. فالعدد α_3 ينتمي إلى $\{0,1\}$، وهذا خُلفٌ، لأنّ $3\nmid 13$ و $3\nmid 5$. هذا التناقض يبرهن أنّ $n^2\notin\mathcal{D}_{n^2-13}$ ومن ثَمّ $R(n)\leq n^2-13$ أو $S(n)\leq n^2-14$.

2. أن ينتمي عددٌ إلى كلٍّ من $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ يعني أنّه في آنٍ واحدٍ مربّعٌ كاملٌ، ومجموع مربّعين كاملين. تبدأ قائمة هذه الأعداد بالأعداد 25 و 100 و 169 و...، أمّا إذا أردنا أيضاً أن ينتمي هذا العدد إلى $\mathcal{D}_3$، فإننا نجد أنّ أوّل هذه الأعداد هو 169، إذ إنّ

$$169 = 13^2 = 12^2 + 5^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2$$

سنبرهن فيما يلي أنّ العدد 13 يُحقّق $S(13) = 169 - 14 = 155$. أي أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}_{155}, \quad 169 \in \mathcal{D}_k$$

■ بملاحظة أنّ

$$169 = 4x\boxed{1} + (4y - x)\boxed{4} + (4z + 2 - y)\boxed{16} + (2 - z)\boxed{64} + 1\boxed{9}$$

نستنتج أنّه إذا انتمت الثلاثيّة (x, y, z) إلى المجموعة

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : 0 \le x \le 4y, y \le 4z + 2, z \le 2\}$$

انتمى العدد 169 إلى $\mathcal{D}_{5+3(x+y+z)}$.

وبملاحظة أنّ A تحوي $\{(x, 10, 2) : 0 \le x \le 40\}$ و $\{(x, 2, 1) : 0 \le x \le 8\}$ و $\{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$، استنتجنا أنّ

$$\{0, 1, \ldots, 52\} \subset \{x + y + z : (x, y, z) \in A\}$$

إذن $169 \in D_{5+3k}$ في حالة k من $\{0, 1, \ldots, 52\}$. ولأنّ $169 \in \mathcal{D}_2$ استنتجنا أنّ

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, 53\}, \quad 169 \in D_{2+3k} \qquad (1)$$

■ وكذلك، بملاحظة أنّ

$$169 = (1 + 4x)\boxed{1} + (4y + 2 - x)\boxed{4} + (4z + 2 - y)\boxed{16} + (2 - z)\boxed{64}$$

نستنتج أنّه إذا انتمت الثلاثيّة (x, y, z) إلى المجموعة

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : 0 \le x \le 4y + 2, y \le 4z + 2, z \le 2\}$$

انتمى العدد 169 إلى $\mathcal{D}_{7+3(x+y+z)}$. وكما فعلنا سابقاً نجد

$$\{0, 1, \ldots, 54\} \subset \{x + y + z : (x, y, z) \in B\}$$

إذن $169 \in D_{7+3k}$ في حالة k من $\{0, 1, \ldots, 54\}$. ولأنّ $169 \in \mathcal{D}_1$، ولدينا من جهة أخرى، $169 = \boxed{4^2} + \boxed{5^2} + 2\boxed{8^2} \in \mathcal{D}_4$، استنتجنا أنّ

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, 56\}, \quad 169 \in D_{1+3k} \qquad (2)$$

▪ وأخيراً، بملاحظة أنّ

$$169 = (3+4x)\boxed{1} + (4y+1-x)\boxed{4} + (4z+1-y)\boxed{16} + (2-z)\boxed{64} + 2\boxed{9}$$

نستنتج أنّه إذا انتمت الثلاثيّة (x,y,z) إلى المجموعة

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 : 0 \le x \le 4y+1, y \le 4z+1, z \le 2\right\}$$

انتمى العدد 169 إلى $\mathcal{D}_{9+3(x+y+z)}$.

وبملاحظة أنّ C تحوي $\{(x,9,2) : 0 \le x \le 37\}$ و $\{(x,2,1) : 0 \le x \le 7\}$ و $\{(0,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$، استنتجنا أنّ

$$\{0,1,\ldots,48\} \subset \{x+y+z : (x,y,z) \in C\}$$

إذن $169 \in D_{9+3k}$ في حالة k من $\{0,1,\ldots,48\}$. ولكن رأينا أنّ $169 \in \mathcal{D}_3$ كما نرى أنّ $169 = 4\boxed{2^2} + \boxed{3^2} + \boxed{12^2} \in \mathcal{D}_6$ نستنتج أنّ

$$\forall k \in \{1,\ldots,51\}, \quad 169 \in D_{3k} \tag{3}$$

فإذا تأمّلنا (1) و (2) و (3) استنتجنا أنّ

$$\forall k \in \{1,\ldots,155\}, \quad 169 \in D_k$$

فالعدد $N = 13$ يُحقّق $S(N) = N^2 - 14$.

3. سنبدأ بإثبات خاصّتين مفيدتين.

▪ في حالة $n \ge 20$، تتحقّق الخاصّة التالية :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 14 \le k \le \frac{3n}{4} \Rightarrow n \in \mathcal{D}_{n-k} \tag{4}$$

لإثبات ذلك، نتأمّل عدداً n أكبر أو يساوي 20 ونناقش الحالات الثلاث التالية.

❶ نلاحظ أوّلاً أنّ $n = (n-4x)\boxed{1^2} + x\boxed{2^2}$. إذن

$$0 \le x \le \frac{n}{4} \Rightarrow n \in \mathcal{D}_{n-3x}$$

وهذا يُكافئ قولنا

$$\left(0 \le k \le \frac{3n}{4}\right) \wedge (k = 0 \bmod 3) \Rightarrow n \in \mathcal{D}_{n-k}$$

❷ وكذلك نرى أنّ $n = (n-1-4x)\boxed{1^2} + (x-2)\boxed{2^2} + 1\boxed{3^2}$. إذن

$$2 \le x \le \frac{n-1}{4} \Rightarrow n \in \mathcal{D}_{n-2-3x}$$

وهذا يُكافئ قولنا

$$\left(8 \le k \le \frac{3n+5}{4}\right) \wedge (k = 2 \bmod 3) \Rightarrow n \in \mathcal{D}_{n-k}$$

❸ وأخيراً، نرى أنّ $n = (n+2-4x)\boxed{1^2} + (x-4)\boxed{2^2} + 2\boxed{3^2}$. إذن

$$5 \le x \le \frac{n+2}{4} \Rightarrow n \in \mathcal{D}_{n-1-3x}$$

وهذا يُكافئ قولنا

$$\left(16 \le k \le \frac{3n+10}{4}\right) \wedge (k = 1 \bmod 3) \Rightarrow n \in \mathcal{D}_{n-k}$$

وبالنظر إلى الخواصّ ❶ و ❷ و ❸ نستنتج صحّة (4).

لنعرّف الآن المجموعات $(\mathcal{E}_p)_{p\ge 1}$ بالصيغة

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{D}_p = \bigcap_{1\le j\le p} \mathcal{D}_j$$

عندئذ تتحقّق الخاصّة التالية.

- في حالة p و q من $\mathbb{N}^*$، لدينا

$$\forall (a,b) \in \mathcal{E}_p \times \mathcal{E}_q, \quad ab \in \mathcal{E}_{pq} \qquad (5)$$

ليكن (a,b) من $\mathcal{E}_p \times \mathcal{E}_q$، ولنتأمّل عدداً k من المجموعة $\mathbb{N}_{pq}$.

– إذا كانت $k \le q$. نستنتج، بملاحظة أنّ $b \in \mathcal{D}_k$ و $a \in \mathcal{D}_1$، أنّ

$$a = \alpha^2 \quad \text{و} \quad b = \sum_{\ell=1}^{k} \beta_\ell^2$$

ومن ثَمّ

$$ab = b = \sum_{\ell=1}^{k} (\alpha\beta_\ell)^2 \in \mathcal{D}_k$$

– لنفترض إذن أنّ $k = nq + r$، مع n من $\mathbb{N}_{p-1}$ و r من $\mathbb{N}_q$. بملاحظة أنّ $b \in \mathcal{D}_q$ و $b \in \mathcal{D}_r$ و $a \in \mathcal{D}_{n+1}$ نستنتج أنّ

$$a = \delta^2 + \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell^2 \quad \text{و} \quad b = \sum_{i=1}^{q} \beta_i^2 = \sum_{j=1}^{r} \gamma_j^2$$

ونصل إلى (5) كما يلي

$$ab = \delta^2 b + \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell^2 b = \sum_{j=1}^{r} (\delta\gamma_j)^2 + \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{i=1}^{q} (\alpha_\ell\beta_i)^2 \in \mathcal{D}_{nq+r}$$

سنستفيد من الخاصتين السابقتين (4) و (5) لنبرهن الخاصّة التالية.

- إذا كان n و m عددين طبيعيَّين يُحقّقان :

$$S(n) = n^2 - 14 \quad \text{و} \quad S(m) = m^2 - 14$$

كان $S(nm) = (nm)^2 - 14$.

في الحقيقة، يُكافئ الفرْضُ قولَنا $n^2 \in \mathcal{E}_{n^2-14}$ و $m^2 \in \mathcal{E}_{m^2-14}$. فإذا استفدنا من (5) استنتجنا أنّ

$$n^2m^2 \in \mathcal{E}_{(n^2-14)(m^2-14)}$$

إذن

$$\forall k \in \{1,\ldots,(n^2-14)(m^2-14)\}, \quad n^2m^2 \in \mathcal{D}_k \tag{6}$$

وإذا استفدنا من (4) استنتجنا أيضاً أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 14 \le k \le \frac{3(n^2-14)(m^2-14)}{4} \Rightarrow n^2m^2 \in \mathcal{D}_{n^2m^2-k}$$

وذلك لأنّ دراستنا السابقة تقتضي $n^2 \ge 169$ و $m^2 \ge 169$. وهذا يُكافئ

$$n^2m^2 - \frac{3(n^2-14)(m^2-14)}{4} \le k \le n^2m^2 - 14 \Rightarrow n^2m^2 \in \mathcal{D}_k \tag{7}$$

ولكن في حالة $\ell^2 \ge 169$ لدينا

$$\frac{\ell^2}{\ell^2-14} = 1 + \frac{14}{\ell^2-14} \le 1 + \frac{14}{155} < 1.1$$

ومن ثَمّ

$$\frac{n^2}{n^2-14} \cdot \frac{m^2}{m^2-14} < 1.21 < \frac{7}{4}$$

وهذا يبرهن أنّ

$$n^2m^2 - \frac{3(n^2-14)(m^2-14)}{4} < (n^2-14)(m^2-14)$$

فإذا تأمّلنا (6) و (7) والمتراجحة السابقة استنتجنا أنّ

$$\forall k \in \{1,\ldots,n^2m^2-14\}, \quad n^2m^2 \in \mathcal{D}_k$$

وهذا يعني أنّ $S(nm) = (nm)^2 - 14$.

وهكذا نرى أنّ أيّ عددٍ n من $\{(13)^r : r \in \mathbb{N}^*\}$ يُحقّق $S(n) = n^2 - 14$. ■

أولمبياد الرياضيّات الرابع والثلاثون

① **ليكن n عدداً طبيعيّاً أكبر تماماً من 1. ولنتأمّل كثير الحدود**

$$P(X) = X^n + 5X^{n-1} + 3$$

أثبت أنّه لا يمكن كتابة P بشكل جداء ضرب كثيرَي حدودٍ غير ثابتين أمثالهما أعداد صحيحة.

لنفترض وجود كثيرَي حدود غير ثابتين

$$B(X) = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k \quad \text{و} \quad A(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$$

من $\mathbb{Z}[X]$ يُحقّقان $P(X) = A(X)B(X)$. عندئذ نرى مباشرة أنّ $p \geq 1$ و $q \geq 1$ و $n = p + q$. ويكون لدينا $a_p b_q = 1$ و $a_0 b_0 = 3$. إذن يمكن أن نفترض دون الإقلال من عموميّة الدراسة أنّ $a_p = b_p = 1$ وأنّ $a_0 = \varepsilon$ و $b_0 = 3\varepsilon$ مع $\varepsilon \in \{-1,1\}$.

لنتأمّل المساواة $P(X) = A(X)B(X)$ بالقياس 3، أي في الحلقة الأساسيّة $\mathbb{F}_3[X]$ مع $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. عندئذ يكون لدينا في $\mathbb{F}_3[X]$،

$$\overline{P}(X) = X^n - X^{n-1} = X^{n-1}(X-1)$$

$$\overline{A}(X) = X^p + \sum_{k=1}^{p-1} \overline{a_k} X^k + \varepsilon$$

$$\overline{B}(X) = X^q + \sum_{k=1}^{q-1} \overline{b_k} X^k$$

إذْ عرّفنا $\overline{b_k} = b_k \bmod 3$ و $\overline{a_k} = a_k \bmod 3$. وتقتضي المساواة $P = AB$ أنّ

$$\overline{A}(X)\overline{B}(X) = X^{n-1}(X-1)$$

ومنه $X^{n-1} \mid \overline{A} \cdot \overline{B}$، و $\gcd\left(X^{n-1}, \overline{A}\right) = 1$، لأنّ $\varepsilon \neq 0 \bmod 3$. إذن لا بُدّ أن يكون $X^{n-1} \mid \overline{B}$، وهذا يقتضي أنّ

$$n - 1 \leq \deg \overline{B} = q = n - p \leq n - 1$$

ومنه $p = 1$ و $A(X) \in \{X-1, X+1\}$. ولكنّ هذا خُلفٌ لأنّ $P(1) = 9 \neq 0$، و $P(-1) = 4(-1)^{n-1} + 3 \neq 0$. إذن كثير الحدود P غير خزول في $\mathbb{Z}[X]$. ◼

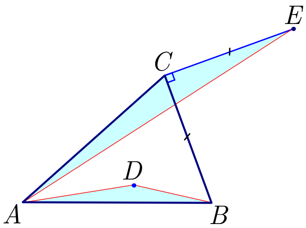
② **ليكن ABC مثلّثاً حادّ الزوايا. ولتكن D نقطة داخل المثلّث ABC، تُحقّق**

$$AC\cdot BD = AD\cdot BC \quad \text{و} \quad \widehat{ADB} = \frac{\pi}{2} + \widehat{ACB}$$

1. **احسب النسبة** $\rho = \dfrac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}$.

2. **أثبت تعامد المماسين المرسومين من النقطة C للدائرتين $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ المارتين برؤوس كلٍّ من المثلّثين ACD و BCD بالترتيب.**

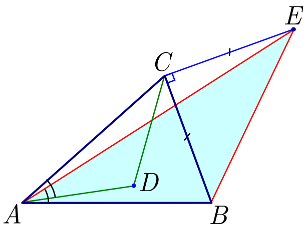
1. لنتأمّل النقطة E من المستوي التي تجعل المثلّث BCE مثلّثاً قائم الزاوية في C ومتساوي الساقين، وتقع في نصف المستوي الذي يعيِّنه المستقيم (BC) ولا يحوي A. فيكون لدينا



$$\frac{AC}{AD} = \frac{EC}{BD} \quad \text{و} \quad \widehat{ADB} = \widehat{ACE}$$

فالمثلّثان ADB و ACE متشابهان. وعلى وجه الخصوص لدينا $\widehat{BAD} = \widehat{EAC}$ ومن ثمّ

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} \quad \text{و} \quad \widehat{BAE} = \widehat{DAC}$$



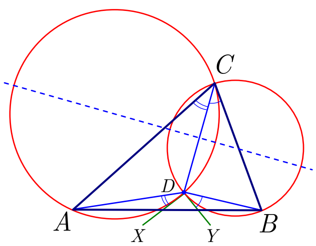
ومنه تشابه المثلّثين ABE و ADC، وخصوصاً

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BE}{CD}$$

أو $AB\cdot CD = AD\cdot BE$. وأخيراً نجد

$$\rho = \frac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD} = \frac{AD\cdot BE}{AD\cdot BC} = \frac{BE}{BC} = \sqrt{2}$$

2. لنتأمّل ضمن الزاوية ADB نصفَي المستقيمين $[DX)$ و $[DY)$ المماسّين في D لكلٍّ من $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ بالترتيب. فيكون $\widehat{ADX} = \widehat{ACD}$ لأنّهما زاوية مماسّية وزاوية محيطيّة مشتركتين بالقوس $\widehat{AD}$ من $\mathfrak{C}_1$. وكذلك تتساوى الزاويتان $\widehat{YDB}$ و $\widehat{DCB}$ لاشتراكهما بالقوس $\widehat{DB}$ من $\mathfrak{C}_2$. إذن $\widehat{ADX} + \widehat{YDB} = \widehat{ACB}$، وهذا يبرهن على أنّ $\widehat{XDY} = \widehat{ADB} - \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2}$.



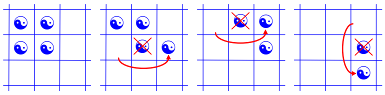
فالمماسّان من D للدائرتين $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ متعامدان، ولأنّ محور $[CD]$ هو خط المركزين استنتجنا من التناظر أنّ المماسّين من C للدائرتين $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ متعامدان أيضاً. ■

③ **على قطعة شطرنج لا نهائيّة نلعب اللعبة التالية. نبدأ بوضع n^2 حجراً من أحجار اللعبة في كتلة مربّعة الشكل أبعادها $n \times n$، حجراً في كلِّ مربّع. الحركات المسموحة هي القفز شاقولياً أو أفقيّاً فوق مربّع مجاور مشغول إلى مربّع خال يجاوره مباشرةً، وتُسحب من اللّعب القطعةُ التي يجرى المرور فوقها.**

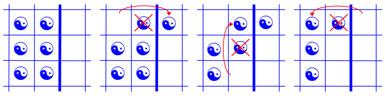
المطلوب هو تعيين قيم n التي يمكن أن تنتهي اللعبة، في حالتها، مع بقاء قطعة واحدة على الرقعة.

لتكن $\mathcal{R}$ مجموعة قيم n التي يمكن أن تنتهي اللعبة، عندها، مع بقاء قطعة واحدة على الرقعة.

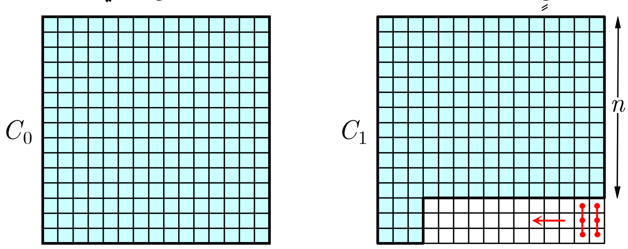
❶ لنلاحظ أوّلاً أنّ $2 \in \mathcal{R}$ كما هو مبيّنٌ في الشكل التالي :



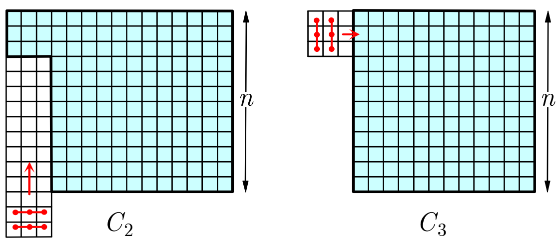
❷ لنفترض أنّ $n \geq 3$، وأنّ $n \in \mathcal{R}$، ولنثبت أنّ $n+3 \in \mathcal{R}$. ننطلق من كتلة مربّعة مملوءة بعددٍ $(n+3)^2$ من الأحجار، ونتأمّل الخوارزميّة A_1 الموضّحة في الشكل التالي :



بتطبيق الخوارزميّة A_1 تكراراً نرى أنّه بالإمكان الانتقال من وضع البدء C_0 إلى الوضع C_1 الناتج من حذف مستطيلٍ بعداه $3 \times n$ كما هو مبيّن في الشكل التالي :

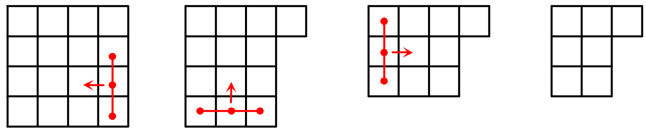


ثُمّ بتطبيق الخوارزميّة نفسها بالاتّجاه الآخر تكراراً نتمكّن من حذف مستطيل آخر بعداه $3 \times n$ فننتقل إلى الوضع C_2 المبيَّن في الشكل التالي،



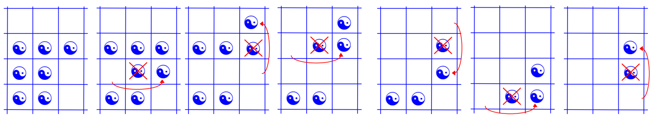
وأخيراً نستفيد من كوْن $n \geq 3$، لنطبّق الخوارزميّة نفسها ثلاث مرّات فنحذف مربّعاً 3×3، ونصل إلى الوضع C_3 الموافق لحالة كتلة مربّعة $n \times n$. ولأنّ $n \in \mathcal{R}$ استنتجنا أنّ $n+3 \in \mathcal{R}$.

❸ لدينا $4 \in \mathcal{R}$. في الحقيقة، إذا طبّقنا الأسلوب الذي أشرنا إليه في الفقرة السابقة وصلنا إلى الوضع المبيَّن في الشكل التالي :



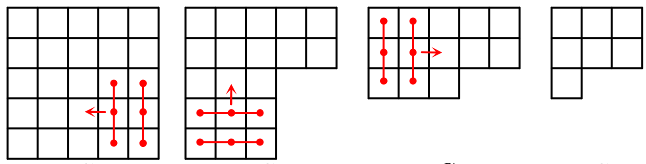
C_0 C_1 C_2 C_3

وانطلاقاً من C_3 نصل إلى قطعة واحدة على الرقعة كما يلي :



فنكون قد أثبتنا أنّ $4 \in \mathcal{R}$.

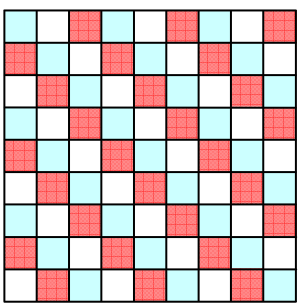
❹ لدينا أيضاً $5 \in \mathcal{R}$. في الحقيقة، إذا طبّقنا الأسلوب الذي أشرنا إليه في الفقرة ❸ السابقة وصلنا إلى الوضع المبيَّن في الشكل التالي :



C_0 C_1 C_2 C_3

وبملاحظة أنّ الوضع C_3 هنا هو نفسه الوضع C_3 في الحالة السابقة استنتجنا أنّ $5 \in \mathcal{R}$.

❺ إذا كان $3 \nmid n$ كان $n \in \mathcal{R}$. هذه نتيجة واضحة من كون $\{2,4,5\} \subset \mathcal{R}$ ومن الخاصّة التدريجيّة ❸.



❻ إذا كان $3 \mid n$ كان $n \notin \mathcal{R}$. سنفترض أننا لوَّنّا مربّعات الرقعة بثلاثة ألوان : الأحمر R، والأبيض W، والأزرق B. كما في الشكل المجاور. عندئذ نلاحظ أنّ انتقال أي حجر إلى مربّع من أحد الألوان الثلاثة، يؤدّي إلى زيادة عدد القطع الواقعة على هذا اللون بمقدار 1، وإلى إنقاص عدد القطع الواقعة على كلٍّ من اللونين الآخرين بمقدار 1.

لنرمز بالرمز r إلى العدد الكلّي للانتقالات **إلى مربّع أحمر** اللون منذ بدء اللعبة حتّى توقّفها، ولنرمز بالمثل w إلى العدد الكلّي للانتقالات **إلى مربّع أبيض** اللون منذ بدء اللعبة حتّى توقّفها، وبالرمز b إلى العدد الكلّي للانتقالات **إلى مربّع أزرق** اللون منذ بدء اللعبة حتّى توقّفها.

لنكتب $n = 3m$. في البدء كان لدينا كتلة مربّعة $3m \times 3m$ مليئة بالأحجار، ومن ثَمّ كان لدينا $3m^2$ حجراً موضوعاً على مربعات حمراء اللون، و $3m^2$ حجراً موضوعاً على مربعات بيضاء اللون، و $3m^2$ حجراً موضوعاً على مربعات زرقاء اللون.

وإذا استفدنا من الملاحظة التي بدأنا بها نرى أنّه عند انتهاء اللعبة يكون عدد الأحجار المتبقّية على مربّعات حمراء مساوياً $x = 3m^2 + r - w - b$ ، وعدد الأحجار المتبقّية على مربّعات بيضاء $y = 3m^2 + w - r - b$ ، وأخيراً يكون عدد الأحجار المتبقّية على مربّعات زرقاء $z = 3m^2 + b - r - w$. وهنا نلاحظ أنّ

$$x \equiv y \equiv z \bmod 2$$

فلا يمكن أن يبقى حجراً واحداً على الرقعة عند انتهاء اللعبة. وهذا يبرهن أنّ $n \notin \mathcal{R}$.

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّه يمكن للُّعبة أن تنتهي بحجر واحدٍ على الرقعة إذا وفقط إذا كان العدد 3 لا يقسم العدد n . ■

④ **في حالة ثلاث نقاط P و Q و R من المستوي نعرّف $m(PQR)$ بأنّه يساوي 0 إذا كانت النقاط P و Q و R على استقامة واحدة، أو يساوي طول أقصر ارتفاعات المثلّث PQR في الحالة المعاكسة.**

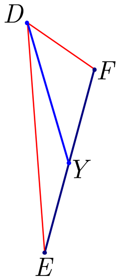
أثبت أنّه، أياً كانت النقاط A و B و C و X من المستوي، كان

$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$$

لنلاحظ أنّ المقدار $m(ABC)$ يساوي ضعفي مساحة المثلّث ABC ، التي سنرمز إليها $\mathcal{A}(ABC)$ ، مقسومة على أطول أضلاع هذا المثلّث. أي

$$m(ABC) = \frac{2\mathcal{A}(ABC)}{\max(AB, BC, CA)}$$

❶ لنبدأ بحالة X تقع داخل المثلّث ABC . ولنثبت في هذه الحالة أنّ الأطوال AX و BX و CX جميعها أقصر من أطول أضلاع المثلّث ABC أي من BC .



في الحقيقة، سنستفيد من الخاصّة التالية.

> لتكن Y نقطة من القطعة المستقيمة EF ، ولتكن D نقطة ما. عندئذ يكون الطول DY أقصر من أكبر الطولين DE و DF . أي
> $$DY \leq \max(DE, DF)$$

لنتأمّل التابع

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}, \varphi(t) = \left\| \overrightarrow{DE} + t\overrightarrow{EF} \right\|^2$$

عندئذ، بملاحظة أنّ

$$\varphi(t) = DE^2 + 2t\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{EF} + t^2 EF^2$$

نستنتج أنّ φ تابعٌ محدّبٌ، ومن ثَمّ في حالة t من $[0,1]$،

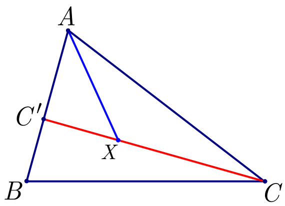
$$\varphi(t) \leq (1-t)\varphi(0) + t\varphi(1) \leq \max(\varphi(0), \varphi(1))$$

ومنه

$$\forall t \in [0,1], \quad \left\| \overrightarrow{DE} + t\overrightarrow{EF} \right\| \leq \max(DE, DF)$$

وهذا يُكافئ

$$\forall Y \in [EF], \quad DY \leq \max(DE, DF)$$



لنتأمّل، إذن، مثلّثاً ABC . ولنعرّف

$$L = \max(AB, BC, AC)$$

ثُمّ لتكن X نقطة من داخل هذا المثلّث. ولنعرّف C' نقطة تقاطع (CX) مع $[AB]$. عندئذ بالاستفادة من الخاصّة السابقة نجد

$$AX \leq \max\left(AC, AC'\right) \leq \max(AC, AB) \leq L$$

ونبرهن بالأسلوب نفسه أنّ $BX \leq L$ و $CX \leq L$. ومنه نستنتج أنّ

$$m(ABX) = \frac{2\mathcal{A}(ABX)}{\max(AB, AX, BX)} \geq \frac{2\mathcal{A}(ABX)}{L}$$

وكذلك $m(AXC) \geq \dfrac{2\mathcal{A}(AXC)}{L}$ و $m(XBC) \geq \dfrac{2\mathcal{A}(XBC)}{L}$.

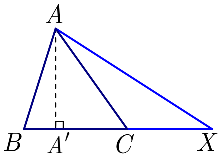
ولمّا كان لدينا

$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ABX) + \mathcal{A}(AXC) + \mathcal{A}(XBC)$$

استنتجنا أنّ

$$m(ABC) = \frac{2\mathcal{A}(ABX)}{L} + \frac{2\mathcal{A}(AXC)}{L} + \frac{2\mathcal{A}(XBC)}{L}$$
$$\leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$$

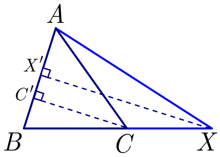
وينتهي بذلك الإثبات في حالة وقوع X داخل المثلّث ABC.



❷ حالة X تقع على امتداد أحد أضلاع المثلث ABC وخارجه.
في هذه الحالة يمكن، دون الإقلال من عموميّة الإثبات، أن نفترض أنّ X تقع على المستقيم (BC) وأنّ C تقع بين B و X.

- لمّا كان (BC) هو نفسه (BX) استنتجنا أنّ

$$d(A,(BX)) = d(A,(BC)) \qquad (1)$$



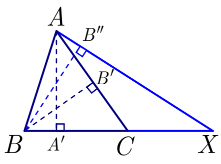
- ليكن X' موقع الارتفاع النازل من X في ABX، وليكن C' موقع الارتفاع النازل من C في ABC. نستنتج من تشابه المثلّثين القائمين $XX'B$ و $CC'B$ أنّ

$$\frac{XX'}{CC'} = \frac{BX}{BC} \geq 1$$

إذن

$$d(X,(BA)) \geq d(C,(BA)) \qquad (2)$$

- ليكن B'' موقع الارتفاع النازل من B في ABX، وليكن B' و A' موقعَي الارتفاعين النازلين من B و A في ABC.



لنفترض أنّ $AA' < BB''$. عندئذ، بحساب مساحة المثلّث ABX بطريقتين نستنتج أنّ $AX < BX$. وهذا يقتضي أنّ الزاوية $\widehat{BAX}$ زاوية حادّة، ومن المتراجحة $\widehat{BAC} < \widehat{BAX} \leq \frac{\pi}{2}$ نستنتج أنّ

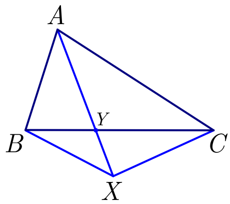
$$BB'' = BA\sin\widehat{BAX} > BA\sin\widehat{BAC} = BB'$$

وهكذا نكون أثبتنا أنّ $BB'' \geq \min(AA', BB')$، أي

$$d(B,(AX)) \geq \min(d(B,(AC)), d(A,(BC))) \qquad (3)$$

ومن (1) و (2) و (3) نستنتج أنّ $m(ABX) \geq m(ABC)$، ومنه المتراجحة المرجوّة.

❸ لنأتِ إلى الحالة العامّة. يمكن أن نفترض أنّ المستقيم (AX) يتقاطع مع المستقيم (BC) في نقطة Y. (لا يكون ذلك ممكناً فقط في حالة وقوع النقاط الأربع على استقامة واحدة وعندها تكون المتراجحة تافهة.) وهنا نناقش الحالتين التاليتين.



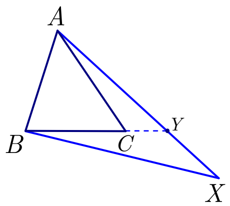
- حالة $Y \in [BC]$. استناداً إلى الحالة ❷ يمكن أن نكتب ما يلي :

$$m(ABY) \le m(ABX)$$
$$m(AYC) \le m(AXC)$$

ولكن بالاستفادة من الحالة ❶ لدينا

$$\begin{aligned} m(ABC) &\le m(ABY) + m(AYC) \le m(ABX) + m(AXC) \\ &\le m(ABX) + m(AXC) + m(XBC) \end{aligned}$$

ومنه المتراجحة المرجوّة.



- حالة $Y \notin [BC]$. استناداً إلى الحالة ❷ السابقة يمكن أن نكتب ما يلي :

$$m(ABY) \le m(ABX)$$
$$m(ABC) \le m(ABY)$$

إذن

$$m(ABC) \le m(ABX) \le m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$$

وبذا يكتمل إثبات المتراجحة المطلوبة. ■

⑤ **أيوجد تابعٌ** $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ **متزايدٌ تماماً على مجموعة الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً، ويُحقّق الشرطين** $f(1) = 2$ و $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(f(n)) = f(n) + n$ ؟

لنفترض وجود مثل هذا التابع، ولنلاحظ أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{f(f(n))}{f(n)} \cdot \frac{f(n)}{n} = \frac{f(n)}{n} + 1$$

فإذا كان $\lim_{n\to\infty}(f(n)/n) = \alpha$ ، استنتجنا مما سبق أنّ $\alpha^2 = \alpha + 1$.

وهذا ما يجعلنا نختار $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$، ونبحث عن التابع f بحيث يكون $f(n)$ قريباً من αn.
وتحديداً لنتأمّل التابع

$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*, f(n) = \operatorname{round}(\alpha n) = \lfloor \alpha n + 1/2 \rfloor$$

- من الواضح أنّ $f(1) = 2$.
- ولدينا $\left| f(n) - \alpha n \right| \le \frac{1}{2}$ أياً كانت قيمة n.
- لتكن n من $\mathbb{N}^*$، ولنلاحظ ما يلي :

$$\begin{aligned}
\delta_n &= f(f(n)) - f(n) - n \\
&= f(f(n)) - \alpha f(n) + (\alpha - 1) f(n) - n \\
&= f(f(n)) - \alpha f(n) + (\alpha - 1)(f(n) - \alpha n) + (\alpha^2 - \alpha - 1) n \\
&= f(f(n)) - \alpha f(n) + (\alpha - 1)(f(n) - \alpha n)
\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}
\left| \delta_n \right| &\le \left| f(f(n)) - \alpha f(n) \right| + (\alpha - 1) \left| f(n) - \alpha n \right| \\
&\le \frac{1}{2} + \frac{\alpha - 1}{2} = \frac{\alpha}{2} < 1
\end{aligned}$$

ولكنّ δ_n عددٌ صحيحٌ فلا بُدّ أن يكون $\delta_n = 0$، أي

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(f(n)) = f(n) + n$$

وهي النتيجة المطلوبة. ◼

⑥ ليكن n عدداً طبيعيّاً أكبر تماماً من 1. نتأمّل عدداً n من المصابيح $(💡_k)_{0 \le k < n}$ موضوعة على محيط دائرة، وفي حالة k من $\mathbb{Z}$ نكتب $💡_k$ دلالة على $💡_{k \bmod n}$. كلُّ مصباحٍ يأخذ حالة واحدة فقط من حالتين إمّا مُضاءاً أو مُطفأً. في البدء كانت جميع المصابيح مُضاءة. ثُمّ مررنا تِباعاً بالمراحل $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ المشروحة فيما يلي : في المرحلة s_i، نغيِّر حالة المصباح $💡_i$ إذا كان المصباح $💡_{i-1}$ مُضاءاً، ونبقيه على حالته إذا كان المصباح $💡_{i-1}$ مُطفأً. أثبت صحة الخواص التالية :

1. **يوجد عددٌ موجبٌ تماماً من المراحل M_n، تعود بعده جميع المصابيح لتصبح مُضاءة.**
2. **في حالة $n = 2^p$، يمكن أن نأخذ $M_n = n^2 - 1$.**
3. **في حالة $n = 2^p + 1$، يمكن أن نأخذ $M_n = n^2 - n + 1$.**

في هذه المسألة سنستعمل الرمز المتعارف $\mathbb{F}_2$ دلالة على الحقل $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\oplus,\odot)$. أي المجموعة $\{0,1\}$ مزوّدةً بالجمع $\oplus$، والضرب $\odot$ بالقياس 2. بالطبع سيرمز العدد 1 إلى المصباح المُضاء، والعدد 0 إلى المصباح المُطفأ.

لنرمز في اللحظة i من $\mathbb{N}$، بالرمز $\sigma_i = \left(\varepsilon_0^{(i)},\varepsilon_1^{(i)},\ldots,\varepsilon_{n-1}^{(i)}\right)$ إلى الشعاع من $\mathbb{F}_2^n$ الذي يمثّل حالة المصابيح $(💡_i, 💡_{i+1},\ldots, 💡_{i+n-1})$. أي يكون المصباح $💡_{i+r}$ مُضاءً في اللحظة i إذا وفقط إذا كان $\varepsilon_r^{(i)} = 1$.

في البدء كان $\sigma_0 = (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n})$. ثُمّ نحصل على الحالات المتلاحقة $(\sigma_i)_{i\geq 0}$ بالعلاقة التدريجيّة $\sigma_{i+1} = s(\sigma_i)$، و s هو التحويل

$$s : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n, (\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}) \mapsto (\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_{n-1}\oplus\alpha_0)$$

وعليه، نرى أنّ $\forall i \in \mathbb{N},\ \sigma_i = s^i(\sigma_0)$. وتؤول المسألة إلى البحث عن دليل k غير معدوم يُحقّق $\sigma_k = \sigma_0$.

نلاحظ مباشرة أنّ التطبيق s تقابلٌ وأنّ تقابله العكسي $t = s^{-1}$ معرّف ببساطة بالصيغة

$$t : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n, (\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}) \mapsto (\beta_{n-2}\oplus\beta_{n-1},\beta_0,\beta_1\ldots,\beta_{n-2})$$

يمكن إعطاء هذه المسألة صياغة مصفوفيّة بسيطة إذا لاحظنا أنّ التحويل s هو تطبيقٌ خطّي على الفضاء الشعاعي $\mathbb{F}_2^n$ على الحقل $\mathbb{F}_2$.

لنكتب S و T دلالة على مصفوفة كلٍّ من s و t بالنسبة إلى الأساس القانوني في $\mathbb{F}_2^n$. فنجد مباشرة أنّ

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ولنعرف V_i بأنّه شعاع العمود σ_i^T أي منقول شعاع السطر σ_i. فيكون

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad V_i = S^i V_0$$

❶ لا يمكن أن يكون التطبيق $\varphi : \{0,1,\ldots,2^n\} \to \mathbb{F}_2^n, i \mapsto V_i$ تطبيقاً متبايناً لأنّ عدد عناصر منطلقه يزيدُ واحداً على عدد عناصر مستقرّه، فيوجد دليلان i و j يُحقّقان الشرطين $0 \leq i < j \leq 2^n$ و $V_i = V_j$، أو $S^j V_0 = S^i V_0$، ولكنّ المصفوفة S قَلوبةٌ إذن لا بُدَّ أن يكون $S^{j-i} V_0 = V_0$، وهذا يبرهن أنّ المجموعة $\left\{\ell \in \mathbb{N}^* : S^\ell V_0 = V_0\right\}$ غير خالية، ويكفي أن نعرّف $M_n = \min\left\{\ell \in \mathbb{N}^* : S^\ell X_0 = X_0\right\}$ ليتمّ إثبات الخاصّة الأولى، مع $M_n \leq 2^n$.

❷ نفترض أنّ $n = 2^p$. يكفي أن نثبت أنّ $S^{n^2-1} = I_n$ ليتمّ المطلوب. وهنا يبدو من الأسهل التعامل مع المصفوفة $T = S^{-1}$. ليكن $Q(X)$ كثير الحدود المميِّز للمصفوفة T. أي

$$Q(X) = \det(T \oplus XI_n) = \det \begin{bmatrix} X & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & X \end{bmatrix}$$

بنشر هذا المحدّد وفق سطره الأوّل نجد مباشرة أنّ

$$Q(X) = X^n \oplus X \oplus 1$$

إذن $X^{2^p} \equiv X \oplus 1 \bmod Q(X)$. ونستنتج من ذلك، بالتدريج على العدد j أنّ

$$X^{2^{p+j}} \equiv X^{2^j} \oplus 1 \mod Q(X)$$

إذْ إنّ تربيع طرفَي هذه المساواة في حالة j يُعطي المساواة في حالة $j+1$.

ونجد في حالة $j = p$ أنّ

$$X^{2^{2p}} \equiv X^{2^p} \oplus 1 \equiv X \oplus 1 \oplus 1 \equiv X \mod Q(X)$$

أي إنّ $Q(X)$ يقسم $\left(X^{2^{2p}-1} - 1\right)X$، ولكن $\gcd(Q(X), X) = 1$، إذن $Q(X)$ يقسم $X^{2^{2p}-1} - 1$ أي $X^{n^2-1} - 1$. ولمّا كان $Q(T) = 0$ استنتجنا أنّ $T^{n^2-1} = I_n$. ثُمّ بضرب طرفَي هذه المساواة بالمصفوفة S^{n^2-1} نجد أنّ $S^{n^2-1} = I_n$. وهذا يقتضي أنّ $S^{n^2-1} X_0 = X_0$، ومن ثَمّ يمكن أخذ $M_n = n^2 - 1$ في هذه الحالة.

ملاحظة : في الحقيقة، لقد أثبتنا أنّه مهما كان حالة البدء σ_0 كان $\sigma_{n^2-1} = \sigma_0$.

❸ نفترض أنّ $n = 2^p + 1$. يكفي أن نثبت في هذه الحالة أنّ $S^{n^2-n+1} = I_n$ ليتمّ المطلوب. لقد رأينا أنّ كثير الحدود المميِّز للمصفوفة T هو $Q(X) = X^n \oplus X \oplus 1$. إذن

$$X^{2^p+1} \equiv X \oplus 1 \mod Q(X)$$

نستنتج من ذلك، بالتدريج على العدد j، أنّ

$$X^{2^{p+j}+2^j} \equiv X^{2^j} \oplus 1 \quad \mod Q(X)$$

إذْ إنّ تربيع طرفَي هذه المساواة في حالة j يُعطي المساواة في حالة $j+1$. وعلى وجه الخصوص نجد في حالة $j = p$ أنّ

$$X^{2^{2p}+2^p} \equiv X^{2^p} \oplus 1 \quad \mod Q(X)$$

وبضرب طرفَي هذه المساواة بالمقدار X نجد

$$X^{2^{2p}+2^p+1} \equiv X^{2^p+1} \oplus X \equiv Q(X) \oplus 1 \equiv 1 \quad \mod Q(X)$$

ولكن

$$2^{2p} + 2^p + 1 = (n-1)^2 + n = n^2 - n + 1$$

إذن، نستنتج مما سبق أنّ $Q(X)$ يقسم $X^{n^2-n+1} - 1$. ولمّا كان $Q(T) = 0$ استنتجنا أنّ $T^{n^2-n+1} = I_n$. ثُمّ بضرب طرفَي هذه المساواة بالقوّة المناسبة للمصفوفة S نجد أنّ $S^{n^2-n+1} = I_n$. إذن $S^{n^2-n+1}X_0 = X_0$، ويمكن أخْذ $M_n = n^2 - n + 1$ في هذه الحالة. ■

① **نتأمّل عدداً طبيعيًّاً موجباً تماماً n، ثُمّ نتأمّل مجموعة جزئيّة غير خالية A من المجموعة $\mathbb{N}_n$ (مع $\mathbb{N}_n = \{1,2,\ldots,n\}$)، ونفترض أنّ A تُحقّق الشرط** $(A+A)\cap\mathbb{N}_n \subset A$.
أثبت أنّ

$$\frac{1}{\operatorname{card}(A)}\sum_{a\in A} a \geq \frac{n+1}{2}$$

نُذكّر أنّ $A+A = \{a+b : (a,b)\in A\times A\}$.

لنتأمّل مجموعةً جزئيّة A من $\mathbb{N}_n$ عدد عناصرها m أكبر أو يساوي 1، وتُحقّق الشرط $(A+A)\cap\mathbb{N}_n \subset A$، ولنفترض أنّنا رتّبنا عناصر A كما يلي :

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_m$$

إذا افترضنا على سبيل الجدل أنّ $a_k + a_{m+1-k} \leq n$ عندَ عدد طبيعي k أصغر أو يساوي $\frac{m+1}{2}$ استنتجنا أنّ المجموعة

$$A \cap \left]a_{m+1-k}, +\infty\right[= \{a_j : m+1-k < j \leq m\}$$

التي عددُ عناصرها يساوي $k-1$ تحوي المجموعة

$$\{a_j + a_{m+1-k} : 1 \leq j \leq k\}$$

التي عددُ عناصرها يساوي k وهذا خُلفٌ واضحٌ. إذن لا بُدّ أن يكون

$$\forall k \in \left\{1,\ldots,\left\lfloor \tfrac{m+1}{2}\right\rfloor\right\},\quad a_k + a_{m+1-k} \geq n+1$$

وبتطبيق المتراجحة السابقة على $m+1-k$ بدلاً من k في حالة $\frac{m+1}{2} < k \leq m$ نستنتج

$$\forall k \in \{1,\ldots,m\},\quad a_k + a_{m+1-k} \geq n+1$$

وبجمع هذه المتراجحات نجد

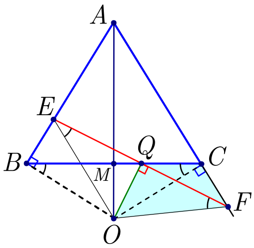
$$2\sum_{a\in A} a \geq (n+1)\operatorname{card}(A)$$

أو

$$\frac{1}{\operatorname{card}(A)}\sum_{a\in A} a \geq \frac{n+1}{2}$$

ويكتمل الإثبات. ■

② **نتأمّل مثلّثاً متساوي الساقين ABC فيه $AB = AC$. لتكن M منتصف $[BC]$، ولتكن O النقطة من المستقيم (AM) التي تجعل المستقيم (OB) عموديّاً على (AB). وأخيراً لتكن Q نقطة ما من الضلع $[BC]$ مختلفة عن B و C، ولتكن E نقطة من (AB)، ولتكن F نقطة من (AC). نفترض أنّ النقاط E و Q و F نقاطٌ مختلفة وتقع على استقامة واحدة. أثبت أنّ المستقيمين (OQ) و (EF) يكونان متعامدين إذا وفقط إذا كان $QE = QF$.**



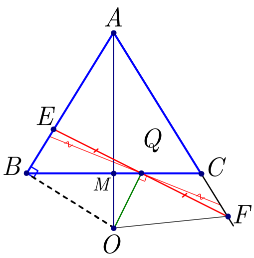
❶ لنفترض أوّلاً أنّ $(OQ) \perp (EF)$. نستنتج من كون

$$\widehat{EBO} = \widehat{OQE} = \frac{\pi}{2}$$

أنّ الرباعي $OQEB$ رباعي دائري، ومن ثَمّ $\widehat{OEQ} = \widehat{OBQ}$. ونستنتج من كون

$$\widehat{FCO} = \widehat{OQF} = \frac{\pi}{2}$$

أنّ الرباعي $OQCF$ رباعي دائري أيضاً، ومن ثَمّ $\widehat{OFQ} = \widehat{OCQ}$. ولكنّ المثلّث OCB مثلّثٌ متساوي الساقين، إذن $\widehat{OBQ} = \widehat{OCQ}$. إذن $\widehat{OEQ} = \widehat{OFQ}$، وهذا يبرهن على أنّ المثلّث OFE مثلّثٌ متساوي الساقين فيه $OE = OF$. فالارتفاع $[OQ]$ في المثلّث OEF هو في الوقت نفسه متوسّط ومن ثَمّ $QE = QF$.



❷ وبالعكس، لنفترض أنّ $QE = QF$. المستقيم المار بالنقطة Q عموديّاً على (OQ) يقطع المستقيم (AB) في E'، ويقطع المستقيم (AC) في F'، ولنفترض جدلاً أنّ $E \neq E'$.

لمّا كان $(OQ) \perp (E'F')$ استنتجنا مما أثبتناه في الفقرة ❶ أنّ $QE' = QF'$. ولأنّ الزاويتين $\widehat{EQE'}$ و $\widehat{FQF'}$ متساويتان لتقابلهما بالرأس استنتجنا تطابق المثلّثين EQE' و FQF', وعلى وجه الخصوص

$$\widehat{EFC} = \widehat{FEB}$$

وهذا يقتضي توازي المستقيمين (AC) و (AB) وهذا خُلفٌ. إذن يجب أن يكون $E = E'$ ومن ثَمّ $F = F'$. وهذا يبرهن على أنّ $(OQ) \perp (EF)$. ويتمّ الإثبات. ■

③ **في حالة عددٍ طبيعي موجب تماماً k من $\mathbb{N}^*$، نعرّف $f(k)$ بأنّه عدد تلك العناصر من المجموعة $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ التي تحتوي كتابتها بالأساس 2 على ثلاث خانات فقط مساوية 1.**

❶ **أثبت أنّه مهما كان العدد الطبيعي m من $\mathbb{N}^*$ فيوجد على الأقل عددٌ طبيعي k من $\mathbb{N}^*$ يُحقّق $f(k) = m$. أي أثبت أنّ التطبيق $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ غامرٌ.**

❷ **أوجد $\mathcal{A}$، مجموعة تلك الأعداد m التي تحقّق**

$$\operatorname{card}(\{k : f(k) = m\}) = 1$$

لنتأمّل المجموعة $\mathcal{P}$ المكوّنة من الأعداد الطبيعيّة الموجبة التي كلٌّ منها يساوي مجموع ثلاث قوى مختلفة للعدد 2.

$$\mathcal{P} = \left\{2^\alpha + 2^\beta + 2^\gamma : (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{N}^3,\ 0 \leq \alpha < \beta < \gamma\right\}$$

وليكن $\mathbb{1}_\mathcal{P}$ التابع المميِّز لهذه المجموعة، أي الذي يأخذ القيمة 1 عند أيٍّ k من $\mathcal{P}$، ويأخذ القيمة 0 عند أيٍّ k لا تنتمي إلى $\mathcal{P}$.

عندئذ نلاحظ مباشرة أنّ

$$f(k+1) - f(k) = \mathbb{1}_\mathcal{P}(2k+1) + \mathbb{1}_\mathcal{P}(2k+2) - \mathbb{1}_\mathcal{P}(k+1)$$

وهنا نستفيد من الخاصّة الواضحة

$$n \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 2n \in \mathcal{P}$$

لنستنتج أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{1}_\mathcal{P}(2k+2) = \mathbb{1}_\mathcal{P}(k+1)$$

ومنه

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(k+1) - f(k) = \mathbb{1}_\mathcal{P}(2k+1)$$

ولكن ينتمي العدد الفردي $2k+1$ إلى $\mathcal{P}$ إذا وفقط إذا كان من الصيغة $1 + 2^\beta + 2^\gamma$ مع $0 < \beta < \gamma$، أي إذا وفقط إذا كان للعدد k الصيغة $2^{\beta'} + 2^{\gamma'}$ مع $0 \leq \beta' < \gamma'$.

لنتأمّل إذن المجموعة $\mathcal{Q}$ المكوّنة من الأعداد الطبيعيّة الموجبة التي كلٌّ منها يساوي مجموع قوّتين مختلفتين للعدد 2، أي

$$\mathcal{Q} = \left\{2^\alpha + 2^\beta : (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2,\ 0 \leq \alpha < \beta\right\}$$

فيكون لدينا $k \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow 2k+1 \in \mathcal{P}$، وهكذا نرى أنّ

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(k+1) - f(k) = \mathbb{1}_{\mathcal{Q}}(k)$$

وبجمع هذه المساواة عندما تتحول k من 1 حتّى $n-1$، وملاحظة أنّ $f(1) = 0$، نستنتج أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\mathcal{Q}}(k) = \operatorname{card}(\mathcal{Q} \cap]1, n[)$$

لنرقّم إذن عناصر المجموعة $\mathcal{Q}$ ترقيماً متزايداً. فيكون العدد 3 هو العنصر الأوّل ثُمّ يليه العدد 5، فالعدد 6، فالعدد 9 وهكذا.

في الحقيقة، نستفيد من كون المجموعة $\mathcal{Q}$ مجموعة لا نهائيّة، لنعرّف بالتدريج التطبيق المتزايد تماماً $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathcal{Q}$، بوضع $\varphi(1) = \min \mathcal{Q} = 3$، وإذا افترضنا أننا عرّفنا $\varphi(k)$ في حالة $1 \leq k < n$، وضعنا $\varphi(n) = \min(\mathcal{Q} \backslash \{\varphi(1), \ldots, \varphi(n-1)\})$. فنعرّف بذلك تقابلاً متزايداً تماماً من $\mathbb{N}^*$ إلى $\mathcal{Q}$.

وفقاً لهذا التعريف، في حالة m من $\mathbb{N}^*$، يتحقّق التكافؤ التالي

$$\varphi(m) < k \leq \varphi(m+1) \Leftrightarrow \{\varphi(1), \ldots, \varphi(m)\} = \mathcal{Q} \cap]1, k[$$

ومن ثَمّ

$$\varphi(m) < k \leq \varphi(m+1) \Leftrightarrow f(k) = \operatorname{card}(\mathcal{Q} \cap]1, k[) = m$$

فمثلاً

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad f(\varphi(m+1)) = m$$

وهذا يبرهن على أنّ التطبيق f تطبيقٌ غامرٌ، وينتهي بذلك إثبات الخاصّة ❶.

كما نرى أنّ

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \operatorname{card}(\{k : f(k) = m\}) = \varphi(m+1) - \varphi(m)$$

وعلى هذا يكون

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left\{ m : \operatorname{card}(\{k : f(k) = m\}) = 1 \right\} \\ &= \left\{ m : \varphi(m+1) = \varphi(m) + 1 \right\} \\ &= \left\{ f(\varphi(m+1)) : \varphi(m+1) - 1 \in \mathcal{Q} \right\} \end{aligned}$$

إذ تنتج المساواة الأخيرة من أنّ انتماء العنصر السابق للعنصر $\varphi(m+1)$ إلى $\mathcal{Q}$ يقتضي أنّه $\varphi(m)$. ولأنّ φ تطبيقٌ غامرٌ صورته كامل المجموعة $\mathcal{Q}$، تُكتب $\mathcal{A}$ بالشكل التالي

$$\mathcal{A}=\left\{f(u):(u\in\mathcal{Q})\wedge(u-1\in\mathcal{Q})\right\}=f(\mathcal{Q}\cap(1+\mathcal{Q}))$$

لنعيِّن إذن $\mathcal{Q}\cap(1+\mathcal{Q})$. ليكن $u=2^\alpha+2^\beta$ مع $0\leq\alpha<\beta$ عنصراً من $\mathcal{Q}$.

- إذا كان $\alpha\geq 2$ كان $u-1=1+2+\cdots+2^{\alpha-1}+2^\beta\notin\mathcal{Q}$.
- وإذا كان $\alpha=0$ كان $u-1=2^\beta\notin\mathcal{Q}$.
- وأخيراً، إذا كان $\alpha=1$ كان $u-1=1+2^\beta\in\mathcal{Q}$.

وعليه نرى أنّ

$$\mathcal{Q}\cap(1+\mathcal{Q})=\{2+2^p:p>1\}$$

ومن جهة أخرى، في حالة $p>1$، نجد

$$\begin{aligned}f(2+2^p)&=\operatorname{card}\left(\{1+2^p\}\cup\left\{2^i+2^j:0\leq i<j<p\right\}\right)\\&=1+\frac{p(p-1)}{2}\end{aligned}$$

وهكذا نرى أنّ

$$\mathcal{A}=\left\{1+\frac{p(p-1)}{2}:p\geq 1\right\}$$

وهي النتيجة المطلوبة في ❷.

ملاحظة : يمكن دون عناءٍ أن نثبتَ أنّه في حالة $0\leq q<p$ لدينا

$$2^q+2^p\leq n<2^{q+1}+2^p\Rightarrow f(n)=q+\frac{p(p-1)}{2}$$

وهذا يعرّف $f(n)$ أيّاً كانت قيمة n.

④ **أوجد جميع الأزواج (m,n) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ التي يكون عندها العدد n^3+1 مُضاعفاً للعدد $mn-1$.**

لنتأمّل زوجاً (n,m) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. ولنفترض أنّ العدد $nm-1$ يقسم n^3+1. عندئذ يوجد عددٌ k من $\mathbb{N}^*$ يُحقّق $n^3+1=k(nm-1)$. وهذا يقتضي أنّ

$$k+1=nh \quad \text{مع} \quad h=km-n^2\geq 1. \qquad (1)$$

ومن تعريف h نستنتج أنّ

$$h+m=(k+1)m-n^2=n(hm-n)$$

ومن ثَمّ

$$h+m=n\ell \quad \text{مع} \quad \ell=hm-n\geq 1. \qquad (2)$$

وهكذا نرى أنّ الرباعيّة (n,m,ℓ,h) من $\mathbb{N}^{*4}$ تُحقّق

$$h+m=n\ell \quad \text{و} \quad hm=n+\ell$$

وهذا يقتضي أنّ

$$(n-1)(\ell-1)+(m-1)(h-1)=2$$

ولكن، ليس هناك طرائق كثيرة ليساوي مجموع عددين طبيعيين العدد 2. فإمّا أحدهما 0 والآخر 2 أو يساوي كلٌّ منهما الواحد. ومنه الحالات التالية للرباعيّة $M=(n,m,\ell,h)$.

$M=(2,2,2,2)$، أي $(n,m)=(2,2)$.

$M=(1,3,?,2)$، أي $(n,m)=(1,3)$.

$M=(1,2,?,3)$، أي $(n,m)=(1,2)$.

$M=(2,1,3,?)$، أي $(n,m)=(2,1)$.

$M=(3,1,2,?)$، أي $(n,m)=(3,1)$.

$M=(?,3,1,2)$، أي $(n,m)=(5,3)$ لأنّ $\ell n=h+m$.

$M=(?,2,1,3)$، أي $(n,m)=(5,2)$ لأنّ $\ell n=h+m$.

$M=(2,?,3,1)$، أي $(n,m)=(2,5)$ لأنّ $hm=n+\ell$.

$M=(3,?,2,1)$، أي $(n,m)=(3,5)$ لأنّ $hm=n+\ell$.

وهكذا نستنتج أنّ الزوج (n,m) ينتمي إلى المجموعة $\mathcal{S}$ التالية :

$$\mathcal{S}=\{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,2),(2,5),(5,2),(5,3),(3,5)\}$$

وبالعكس، نتيقّن مباشرة أنّ كلَّ زوجٍ من $\mathcal{S}$ يُحقّق الخاصّة المطلوبة. فالمجموعة $\mathcal{S}$ هي مجموعة حلول المسألة. ■

⑤ **ليكن $\mathcal{I}$ المجال $]-1,+\infty[$ ، أي مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي هي أكبر تماماً من -1.**
أوجد جميع التوابع الحقيقيّة $f:\mathcal{I}\to\mathcal{I}$ التي تُحقّق :

❶ أيّاً كانت x و y من $\mathcal{I}$، كان

$$f\big(x+f(y)+xf(y)\big)=y+f(x)+yf(x)$$

❷ التابع $x\mapsto\dfrac{f(x)}{x}$ تابعٌ متزايدٌ تماماً على كلٍّ من المجالين $]-1,0[$ و $]0,+\infty[$.

لنتأمّل تابعاً $f:\mathcal{I}\to\mathcal{I}$ يُحقّق الشروط ❶ و ❷.

- ولنتأمّل عدداً λ من $\mathcal{I}$ يُحقّق $f(\lambda)=\lambda$، عندئذ نستنتج من ❶ باختيار x و y تساويان λ أنّ $f(\mu)=\mu$، مع $\mu=2\lambda+\lambda^2$. لنفترض أنّ $\lambda\neq 0$.
  - إذا كان $\lambda>0$، كان $\mu>\lambda$، وهذا، بناءً على ❷، يُؤدّي إلى الخُلف
  $$1=\frac{f(\lambda)}{\lambda}<\frac{f(\mu)}{\mu}=1$$
  - وإذا كان $\lambda<0$ كان $-1<\mu<\lambda<0$، وهذا أيضاً يُؤدّي إلى الخُلف
  $$1=\frac{f(\mu)}{\mu}<\frac{f(\lambda)}{\lambda}=1$$

  وهكذا نرى أنّ
  $$(f(\lambda)=\lambda)\Rightarrow(\lambda=0)$$
- ولكن بوضع $x=y$ في ❶ نجد أنّ
  $$f((\underbrace{x+(1+x)f(x)}_{\lambda}))=\underbrace{x+(1+x)f(x)}_{\lambda}$$
  وهذا يبرهن أنّ $x+(1+x)f(x)=0$، أو أنّ
  $$f(x)=-\frac{x}{1+x}$$

وبالعكس، نتحقّق مباشرة أنّ $x\mapsto\frac{-x}{1+x}$ يُحقّق ❶ و ❷، فهو الحلّ الوحيد للمسألة. ■

⑥ **أثبت وجود مجموعة جزئيّة $\mathcal{A}$ من $\mathbb{N}^*$ تُحقّق الخاصّة التالية : أيّاً كانت المجموعة الجزئيّة غير المنتهية $\mathcal{S}$ من مجموعة الأعداد الأوّليّة $\mathcal{P}$، فيوجد عددان أحدهما من $\mathcal{A}$ والآخر من $\mathbb{N}\backslash\mathcal{A}$، وكلٌّ منهما يكتب بشكل جداء ضرب k عنصراً مختلفاً من $\mathcal{S}$، مع $k\geq 2$.**

لنرقّم مجموعة الأعداد الأوّليّة ترقيماً متزايداً تماماً، أي لنتأمّل التقابل المتزايد تماماً

$$\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathcal{P},\ \varphi(n) = p_n$$

فمثلاً $p_1 = 2$ و $p_2 = 3$ و $p_3 = 5$ و $p_4 = 7$ وهكذا....

في حالة عددٍ n من $\mathbb{N}^*$ نعرّف

$$V_n = \{B \subset \mathbb{N}^* : (\mathrm{card}(B) = n) \wedge (\min(B) > n)\}$$

ثُمّ نضع

$$V = \bigcup_{n\geq 1} V_n$$

وأخيراً نعرّف المجموعة $\mathcal{A}$ كما يلي :

$$\mathcal{A} = \left\{\prod_{k\in B} p_k : B \in V\right\}$$

فالمجموعة $\mathcal{A}$ تحوي جميع الأعداد الأوّليّة الفرديّة، وجميع الجداءات لعددين أوّليّين أصغرهما أكبر أو يساوي 5، وجميع الجداءات لثلاثة أعداد أوّليّة أصغرها أكبر أو يساوي 7، وهكذا دواليك.

لتكن $\mathcal{S}$ مجموعة لانهائية وجزئيّة من مجموعة الأعداد الأوّليّة $\mathcal{P}$. وليكن p عدداً أوّلياً فردياً من المجموعة $\mathcal{S}$، عندئذ يوجد عددٌ k من $\mathbb{N}^*$ يُحقّق $p_k = p$ و $k \geq 2$ لأنّ p فردي. عندئذ نعرّف الأعداد $(\ell_j)_{1\leq j\leq k+1}$ تدريجيّاً بوضع $\ell_1 = k$، وتعريف

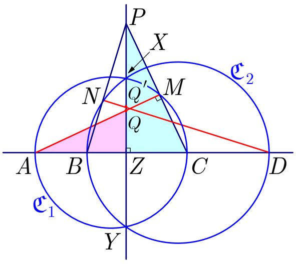
$$\ell_{j+1} = \min\{r > \ell_j : p_r \in \mathcal{S}\}$$

في حالة $1 \leq j \leq k$. ونتأمّل العددين

$$m = p_{\ell_2}p_{\ell_3}\cdots p_{\ell_k}p_{\ell_{k+1}} \quad \text{و} \quad n = p_{\ell_1}p_{\ell_2}\cdots p_{\ell_k}$$

وهنا نلاحظ أنّ المجموعة $B_1 = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k\}$ التي عدد عناصرها k، لا تنتمي إلى V_k لأنّ $\min(B_1) = k$، في حين تنتمي $B_2 = \{\ell_2, \ldots, \ell_k, \ell_{k+1}\}$ التي عدد عناصرها k، تنتمي إلى V_k لأنّ $\min(B_2) = \ell_2 > k$. وهذا يبرهن على أنّ m ينتمي إلى $\mathcal{A}$ وأنّ n لا ينتمي $\mathcal{A}$، وكلٌّ من هذين العددين يساوي جداء ضرب k عدداً أوّليّاً من $\mathcal{S}$. وبذا يكتمل الإثبات. ◼

① **نتأمّل على مستقيمٍ d أربع نقاط متباينة A و B و C و D بهذا الترتيب. تتقاطع الدائرة $\mathfrak{C}_1$ التي قطرها $[AC]$ مع الدائرة $\mathfrak{C}_2$ التي قطرها $[BD]$ في النقطتين X و Y. يقطع المستقيم (XY) القطعة $[BC]$ في Z. لتكن P نقطة ما من المستقيم (XY) مختلفة عن Z. يقطع المستقيم (CP) الدائرة $\mathfrak{C}_1$ في النقطتين C و M، ويقطع المستقيم (BP) الدائرة $\mathfrak{C}_2$ في النقطتين B و N. أثبت أنّ المستقيمات (XY) و (AM) و (DN) تتلاقى في نقطة واحدة.**



لنكتب Q دلالة على نقطة تقاطع (AM) و (XY).
ولنكتب Q' دلالة على نقطة تقاطع (DN) و (XY).
المطلوب هو إثبات أنّ $Q = Q'$.

لمّا كانت $\widehat{AMC}$ زاوية محيطيّة في الدائرة $\mathfrak{C}_1$ تقابل القطر $[AC]$ استنتجنا أنّ $\widehat{AMC} = \frac{\pi}{2}$. وهذا يبرهن على أنّ الرباعي $CMQZ$ رباعي دائري.

نستنتج مما سبق أنّ الزاويتين $\widehat{ZCP}$ و $\widehat{ZQA}$ متساويتان، وهذا يبرهن على تشابه المثلّثين القائمين AZQ و PZC. ومنه $\dfrac{AZ}{PZ} = \dfrac{ZQ}{ZC}$ أو

$$ZQ = \frac{1}{PZ} \times AZ \times ZC$$

ولكن من المثلّث القائم CXA نستنتج مباشرة أنّ $AZ \times ZC = ZX^2$ إذن

$$ZQ = \frac{ZX^2}{PZ} \qquad (1)$$

ونبرهن بالمماثلة، انطلاقاً من تشابه المثلّثين $Q'ZD$ و BZP أنّ

$$ZQ' = \frac{ZX^2}{PZ} \qquad (2)$$

ومن (1) و (2) نستنتج أنّ $ZQ = ZQ'$، أي $Q = Q'$. وبذا يتمّ الإثبات. ◼

② **لتكن a و b و c ثلاثة أعاد حقيقيّة موجبة تحقّق $abc = 1$. أثبت أنّ**

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

لنتأمّل ثلاثة أعداد حقيقيّة موجبة تماماً x و y و z. والشعاعين :

$$\vec{u} = \left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{z+x}}, \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$$

$$\vec{v} = (\sqrt{y+z}, \sqrt{z+x}, \sqrt{x+y})$$

عندئذ تنص متراجحة كوشي–شوارتز على أنّ $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2$ ، أي

$$(x+y+z)^2 \leq 2\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right)(x+y+z)$$

ومن ثَمّ

$$x+y+z \leq 2\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right)$$

ومن جهة أخرى، نعلم من المتراجحة بين المتوسّطين الحسابي والهندسي أنّ

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

ومن ثَمّ

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$$

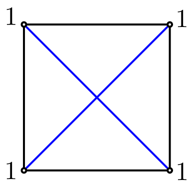
فإذا طبّقنا هذه المتراجحة على $x = \frac{1}{a}$ و $y = \frac{1}{b}$ و $z = \frac{1}{c}$ مع $abc = 1$ ، استنتجنا المتراجحة المطلوبة.

③ **نقول إنّ مجموعة منتهية $\mathcal{S}$ من نقاط المستوي تحقّق الخاصّة $\mathbb{P}$ إذا لم يقع أيّ ثلاث منها على استقامة واحدة، ووُجِدَ تطبيقٌ $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ يُحقّق الخاصّة**

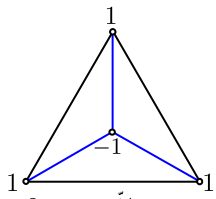
$$\forall \mathcal{T} \subset \mathcal{S}, \quad (\mathrm{card}(\mathcal{T}) = 3) \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{T}) = \sum_{A\in\mathcal{T}} \varphi(A)$$

إذْ رمزنا $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ إلى مساحة المثلّث الذي رؤوسه نقاط المجموعة $\mathcal{T}$ المؤلّفة من ثلاثة عناصر. ونقول إنّ العدد n ، مع $n > 3$ ، يُحقّق الخاصّة $\widetilde{\mathbb{P}}$ إذا وجدت مجموعة $\mathcal{S}$ تُحقّق الخاصة $\mathbb{P}$ وعدد عناصرها يساوي n . أوجد $\mathcal{N}$ مجموعة الأعداد $n > 3$ التي تُحقّق الخاصّة $\widetilde{\mathbb{P}}$.

❶ لنلاحظ أوّلاً أنّ العدد 4 يُحقّق الخاصّة $\mathbb{P}$. إذْ يوجد، في الحقيقة، العديد من المجموعات $\mathcal{S}$ التي عدد عناصرها يساوي 4 وتُحقّق الخاصّة $\mathbb{P}$. فمثلاً يمكن أن نختار $\mathcal{S}$ رؤوس مربّع ونعرّف φ بأنّه التابع الثابت الذي يقرن بكلّ رأس سُدْس مساحة المربّع. أو نختار $\mathcal{S}$ رؤوس مثلّث متساوي الأضلاع إضافة إلى مركزه، ونعطي للتابع φ قيمة تساوي ثُلث مساحة المثلّث عند رؤوس المثلث وناقص ثُلث مساحته عند مركز المثلّث. كما في الشكل التالي.



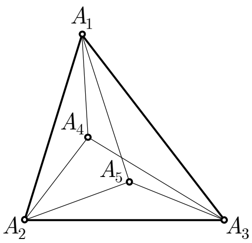
مساحة المربّع تساوي 6



مساحة المثلّث تساوي 3

❷ لنفترض على سبيل الجدل وجود مجموعة منتهية $\mathcal{S}$ من نقاط المستوي تُحقق الخاصّة $\mathbb{P}$ وعدد عناصرها n أكبر أو يساوي 5. سنبرهن أنّ هذا الأمر مستحيلٌ وذلك على مرحلتين : سنثبتُ بداية أنّ التطبيق φ لا يمكن أن يكون متبايناً، ثُم سنستثمر هذه الخاصّة للوصول إلى تناقضٍ.

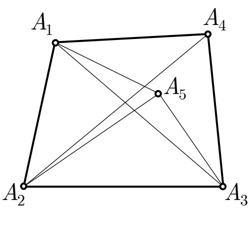
ليكن P أصغر مضلّع محدّبٍ في المستوي يحوي جميع نقاط المجموعة $\mathcal{S}$، أي إنّ P هو الغلاف المحدّب للمجموعة $\mathcal{S}$.



- المضلّع P مثلّثٌ رؤوسه نقاطٌ من $\mathcal{S}$ ، لنسمّها A_1 و A_2 و A_3 ، ثُم لنتأمّل نقطتين أخريَيْن A_4 و A_5 من $\mathcal{S}$. عندئذ يمكننا حساب مساحة المثلّث $A_1A_2A_3$ بطريقتين :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(A_1A_2A_3) &= \mathcal{A}(A_1A_2A_4) + \mathcal{A}(A_2A_3A_4) + \mathcal{A}(A_3A_1A_4)\\ &= \mathcal{A}(A_1A_2A_5) + \mathcal{A}(A_2A_3A_5) + \mathcal{A}(A_3A_1A_5)\end{aligned}$$

وبطرح المساواتين السابقتين نستنتج مباشرة أنّ $\varphi(A_4) = \varphi(A_5)$.



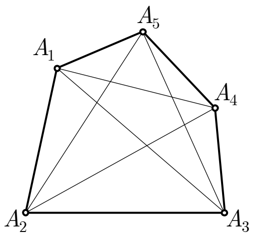
- المضلّع P رُباعيٌّ رؤوسه نقاطٌ من $\mathcal{S}$. عندئذ يقسمه أحد أقطاره، ولنسمّه $[A_1A_3]$ إلى مثلّثين أحدهما على الأقل، ولنسمّه $A_1A_3A_4$ يحوي في داخله نقطة، ولنسمّها A_5 ، من $\mathcal{S}$ ، (لأنّ $\text{card}(\mathcal{S}) \geq 5$). وأخيراً نسمّي A_2 الرأس من P الذي لم نسمّه بعدُ.

بحساب مساحة الرباعي $A_1A_2A_3A_j$ مع $j = 4$ أو $j = 5$ بطريقتين نجد

$$\mathcal{A}(A_1A_2A_3) + \mathcal{A}(A_1A_3A_4) = \mathcal{A}(A_1A_2A_4) + \mathcal{A}(A_2A_3A_4)$$

$$\mathcal{A}(A_1A_2A_3) + \mathcal{A}(A_1A_3A_5) = \mathcal{A}(A_1A_2A_5) + \mathcal{A}(A_2A_3A_5)$$

وبطرح هاتين المساواتين نستنتج مباشرة أنّ $\varphi(A_5) = \varphi(A_4)$.



- المضلّع P مضلّعٌ ذو k ضلعاً، مع $k \geq 5$، رؤوسُه نقاطٌ من $\mathcal{S}$. عندئذ نختار خمسة من رؤوس P ونسميها بالترتيب A_1 و A_2 و A_3 و A_4 و A_5. ومن جديد، بحساب مساحة الرباعي $A_1A_2A_3A_j$ مع $j = 4$ أو $j = 5$ بطريقتين نجد

$$\mathcal{A}(A_1A_2A_3) + \mathcal{A}(A_1A_3A_4) = \mathcal{A}(A_1A_2A_4) + \mathcal{A}(A_2A_3A_4)$$

$$\mathcal{A}(A_1A_2A_3) + \mathcal{A}(A_1A_3A_5) = \mathcal{A}(A_1A_2A_5) + \mathcal{A}(A_2A_3A_5)$$

وبطرح هاتين المساواتين نستنتج أيضاً أنّ $\varphi(A_5) = \varphi(A_4)$.

وهكذا نكون قد أثبتنا وجود نقطتين A_4 و A_5 في $\mathcal{S}$ يأخذ عندهما التابع φ القيمة نفسها. يقسم المستقيم $d = (A_4A_5)$ المستوي إلى نصفين يحوي أحدهما على الأقل نقطتين من $\mathcal{S}$ نسميهما A_1 و A_2. ونظراً إلى تَساوي مساحتَي المثلّثين $A_1A_2A_4$ و $A_1A_2A_5$ نستنتج أنّ A_4 و A_5 تبعُدان البُعد نفسه عن المستقيم (A_1A_2) ولأنهما تقعان في الجهة نفسها بالنسبة إلى هذا المستقيم استنتجنا أنّ المستقيمين d و (A_1A_2) متوازيان. لنتأمّل نقطة خامسة A_3 من $\mathcal{S}$.

- إذا وقعت A_3 في نصف المستوي الذي يعيِّنه d ويحوي النقطتين A_1 و A_2. استنتجنا بأسلوب مماثلٍ لما سبق أنّ المستقيمين d و (A_1A_3) متوازيان، وهذا يقتضي وقوع النقاط A_1 و A_2 و A_3 على استقامة واحدةٍ، وهذا خُلفٌ.
- أمّا إذا وقعت A_3 في نصف المستوي الذي يعيِّنه d ولا يحوي النقطتين A_1 و A_2. استنتجنا من تَساوي مساحتَي المثلّثين $A_1A_3A_4$ و $A_1A_3A_5$ أنّ النقطة M، منتصف القطعة المستقيمة $[A_4A_5]$، تقع على المستقيم (A_1A_3). وكذلك نستنتج من تَساوي مساحتَي المثلّثين $A_2A_3A_4$ و $A_2A_3A_5$ أنّ النقطة M نفسها، تقع أيضاً على المستقيم (A_2A_3). إذن $M = A_3$ والنقاط A_3 و A_4 و A_5 تقع على استقامة واحدة، وهذا خُلفٌ أيضاً.

وهكذا نرى أنّ n لا تُحقّق $\widetilde{\mathbb{P}}$ في حالة $n > 4$. إذن $\mathcal{N} = \{4\}$، ويتم الإثبات. ■

④ **عيِّن أكبر قيمة يمكن أن يأخذها العدد x_0 ، إذا علمتَ أنّه توجد متتالية من الأعداد الحقيقيّة الموجبة تماماً $(x_k)_{0\le k\le 1995}$ تُحقّق $x_0 = x_{1995}$ ، والمساواة**

$$x_{k-1} + \frac{2}{x_{k-1}} = 2x_k + \frac{1}{x_k} \qquad (\mathcal{E})$$

في حالة $1 \le k \le 1995$.

لنلاحظ أوّلاً أنّ

$$2x + \frac{1}{x} = a + \frac{2}{a} \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{1}{a}\right) = 0$$

وهذا يعني أنّ العلاقة $(\mathcal{E})$ تقتضي أنّ $x_k \in \left\{\frac{x_{k-1}}{2}, \frac{1}{x_{k-1}}\right\}$ ، ومن ثَمّ أنّ

$$x_{k+1} \in \left\{\frac{x_{k-1}}{4}, x_{k-1}, \frac{1}{2x_{k-1}}, \frac{2}{x_{k-1}}\right\} \qquad (1)$$

لنعرّف إذن المجموعة

$$A_n = \{2^{2j} : -n \le j \le n\}$$

ولنتأمّل متتالية $(x_k)_{0\le k\le 2m+1}$ تُحقّق العلاقة $(\mathcal{E})$ في حالة $1 \le k \le 2m+1$. ولنكتب للسهولة، $a = \frac{x_0}{2}$ و $b = \frac{1}{x_0}$ عندئذ نبرهن بالتدريج على العدد p أنّ

$$x_{2p+1} \in (aA_p) \cup (bA_p)$$

وذلك أيّاً كانت p من المجموعة $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$.

- حالة $p = 0$. في الحقيقة، $A_0 = \{1\}$ ، والنتيجة المطلوبة تُكافئ
$$x_1 \in \{a, b\} = \{\tfrac{x_0}{2}, \tfrac{1}{x_0}\}$$
وهي نتيجة مباشرة من العلاقة $(\mathcal{E})$ في حالة $k = 1$.

- لنفترض صحّة النتيجة في حالة $p - 1$ ، إذن $x_{2p-1} \in (aA_{p-1}) \cup (bA_{p-1})$.

إذا كان $x_{2p-1} = a2^{2j}$ مع $-p < j < p$ ، استنتجنا من (1) أنّ

$$x_{2p+1} \in \left\{a2^{2(j-1)}, a2^{2j}, b2^{-2j}, b2^{-2(j-1)}\right\} \in (aA_p) \cup (bA_p)$$

وإذا كان $x_{2p-1} = b2^{2j}$ مع $-p < j < p$ ، استنتجنا من (1) أنّ

$$x_{2p+1} \in \left\{b2^{2(j-1)}, b2^{2j}, a2^{-2j}, a2^{-2(j-1)}\right\} \in (aA_p) \cup (bA_p)$$

وبذا يكتمل الإثبات بالتدريج.

لنتأمّل متتالية $(x_k)_{0\le k\le 2m+1}$ من الأعداد الحقيقيّة الموجبة، تُحقّق الشرط $(\mathcal{E})$ في حالة k من $\{1,2,\ldots,2m+1\}$. ولنفترض أنّ $x_0 = x_{2m+1}$. عندئذ نستنتج مما سبق أنّ

$$x_0 \in \left(\frac{x_0}{2}A_m\right) \cup \left(\frac{1}{x_0}A_m\right) \qquad (2)$$

ولكنّ العدد 1 لا ينتمي إلى المجموعة $\frac{1}{2}A_m$، فالنتيجة (2) تُكافئ انتماء x_0 إلى $\frac{1}{x_0}A_m$، أو انتماء x_0^2 إلى A_m، أو انتماء x_0 إلى المجموعة $\{2^j : -m \le j \le m\}$. وهذا يبرهن على أنّ $x_0 \le 2^m$.

وبالعكس، لنتأمّل المتتالية $(x_k)_{0\le k\le 2m+1}$ المعرّفة كما يلي :

$$x_k = \begin{cases} 2^{m-k} & : \quad 0 \le k \le 2m \\ 2^m & : \quad k = 2m+1 \end{cases}$$

عندئذ نلاحظ مباشرة أنّ $x_k = \frac{x_{k-1}}{2}$ في حالة $1 \le k \le 2m$، وأنّ $x_{2m+1} = \frac{1}{x_{2m}}$.

إذن تُحقّق المتتالية $(x_k)_{0\le k\le 2m+1}$ العلاقة $(\mathcal{E})$ في حالة $1 \le k \le 2m+1$ بالإضافة إلى المساواة $x_0 = x_{2m+1} = 2^m$.

وهكذا، نكون قد أثبتنا أنّ 2^m هي أكبر قيمة يمكن أن يأخذها العدد x_0، إذا علمنا أنّه توجد متتالية من الأعداد الحقيقيّة الموجبة تماماً $(x_k)_{0\le k\le 2m+1}$ تُحقّق $x_0 = x_{2m+1}$، والمساواة $(\mathcal{E})$ في حالة $1 \le k \le 2m+1$.

توافق المسألة المطروحة الحالة الخاصّة $2m+1 = 1995$ أو $m = 997$. فالقيمة العظمى التي يمكن أن يأخذها العدد x_0 هي 2^{997}. وبذا يكتمل الإثبات. ■

⑤ نتأمّل مضلّعاً سداسيّاً محدّباً $ABCDEF$ فيه

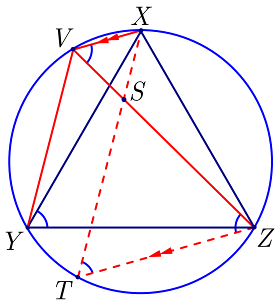
$$AB = BC = CD \text{ و } DE = EF = FA \text{ و } \widehat{BCD} = \widehat{EFA} = \frac{\pi}{3}$$

G و H هما نقطتان تقعان داخل المضلّع وتُحقّقان $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = \frac{2\pi}{3}$. أثبت صحة المتراجحة

$$AG + BG + GH + DH + EH \ge FC$$

يعتمد الإثبات على الخاصّة التالية :

خاصّة : لتكن $\mathfrak{C}$ الدائرة المارّة برؤوس مثلّث متساوي الأضلاع XYZ . ولتكن V نقطة من القوس $\widehat{XY}$ الذي لا يحوي Z . عندئذ $VX + VY = VZ$.



في الحقيقة، يقطع المستقيم المارّ بالنقطة Z موازياً (XV) الدائرة $\mathfrak{C}$ في T، ويتقاطع المستقيمان (VZ) و (XT) في S . من جهة أولى لدينا

$$\widehat{XVZ} = \widehat{XTZ} = \widehat{XYZ} = \frac{\pi}{3}$$

كما إنّ $\widehat{XVZ} = \widehat{VZT}$ لأنّ $(XV) \parallel (ZT)$. نستنتج من ذلك أنّ المثلّثين XVS و STZ متساويا الأضلاع. وبوجه خاصّ، نرى أنّ

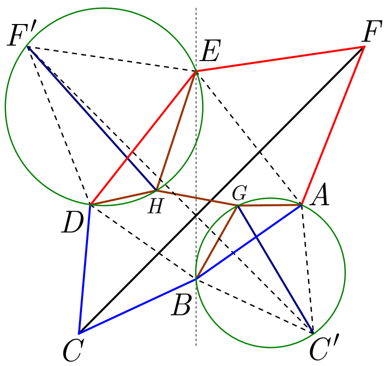
$$VZ = VS + SZ = VX + ZT \qquad (1)$$

ومن جهة أخرى،

$$\widehat{ZXT} = \frac{\pi}{3} - \widehat{YXT} = \widehat{VZT} - \widehat{YZT} = \widehat{VZY}$$

وهذا يبرهن على أنّ $ZT = VY$، فإذا عوّضنا في (1) استنتجنا أنّ $VZ = VX + VY$، وهي المساواة المطلوبة.

نأتي الآن إلى مسألتنا، نُنشئ على الضلعين $[AB]$ و $[ED]$، وخارج المضلّع السداسي، مثلّثين متساويي الأضلاع ABC' و DEF' .



عندئذ نرى مباشرة أنّ النقاط C' و A و F هي بالترتيب نظائر النقاط C و D و F' بالنسبة إلى المستقيم (BE) . وبوجه خاصّ نرى أنّ $CF = C'F'$.

لّما كان $\widehat{BGA} = \frac{2\pi}{3}$ استنتجنا أنّ النقطة G تقع على القوس $\widehat{AB}$ الذي لا يحوي C' من الدائرة المارّة برؤوس المثلّث المتساوي الأضلاع ABC'. فإذا استفدنا من الخاصّة التي بدأنا بها، وجدنا أنّ

$$GA + GB = GC' \qquad (2)$$

وكذلك، لّما كان $\widehat{DHE} = \frac{2\pi}{3}$ استنتجنا أنّ النقطة H تقع على القوس $\widehat{DE}$ الذي لا يحوي F' من الدائرة المارّة برؤوس المثلّث المتساوي الأضلاع DEF'. فإذا استفدنا من الخاصّة التي بدأنا بها، وجدنا أيضاً أنّ

$$HD + HE = HF' \qquad (3)$$

فإذا استفدنا من (2) و (3) استنتجنا أنّ

$$C'F' \le C'G + GH + HF' = GA + GB + GH + HD + HE$$

وهي المتراجحة المطلوبة، لأنّ $CF = C'F'$، وهو المطلوب إثباته. ■

⑥ ليكن p عدداً أوّليّاً فرديّاً. نعرّف $\mathcal{Z}_{2p} = \{0,1,\ldots,2p-1\}$، أوجد عدد عناصر المجموعة $\mathcal{B}$ التالية :

$$\mathcal{B} = \left\{A \subset \mathcal{Z}_{2p} : (\operatorname{card}(A) = p) \wedge \left(\sum\nolimits_{k\in A} k = 0 \bmod p\right)\right\}$$

في ما يلي، سنكتب $\mathcal{P}^{(k)}(X)$ للدلالة على مجموعة المجموعات الجزئيّة من X المكوّنة من k عنصراً. وسنكتب في حالة مجموعة منتهية من الأعداد الصحيحة $\mu_p(A)$ للدلالة على باقي قسمة مجموع عناصر A على العدد p، أي

$$\mu_p(A) = \left(\sum_{k\in A} k\right) \bmod p$$

لنعرّف المجموعتين

$$A_0 = \{0,1,\ldots,p-1\} \quad \text{و} \quad A_1 = \{p, p+1,\ldots,2p-1\}$$

ولنعرّف في حالة m من $\{0,1,\ldots,p\}$، و r من $\{0,1,\ldots,p-1\}$، المجموعة $\mathcal{B}(m,r)$ بالصيغة التالية :

$$\left\{B_0 \cup B_1 : (B_0, B_1) \in \mathcal{P}^{(m)}(A_0) \times \mathcal{P}^{(p-m)}(A_1), \mu_p(B_0 \cup B_1) = r\right\}$$

بملاحظة أنّ $0 = \mu_p(A_0) = \mu_p(A_1)$ ، نرى مباشرة أنّ

$$\mathcal{B}(0,r) = \begin{cases} \{A_1\} & : \ r = 0, \\ \varnothing & : \ 0 < r \end{cases} \qquad \mathcal{B}(p,r) = \begin{cases} \{A_0\} & : \ r = 0, \\ \varnothing & : \ 0 < r \end{cases}$$

نتأمّل التقابل τ_a المعرّف كما يلي :

$$\tau_a : A_0 \to A_0, k \mapsto (k+a) \bmod p = k \oplus_p a$$

والذي تقابله العكسي هو τ_{p-a} .

وإذا كان B عنصراً من $\mathcal{P}^{(p)}(\mathcal{Z}_{2p})$ ، عرّفنا $\mathcal{T}(B)$ بالصيغة

$$\mathcal{T}(B) = \tau_1(B \cap A_0) \cup (B \cap A_1)$$

نلاحظ مباشرة أنّ $\mathcal{T}(B)$ عنصرٌ من $\mathcal{P}^{(p)}(\mathcal{Z}_{2p})$. وأنّ $\mathcal{T}$ يعرّف تقابلاً على المجموعة $\mathcal{P}^{(p)}(\mathcal{Z}_{2p})$ ، إذ يُعطى تقابله العكسي بالصيغة

$$\mathcal{T}^{-1}(B) = \tau_1^{-1}(B \cap A_0) \cup (B \cap A_1)$$

لنتأمّل الآن عنصراً B من $\mathcal{B}(m,r)$. عندئذ نلاحظ مباشرة أنّ

$$\operatorname{card}(\mathcal{T}(B) \cap A_0) = \operatorname{card}(\tau(B \cap A_0)) = \operatorname{card}(B \cap A_0) = m$$

وأنّ

$$\operatorname{card}(\mathcal{T}(B) \cap A_1) = \operatorname{card}(B \cap A_1) = p - m$$

وأخيراً نرى أنّ

$$\begin{aligned} \mu_p(\mathcal{T}(B)) &= \left(\sum_{k \in B \cap A_0} (k+1) + \sum_{k \in B \cap A_1} k \right) \bmod p \\ &= \left(\operatorname{card}(B \cap A_0) + \sum_{k \in B} k \right) \bmod p \\ &= (m+r) \bmod p = m \oplus_p r \end{aligned}$$

وهكذا نستنتج مما سبق أنّ

$$\mathcal{T}(\mathcal{B}(m,r)) \subset \mathcal{B}\big(m, m \oplus_p r\big)$$

ومن ثَمّ

$$\forall k \geq 0, \quad \mathcal{T}\Big(\mathcal{B}\big(m, km \oplus_p r\big)\Big) \subset \mathcal{B}\big(m, (k+1)m \oplus_p r\big)$$

وعلى وجه الخصوص، نستنتج من كون $\mathcal{T}$ متبايناً، المتراجحة التالية

$$\forall k \geq 0, \quad \operatorname{card}\Big(\mathcal{B}\big(m, km \oplus_p r\big)\Big) \leq \operatorname{card}\Big(\mathcal{B}\big(m, (k+1)m \oplus_p r\big)\Big)$$

ولكن

$$\operatorname{card}(\mathcal{B}(m,r)) = \operatorname{card}\big(\mathcal{B}(m, pm \oplus_p r)\big)$$

إذن

$$\forall k \in \{0,\ldots,p-1\}, \quad \operatorname{card}(\mathcal{B}(m,r)) = \operatorname{card}\big(\mathcal{B}(m, km \oplus_p r)\big)$$

ولكن في حالة $1 \leq m < p$، نستنتج من كون p عدداً أوّليّاً، أنّ $\gcd(m,p) = 1$، ومن ثَمّ أنّ العدد m يولّد الزمرة $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$، فالتطبيق $k \mapsto km \oplus_p r$ يعرّف تقابلاً بين المجموعة $\{0,\ldots,p-1\}$ ونفسها، وعلى هذا نرى أنّه في حالة $1 \leq m < p$ يكون لدينا

$$\forall r \in \{0,\ldots,p-1\}, \quad \operatorname{card}(\mathcal{B}(m,r)) = \operatorname{card}(\mathcal{B}(m,0))$$

ومن ثَمّ

$$\operatorname{card}\Big(\bigcup_{0\leq r<p} \mathcal{B}(m,r)\Big) = p\operatorname{card}(\mathcal{B}(m,0))$$

وكذلك

$$\operatorname{card}\Big(\bigcup_{1\leq m<p}\Big(\bigcup_{0\leq r<p} \mathcal{B}(m,r)\Big)\Big) = p\operatorname{card}\Big(\bigcup_{1\leq m<p} \mathcal{B}(m,0)\Big)$$

ولكن

$$\bigcup_{1\leq m<p}\Big(\bigcup_{0\leq r<p} \mathcal{B}(m,r)\Big) = \mathcal{P}^{(p)}(\mathcal{Z}_{2p})\backslash\{A_0, A_1\}$$

$$\bigcup_{1\leq m<p} \mathcal{B}(m,0) = \mathcal{B}\backslash\{A_0, A_1\}$$

إذن $C_{2p}^{p} - 2 = p(\operatorname{card}(\mathcal{B}) - 2)$، وهذا يبرهن على أنّ

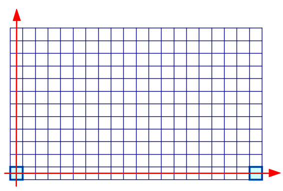
$$\operatorname{card}(\mathcal{B}) = 2 + \frac{C_{2p}^{p} - 2}{p}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

أولمبياد الرياضيّات السابع والثلاثون

① نُعطى عدداً طبيعيّاً موجباً تماماً r ورقعة مستطيلة مقسّمة إلى 12×20 مربّع واحدة. الحركات المسموحة على الرقعة هي التالية : يمكن الانتقال من مربّع إلى آخر إذا وفقط إذا كانت المسافة بين مركزَي المربّعَين تساوي $\sqrt{r}$. المهمّة المطلوبة هي إيجاد متتالية من الانتقالات تقود من زاوية إلى الزاوية المجاورة لها على الحرف الطويل للرقعة.

1. بيِّن أنّ المهمّة مستحيلة التحقيق إذا كان r مضاعفاً للعدد 2 أو للعدد 3 .
2. أثبت أنّ المهمّة قابلة للتحقيق في حالة $r = 73$.
3. هل يمكن تحقيق المهمّة في حالة $r = 97$ ؟



نفترض أنّ مجموعة مراكز مربّعات الرقعة هي المجموعة

$$\mathcal{B} = \{(i,j) : 0 \le i \le 19, 0 \le j \le 11\}$$

وأنّ المهمّة تنصّ على الانطلاق من النقطة $S(0,0)$ بهدف الوصول إلى $E(19,0)$ ، وذلك بالقفز من مربّع إلى آخر في حالة كون المسافة بين مركزيهما مساوية للعدد $\sqrt{r}$.

1. لنتأمّل أوّلاً حالة $r \mid 2$ ، ولنفترض على سبيل الجدل أنّه توجد متتالية $(M_k)_{1\le k\le m}$ من عناصر $\mathcal{B}$ تُحقّق

$$M_0 = S, M_m = E, \quad \forall k \in \{0,\ldots,m-1\},\ M_kM_{k+1} = \sqrt{r}$$

نضع $M_k = (\alpha_k, \beta_k)$. عندئذ

$$\forall k \in \{0,\ldots,m-1\}, \quad (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2 + (\beta_{k+1} - \beta_k)^2 = r$$

ولكن $\forall x \in \mathbb{Z},\ x^2 = x \bmod 2$ ، فإذا نظرنا إلى المساواة السابقة بالقياس 2 نجد

$$\forall k \in \{0,\ldots,m-1\}, \quad \alpha_{k+1} + \beta_{k+1} = \alpha_k + \beta_k \bmod 2$$

وهذا يؤدّي إلى التناقض $\alpha_m + \beta_m = \alpha_0 + \beta_0 \bmod 2$ ، إذْ إنّ

$$\alpha_0 + \beta_0 = 0 \quad \text{و} \quad \alpha_m + \beta_m = 19$$

فالمهمّة مستحيلة التحقيق في حالة $r \mid 2$.

لنتأتِ إلى حالة $r \mid 3$ ، ولنفترض على سبيل الجدل أنّه توجد متتالية $(M_k)_{1\le k\le m}$ من عناصر $\mathcal{B}$ تُحقّق

$$M_0 = S, M_m = E, \quad \forall k \in \{0,\ldots,m-1\},\, M_k M_{k+1} = \sqrt{r}$$

نضع كما في السابق $M_k = (\alpha_k, \beta_k)$. عندئذ

$$\forall k \in \{0,\ldots,m-1\}, \quad (\alpha_{k+1}-\alpha_k)^2 + (\beta_{k+1}-\beta_k)^2 = 0 \bmod 3$$

وهنا نستفيد من الخاصّة

$$3 \mid \left(t^2+s^2\right) \Leftrightarrow (3 \mid t) \wedge (3 \mid s) \Rightarrow 3 \mid (t+s) \qquad (1)$$

لنكتب

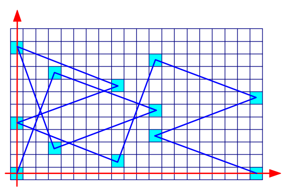
$$\forall k \in \{0,\ldots,m-1\}, \quad \alpha_{k+1}+\beta_{k+1} = \alpha_k + \beta_k \bmod 3$$

وهذا يؤدّي إلى التناقض $\alpha_m + \beta_m = \alpha_0 + \beta_0 \bmod 3$ ، إذْ إنّ

$$\alpha_0 + \beta_0 = 0 \quad \text{و} \quad \alpha_m + \beta_m = 19$$

فالمهمّة مستحيلة التحقيق في حالة $r \mid 3$ أيضاً.

لإثبات الخاصّة (1) نلاحظ أنّ الفرْض $t^2 = -s^2 \bmod 3$ يقتضي بعد تربيع الطرفين أنّ $t^4 = s^4 \bmod 3$ ، فإذا استفدنا من كون $x^3 = x \bmod 3$ أيّاً كانت x من $\mathbb{Z}$ ، استنتجنا أنّ $t^2 = s^2 \bmod 3$ ، وهذا، بالإضافة إلى المساواة $t^2 = -s^2 \bmod 3$ ، يقتضي أنّ $t^2 = s^2 = 0 \bmod 3$ ، فالعدد 3 يقسم كلاً من t و s .



2. لنلاحظ أنّ العدد $r = 73$ يُكتب بأسلوبٍ وحيدٍ مجموع مربّعين $73 = 3^2 + 8^2$. وعلى هذا فإنّ أيّ شعاع انتقال هو واحدٌ من ثمانية أشعّة $(\pm 8, \pm 3)$ أو $(\pm 3, \pm 8)$. ونجد بعد بعض المحاولة حلاً للمهمّة المطروحة :

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\text{Start}} \to (0,0) & & (0,10) & \to & (11,9) \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
(3,8) & & (8,7) & & (19,6) \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
(11,5) & & (0,4) & & (11,3) \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
(3,2) & \to & (8,1) & & (19,0) \to \boxed{\text{Finish}}
\end{array}$$

وبالطبع ليس هذا الحلّ وحيداً.

3. هنا أيضاً يُكتب العدد $r = 97$ بأسلوبٍ وحيدٍ مجموع مربّعين $97 = 4^2 + 9^2$. وعلى هذا فإنّ أيّ شعاع انتقال هو واحدٌ من ثمانية أشعّة $(\pm 9, \pm 4)$ أو $(\pm 4, \pm 9)$.

لنفترض على سبيل الجدل أنّه توجد متتالية $(M_k)_{1 \le k \le m}$ من عناصر $\mathcal{B}$ تُحقّق

$$M_0 = S, M_m = E, \quad \forall k \in \{0, \ldots, m-1\}, \; M_k M_{k+1} = \sqrt{r}$$

ونضع كما في السابق $M_k = (\alpha_k, \beta_k)$. سنبرهن بالتدريج على العدد k أنّ

$$\forall k \in \{0, \ldots, m\}, \quad \alpha_k = \left\lfloor \frac{\beta_k}{4} \right\rfloor \bmod 2$$

- في الحقيقة، هذه النتيجة واضحة في حالة $k = 0$ لأنّ $M_0 = (0,0)$.
- لنفترض أنّ $\alpha_k = \lfloor \beta_k / 4 \rfloor \bmod 2$ في حالة $k < m$. ولنناقش الحالات التالية :
  - $0 \le \beta_k < 4$. إذن $\alpha_k = 0 \bmod 2$. وعليه، إمّا أن يكون
    $$(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) = (\alpha_k \pm 9, \beta_k + 4)$$
    ومن ثَمّ $\alpha_{k+1} = \lfloor \beta_{k+1}/4 \rfloor \bmod 2 = 1 \bmod 2$. أو يكون
    $$(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) = (\alpha_k \pm 4, \beta_k + 9)$$
    (بشرط $\beta_k < 3$)، وعندئذ يكون $\alpha_{k+1} = \lfloor \beta_{k+1}/4 \rfloor \bmod 2 = 0 \bmod 2$.
  - $4 \le \beta_k < 8$. إذن $\alpha_k = 1 \bmod 2$. وعليه، يجب أن يكون
    $$(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) = (\alpha_k \pm 9, \beta_k \pm 4)$$
    وهذا يقتضي أن يكون $\alpha_{k+1} = \lfloor \beta_{k+1}/4 \rfloor \bmod 2 = 0 \bmod 2$.
  - $8 \le \beta_k < 12$. إذن $\alpha_k = 0 \bmod 2$. وعليه إمّا أن يكون
    $$(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) = (\alpha_k \pm 9, \beta_k - 4)$$
    ومن ثَمّ $\alpha_{k+1} = \lfloor \beta_{k+1}/4 \rfloor \bmod 2 = 1 \bmod 2$. أو يكون
    $$(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) = (\alpha_k \pm 4, \beta_k - 9)$$
    (بشرط $\beta_k > 8$)، وعندئذ يكون $\alpha_{k+1} = \lfloor \beta_{k+1}/4 \rfloor \bmod 2 = 0 \bmod 2$.

وبذا نكون قد أثبتنا صحّة المساواة $\alpha_{k+1} = \lfloor \beta_{k+1}/4 \rfloor \bmod 2$ في جميع الأحوال، وهذا يُنهي الإثبات بالتدريج. ولكن ينتج من هذا أنّ $\alpha_m = \lfloor \beta_m/4 \rfloor \bmod 2$ وهذا خُلفٌ لأنّ $(\alpha_m, \beta_m) = (19, 0)$. يبرهن هذا التناقض على أنّ المهمّة مستحيلة في حالة $r = 97$.

وبذا يكتمل الإثبات. ∎

② **لتكن P نقطة داخل مثلّث ABC تُحقّق**

$$\widehat{APB}-\widehat{ACB}=\widehat{APC}-\widehat{ABC}$$

وليكن D و E مركزي الدائرتين المماسّتين داخلاً في المثلّثين APB و APC بالترتيب.

أثبت أنّ المستقيمات (AP) و (BD) و (CE) تتلاقى في نقطة واحدة.

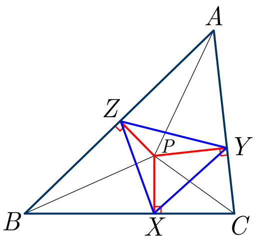
يعتمد الإثبات على الخاصّة التالية :

خاصّة : لتكن P نقطة داخل مثلّث ABC. ولتكن X و Y و Z المساقط القائمة للنقطة P على المستقيمات (BC) و (CA) و (AB) بالترتيب. ترتبط عناصر المثلّث XYZ بالنقاط A و B و C و P بالعلاقات التالية.

❶ $\widehat{XYZ}=\widehat{APC}-\widehat{B}$ و $\widehat{YZX}=\widehat{BPA}-\widehat{C}$ و $\widehat{ZXY}=\widehat{CPB}-\widehat{A}$.

❷ $XY=CP\sin\widehat{C}$ و $XZ=BP\sin\widehat{B}$ و $YZ=AP\sin\widehat{A}$.

الإثبات



❶ بملاحظة أنّ الرباعي $AZPY$ دائري نستنتج أنّ

$$\widehat{PAZ}=\widehat{PYZ}$$

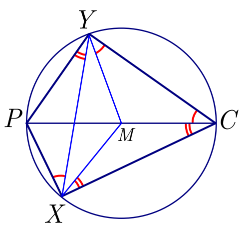
وبملاحظة أنّ الرباعي $CYPX$ دائري أيضاً نستنتج أنّ

$$\widehat{XCP}=\widehat{XYP}$$

وهكذا نرى أنّ

$$\begin{aligned}\widehat{XYZ}&=\widehat{XCP}+\widehat{PAZ}\\&=\widehat{C}-\widehat{ACP}+\widehat{A}-\widehat{CAP}\\&=\pi-\widehat{B}-\left(\pi-\widehat{APC}\right)=\widehat{APC}-\widehat{B}\end{aligned}$$

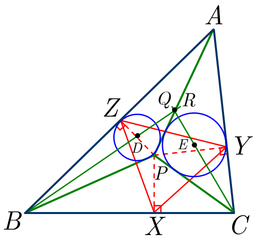
ونستنتج بالمُماثلة أنّ $\widehat{YZX}=\widehat{BPA}-\widehat{C}$ و $\widehat{ZXY}=\widehat{CPB}-\widehat{A}$.



❷ لتكن M منتصف $[CP]$، فتكون M مركز الدائرة المارّة برؤوس الرباعي الدائري $YPXC$. عندئذ بالنظر إلى المثلّث MYX نلاحظ أنّ $\widehat{MYX}=\widehat{MXY}=\frac{\pi}{2}-\widehat{C}$، ونلاحظ أنّ $MX=MY=\frac{1}{2}PC$. فإذا كتبنا علاقة الجيوب وجدنا

$$\frac{XY}{\sin(2\widehat{C})}=\frac{PC}{2\cos\widehat{C}}$$

وهذا يبرهن أنّ $XY=PC\sin\widehat{C}$، ونستنتج العلاقتين الأخرين بالمماثَلة.



نأتي الآن إلى المسألة المطروحة. ونعرّف النقاط X و Y و Z بأنها مساقط النقطة P على المستقيمات (BC) و (CA) و (AB) بالترتيب. فإذا استفدنا من النقطة ❶ في الخاصّة التي أثبتناها آنفاً استنتجنا أنّ $\widehat{XYZ} = \widehat{XZY}$، فالمثلّث XYZ مثلّث متساوي الساقين فيه $XY = XZ$. ثُمّ، إذا استفدنا من النقطة ❷ وجدنا أنّ $CP\sin\widehat{C} = BP\sin\widehat{B}$، وهذا يقتضي أنّ

$$\frac{CP}{CA}=\frac{BP}{BA} \qquad (1)$$

لنعرّف Q نقطة تقاطع المنصّف الداخلي (CE) للزاوية $\widehat{ACP}$ مع $[AP]$، ولنعرّف كذلك R نقطة تقاطع المنصّف الداخلي (BD) للزاوية $\widehat{ABP}$ مع $[AP]$.

نستنتج من خواصّ المنصفات أنّ

$$\frac{RP}{RA}=\frac{BP}{BA} \quad و \quad \frac{QP}{QA}=\frac{CP}{CA}$$

فإذا استفدنا من (1) وجدنا أنّ $\frac{QP}{QA}=\frac{RP}{RA}$، وهذا يقتضي أنّ $Q=R$. فالمستقيمات (CE) و (BD) و (AP) تتلاقى في نقطة واحدة. ويكتمل الإثبات. ■

③ لنذكّر أنّ $\mathbb{N}$ هي مجموعة الأعداد الطبيعيّة $\mathbb{N}=\{0,1,\ldots\}$. أوجد مجموعة جميع التوابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ التي تُحقّق

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2,\quad f(m+f(n)) = f(f(m))+f(n)$$

لنتأمّل تابعاً $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ يُحقّق المعادلة التابعيّة المعطاة.

- بوضع $n=m=0$ نستنتج مباشرة أنّ $f(f(0)) = f(f(0))+f(0)$، ومنه نجد أنّ $f(0)=0$.
- لنعرّف المجموعة $\mathcal{N}=f(\mathbb{N})$ أي الصورة المباشرة للتابع f. فإذا كان $\mathcal{N}=\{0\}$ استنتجنا أنّ $\forall n\in\mathbb{N},\ f(n)=0$ وهذا حلّ تافه للمسألة المطروحة. نفترض إذن فيما يلي أنّ $\mathcal{N}\neq\{0\}$، ونعرّف العدد $a=\min(\mathcal{N}\setminus\{0\})\geq 1$.
- بوضع $n=0$ في العلاقة التابعية، نجد $\forall m\in\mathbb{N},\ f(f(m))=f(m)$ وهذا يبرهن على أنّ $f(x)=x$ أيّاً كان x من $\mathcal{N}$. إذن $x\in\mathcal{N} \Leftrightarrow x=f(x)$.

- ليكن (x,y) من $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$، عندئذ نرى مباشرة أنّ

$$f(x+y)=f(x+f(y))=f(f(x))+f(y)=x+y$$

إذن $x+y\in\mathcal{N}$. إذن $\mathcal{N}+\mathcal{N}=\mathcal{N}$ لأنّ الاحتواء العكسي صحيحٌ وضوحاً بسبب انتماء العدد 0 إلى $\mathcal{N}$. وبوجه خاصّ نستنتج أنّ $a\mathbb{N}\subset\mathcal{N}$.

- ليكن (x,y) من $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$، ولنفترض أنّ $x>y$ فنعرّف $z=x-y$. عندئذ

$$\begin{aligned}x+z=y=f(y)&=f(z+f(x))\\&=f(f(z))+f(x)=f(z)+x\end{aligned}$$

ومن ثَمّ $z=f(z)$ إذن $z\in\mathcal{N}$، إذن $(\mathcal{N}-\mathcal{N})\cap\mathbb{N}=\mathcal{N}$.

- ليكن x من $\mathcal{N}$. بإجراء قسمة إقليديّة للعدد x على a نكتب $x=aq+r$ مع r من المجموعة $\{0,1,\ldots,a-1\}$. وعندئذ، لأنّ $aq\in a\mathbb{N}\subset\mathcal{N}$ نستنتج من النقطة السابقة أنّ $r=x-aq\in\mathcal{N}$. ولكنّ a هو أصغر عنصر موجب تماماً في $\mathcal{N}$. إذن لا بُدّ أن يكون $r=0$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $f(\mathbb{N})=a\mathbb{N}$، وأنّ

$$f(x)=x\Leftrightarrow a\mid x$$

- لنضع بالتعريف $f(k)=a\lambda_k$ في حالة $0\le k<a$. ولنتأمّل عدداً x من $\mathbb{N}$. كما في السابق بإجراء قسمة إقليديّة للعدد x على a نكتب $x=aq+r$ مع r من المجموعة $\{0,1,\ldots,a-1\}$. عندئذ نرى مباشرة أنّ

$$\begin{aligned}f(x)=f(r+aq)&=f(r+f(aq))\\&=f(f(r))+f(aq)=f(r)+aq\\&=a\lambda_r+aq\end{aligned}$$

إذن

$$f(x)=x-x\bmod a+a\lambda_{x\bmod a}$$

وعلى هذا، في حالة $f\ne0$، يوجدُ عددٌ a من $\mathbb{N}^*$، وأعدادٌ طبيعيّة $(\lambda_k)_{0\le k<a}$ مع $\lambda_0=0$ تُحقّق $\forall x\in\mathbb{N},\quad f(x)=x-x\bmod a+a\lambda_{x\bmod a}$.

وبالعكس، إذا كان f تابعاً من النمط السابق تحقّقنا مباشرة، ودون عناء أنّه يُحقّق المساواة التابعيّة المعطاة. وهكذا نكون قد وجدنا جميع التوابع التي تُحقّق الخواص المطلوبة في نصّ المسألة. وبذا يتمّ الإثبات. ■

④ **نتأمّل عددين طبيعيّين موجبين تماماً a و b يُحقّقان أنّ كلاً من العددين $15a+16b$ و $16a-15b$ مربّعٌ كاملٌ لعددٍ طبيعي غير معدوم. ما هي أصغر قيمة يمكن أن يأخذها أصغر هذين المربّعين.**

لنفترض أنّ $15a+16b=n^2$ و $16a-15b=m^2$ ، مع m و n من $\mathbb{N}^*$. ومنه نستنتج أنّ

$$15n^2+16m^2=481a \quad \text{و} \quad 16n^2-15m^2=481b \qquad (1)$$

وبجمع مربّعَي هاتين المعادلتين، ثُمّ الاختصار على 481 نستنتج أنّ

$$n^4+m^4=481\left(a^2+b^2\right) \qquad (2)$$

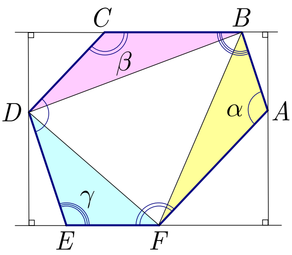
وهنا نلاحظ أنّ $481=13\times 37$.

- بالقياس 13، نستنتج من (2) أنّ $n^4+m^4=0 \bmod 13$ ، فإذا كان $13\nmid n$ نتج من ذلك أنّ العنصر $x=n^{-1}m\in(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})$. يُحقّق $x^4=-1 \bmod 13$ وعليه يكون $x^{12}=-1 \bmod 13$ ، وهذا خُلفٌ لأنّ مبرهنة Fermat الصغرى تنصّ على أنّ $x^{12}=1 \bmod 13$ وذلك أيّاً كانت قيمة x الأوّليّة مع 13. إذن لا بُدّ أن يكون $n \mid 13$، وهذا بدوره يقتضي أنّ $m \mid 13$ أيضاً.
- بالقياس 37، نستنتج من (2) أنّ $n^4+m^4=0 \bmod 37$ ، فإذا كان $37\nmid n$ نتج من ذلك أنّ العنصر $x=n^{-1}m\in(\mathbb{Z}/37\mathbb{Z})$. يُحقّق $x^4=-1 \bmod 37$ وعليه يكون $x^{36}=-1 \bmod 37$ ، وهذا خُلفٌ لأنّ مبرهنة Fermat الصغرى تنصّ على أنّ $x^{36}=1 \bmod 37$ وذلك أيّاً كانت قيمة x الأوّليّة مع 37. إذن لا بُدّ أن يكون $n \mid 37$، وهذا بدوره يقتضي أنّ $m \mid 37$ أيضاً.

وهكذا نستنتج أنّ كلاً من n و m هو من مضاعفات العدد 481 . فأصغر قيمة يمكن أن يأخذها أصغر المربّعين هي 481^2 ، وهي توافق $a=31\cdot 481$ و $b=481$. فهي إذن بالفعل أصغر قيمة يأخذها هذان المربّعان. ◼

⑤ **نتأمّل مضلّعاً سداسيّاً محدّباً** $ABCDEF$ ، **فيه** $(DE)\parallel(AB)$ و $(EF)\parallel(BC)$ و $(FA)\parallel(CD)$. **ولتكن** R_A و R_C و R_E **أنصاف أقطار الدوائر المارّة برؤوس المثلّثات** FAB و BCD و DEF **بالترتيب. وأخيراً ليكن** p **محيط المضلّع. أثبت أنّ**

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}$$



لنضع $\alpha = \widehat{FAB}$ و $\beta = \widehat{BCD}$ و $\gamma = \widehat{DEF}$. نعلم أنّ $2R_A = \dfrac{FB}{\sin\alpha}$. القطعة المستقيمة $[FB]$ أطول من المسافة بين المستقيمين المتوازيين (CB) و (EF) فهو إذن أطول من مجموع المسقَطين القائمين للقطعتين $[AB]$ و $[FA]$ على العمودي على (CB). أي

$$FB \geq FA\sin\beta + AB\sin\gamma$$

وكذلك نرى أنّ $[FB]$ أطول من مجموع المسقَطين القائمين للقطعتين $[DC]$ و $[DE]$ على العمودي على (CB). أي

$$FB \geq CD\sin\beta + DE\sin\gamma$$

ومنه نرى أنّ

$$2FB \geq (FA + CD)\sin\beta + (AB + DE)\sin\gamma$$

إذن

$$4R_A \geq (FA + CD)\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + (AB + DE)\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

ونجد بأسلوب مماثل أنّ

$$4R_C \geq (FA + CD)\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + (CB + EF)\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

$$4R_E \geq (AB + DE)\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} + (CB + EF)\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

بجمع المتراجحات الثلاث السابقة والاستفادة من كون $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ نجد

$$4(R_A + R_C + R_E) \geq 2p$$

وهي المتراجحة المطلوبة. ■

⑥ **لتكن p و q و n ثلاثة أعداد طبيعيّة موجبة تماماً تُحقّق $p+q<n$. نتأمّل متتالية $(x_k)_{0\le k\le n}$ تُحقّق $x_0=x_n=0$، إضافة إلى الشرط**

$$\forall i\in\{1,2,\ldots,n\},\quad x_i-x_{i-1}\in\{p,-q\}$$

أثبت أنّه يوجد عددان i و j يُحقّقان $j>i$ و $(i,j)\ne(0,n)$ و $x_i=x_j$.

لنعرّف المجموعتين

$$A=\{i\in\mathbb{N}_n : x_i-x_{i-1}=p\}$$

$$B=\{i\in\mathbb{N}_n : x_i-x_{i-1}=-q\}$$

ولنضع $\alpha=\operatorname{card}(A)$ و $\beta=\operatorname{card}(B)$. بملاحظة أنّ

$$A\cup B=\mathbb{N}_n \quad \text{و} \quad A\cap B=\varnothing$$

نستنتج أنّ $\alpha+\beta=n$. ومن جهة أخرى، بملاحظة أنّ

$$0=x_n-x_0=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\sum_{i\in A}(x_i-x_{i-1})+\sum_{i\in B}(x_i-x_{i-1})$$

نستنتج أنّ $\alpha p=\beta q$، وبوجه خاصّ $\alpha>0$ و $\beta>0$.

▫ لنفترض أنّ $\gcd(p,q)=1$. عندئذ نستنتج من كون $p\mid(\beta q)$ أنّ $p\mid\beta$. وعلى هذا يوجد m من $\mathbb{N}^*$ يُحقّق $\beta=pm$ و $\alpha=qm$. وإذا عرّفنا $r=p+q$ استنتجنا من المساواة $\alpha+\beta=n$ أنّ $n=rm$. واستناداً إلى الفرض $p+q<n$ نستنتج أنّ $m\ge 2$.

لنلاحظ أنّ المساواة $x_i=x_j$ مع $j>i$ تُكتب بالشكل

$$\begin{aligned}
0&=\sum_{k=i+1}^{j}(x_k-x_{k-1})\\
&=p\operatorname{card}(A\cap]i,j])-q\operatorname{card}(B\cap]i,j])\\
&=p\operatorname{card}(A\cap]i,j])-q(j-i-\operatorname{card}(A\cap]i,j]))\\
&=r\operatorname{card}(A\cap]i,j])-q(j-i)
\end{aligned}$$

ومنه $r\mid(q(j-i))$ ولكن $\gcd(r,q)=1$، إذن $r\mid(j-i)$، وهذا يعني أنّ j يجب أن تكون من الشكل $i+\lambda r$. إنّ هذه النتيجة هي التي أوحت بالبحث عن الحل بشكل $j=i+r$، وهذا ما سنفعله فيما يلي.

لنعرّف المقادير $(\delta_i)_{0\le i\le n-r}$ بالصيغة $\delta_i = x_{i+r} - x_i$، ولنلاحظ الخواص التالية.

1. من جهة أولى لدينا

$$\begin{aligned}\delta_i &= \sum_{k=i+1}^{i+r} (x_k - x_{k-1})\\ &= p\,\mathrm{card}(A\cap]i,i+r]) - q\,\mathrm{card}(B\cap]i,i+r])\\ &= p\,\mathrm{card}(A\cap]i,i+r]) - q(r-\mathrm{card}(A\cap]i,i+r]))\\ &= r(\mathrm{card}(A\cap]i,i+r]) - q)\end{aligned}$$

ومن ثَمّ $\delta_i \in r\mathbb{Z}\quad ,\forall i\in\{0,1,\ldots,n-r\}$.

2. ومن جهة ثانية، نلاحظ بمناقشة الحالات المختلفة أنّ

$$\delta_{i+1} - \delta_i = (x_{i+1+r} - x_{i+r}) - (x_{i+1} - x_i) \in \{-r,0,r\}$$

3. لنفترض على سبيل الجدل أنّ $0 \ne \delta_i$ أيّاً كانت i من $\{0,1,\ldots,n-r\}$، عندئذ لا بُدّ أن يكون $\delta_i\delta_{i+1} > 0$ أيّاً كانت i من $\{0,1,\ldots,n-r-1\}$، وذلك لأنّه، بناءً على 1.، في حالة $\delta_i\delta_{i+1} < 0$ نجد $|\delta_i - \delta_{i+1}| \ge 2r$ وهذا يتناقض مع 2.

ونستنتج من كون $\delta_i\delta_{i+1} > 0$ أيّاً كانت i من $\{0,1,\ldots,n-r-1\}$، أنّ

$$\forall i \in \{0,\ldots,n-r\},\quad \delta_0\delta_i > 0$$

وبوجه خاصّ

$$\forall k \in \{0,1,\ldots,m-1\},\quad \delta_0\delta_{kr} > 0$$

ومن ثَمّ $\delta_0\left(\sum_{k=0}^{m-1}\delta_{kr}\right) > 0$، إذن $\sum_{k=0}^{m-1}\delta_{kr} \ne 0$، وهذا خُلفٌ، لأنّ

$$\sum_{k=0}^{m-1}\delta_{kr} = \sum_{k=0}^{m-1}(x_{(k+1)r} - x_{kr}) = x_n - x_0 = 0$$

هذا التناقض يبرهن على أنّه لا بُدّ من وجود i_0 في $\{0,1,\ldots,n-r\}$ يُحقّق $\delta_{i_0} = 0$، أي $x_{i_0+r} = x_{i_0}$، وهي النتيجة المطلوبة.

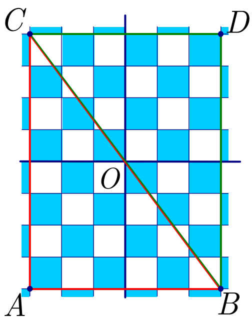
▫ في حالة $\gcd(p,q) = d > 1$. يكفي أن نطبّق الدراسة السابقة على $p' = \frac{p}{d}$ و $q' = \frac{p}{d}$ والمتتالية $(y_k)_{0\le k\le n}$ المعرّفة بالصيغة $y_k = \frac{x_k}{d}$، لنجد (i,j) مختلفة عن $(0,n)$ وتُحقق $i<j$ و $y_i = y_j$ أي $x_i = x_j$. وبذا يتمّ الإثبات في الحالة العامّة. ■

① في المستوي نفترض أنّ النقاط التي إحداثيّاتها أعدادٌ صحيحة هي رؤوس مربّعاتٍ واحدةٍ، وأنّ هذه المربّعات ملوّنة باللونين الأبيض والأسود بالتناوب كما في رقعة الشطرنج. في حالة عددين طبيعيّين موجبين تماماً n و m، نتأمّل مثلّثاً قائم الزاوية إحداثيات رؤوسه أعدادٌ صحيحة وضلعاه القائمان طولاهما n و m ومحمولان على أضلاع المربّعات. لتكن S_1 مساحة الجزء الملوّن بالأسود من المثلّث، ولتكن S_2 مساحة الجزء الملوّن بالأبيض من المثلّث. عندئذ نعرّف $f(n,m) = |S_1 - S_2|$.

1. في حالة $n = m \bmod 2$ احسب $f(n,m)$.

2. أثبت أنّ $f(n,m) \le \frac{1}{2}\max(n,m)$ وذلك أيّاً كان (n,m) من $\mathbb{N}^{*2}$.

3. أثبت أنّه لا يوجد ثابتٌ C يُحقّق $f(n,m) \le C$ وذلك أيّاً كان (n,m) من $\mathbb{N}^{*2}$.

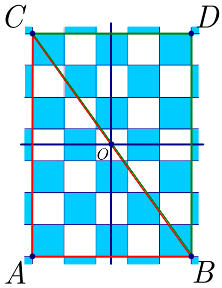


1. لنبدأ بحالة $n = 2p$ و $m = 2q$. ولنفترض أنّ رؤوس المثلّث هي النقاط $A(-p,-q)$ و $B(p,-q)$ و $C(-p,q)$، ثُمّ لنضع $D(p,q)$. عندئذ نرى مباشرة أنّ $O(0,0)$ هي مركز تناظر المستطيل $ABDC$. وأنّ المثلّث DCB هو صورة ABC وفق التناظر $\mathcal{S}$ الذي مركزه O. وأخيراً إذا رمزنا بالرمز 1 إلى اللّون الأبيض وبالرمز -1 إلى اللّون الأسود، وافترضنا أنّ لون المربّع C_{ij} الذي مركزه $\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)$ هو $(-1)^{i+j}$ رأينا مباشرة أنّ لون المربّع المناظر $\mathcal{S}(C_{ij})$ هو $(-1)^{-i-1-j-1} = (-1)^{i+j}$ أي هو لون C_{ij} نفسه. وعلى هذا نرى أنّ مساحة الجزء الأسود $S_1(ABC)$ من المثلّث ABC تساوي مساحة الجزء الأسود $S_1(DCB)$ من المثلّث DCB. ومجموع هذين المقدارين يساوي مساحة الجزء الأسود من المستطيل $ABDC$، أي $2S_1(ABC) = 2pq$، ومن ثَمّ $S_1(ABC) = pq$، ولمّا كانت مساحة الجزء الأبيض من المثلّث ABC تُعطى بالصيغة

$$S_2(ABC) = 2pq - S_1(ABC) = pq$$

استنتجنا أنّ $f(2p,2q) = 0$.

لنأتِ إلى حالة $n = 2p+1$ و $m = 2q+1$. ولنفترض أنّ رؤوس المثلّث هي النقاط $A(-p-\frac{1}{2}, -q-\frac{1}{2})$ و $B(p+\frac{1}{2}, -q-\frac{1}{2})$ و $C(-p-\frac{1}{2}, q+\frac{1}{2})$، ثُمّ لنضع $D(p+\frac{1}{2}, q+\frac{1}{2})$. عندئذ نرى مباشرة، وكما في السابق، أنّ $O(0,0)$ هي مركز تناظر المستطيل $ABDC$. وأنّ المثلّث DCB هو صورة ABC وفق التناظر $\mathcal{S}$ الذي مركزه O. وأخيراً إذا رمزنا بالرمز 1 إلى اللّون الأبيض وبالرمز -1 إلى اللّون الأسود، وافترضنا أنّ لون المربّع C_{ij} الذي مركزه (i,j) هو $(-1)^{i+j}$ رأينا مباشرة أنّ لون المربّع المناظر $\mathcal{S}(C_{ij})$ هو لون C_{ij} نفسه. وعلى هذا نرى مساحة الجزء الأسود $S_1(ABC)$ من المثلّث ABC تساوي مساحة الجزء الأسود $S_1(DCB)$ من المثلّث DCB. ومجموع هذين المقدارين يساوي مساحة الجزء الأسود من المستطيل $ABDC$، وكذلك الأمر بالنسبة إلى الجزء الأبيض $S_2(ABC)$، ومن ثَمّ

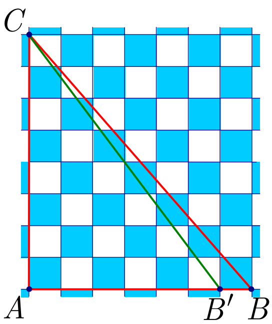


$$|S_2(ABC) - S_1(ABC)| = \frac{1}{2}\left|\sum_{j=-q}^{q}\sum_{i=-p}^{p}(-1)^{i+j}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\sum_{i=-p}^{p}(-1)^{i}\right|\left|\sum_{j=-q}^{q}(-1)^{j}\right| = \frac{1}{2}$$

إذن $f(2p+1, 2q+1) = \frac{1}{2}$.

2. إنّ أسلوب التناظر الذي اتبعناه سابقاً، يفقد أهمّيته في حالة كون $n \not\equiv m \bmod 2$، إذْ ليس للمربعات المتناظرة بالنسبة إلى منتصف وتر المثلّث القائم في هذه الحالة اللون نفسه. لنتأمّل حالة $n = 2p+1$ و $m = 2q$.



سنفترض أنّ رؤوس المثلّث هي $A(0,0)$ و $B(2p+1,0)$ و $C(0,2q)$. وسنعرّف النقطة $B'(2p,0)$. عندئذ نرى مباشرة أنّ

$$S_1(ABC) = S_1(AB'C) + S_1(B'BC)$$

$$S_2(ABC) = S_2(AB'C) + S_2(B'BC)$$

ولكن رأينا أنّ $S_1(AB'C) = S_2(AB'C)$ إذن

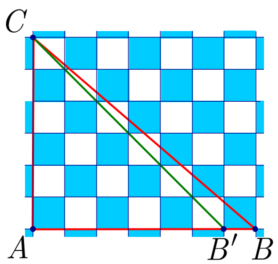
$$|S_1(ABC) - S_2(ABC)| \le S_1(B'BC) + S_2(B'BC)$$

ولكنّ المجموع $S_1(B'BC)+S_2(B'BC)$ يساوي مساحة المثلّث $BB'C$ أي q،
وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$f(2p+1,2q)\leq q\leq \frac{1}{2}\max(2p+1,2q)$$

إذن في حالة n فردي و m زوجي لدينا $f(n,m)\leq \frac{1}{2}\max(n,m)$. وبملاحظة أنّه، بوجه عامّ لدينا $f(n,m)=f(m,n)$ نستنتج مما سبق أنّه في حالة $n\neq m \bmod 2$ تتحقّق المتراجحة $f(n,m)\leq \frac{1}{2}\max(n,m)$. وهي صحيحة وضوحاً، وفق نتيجة السؤال الأوّل، في حالة $n=m \bmod 2$. إذن

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^*,\qquad f(n,m)\leq \tfrac{1}{2}\max(n,m)$$



3. لنحسب بدقّة قيمة المقدار $f(2p+1,2p)$. سنفترض أنّ رؤوس المثلّث هي النقاط $A(0,0)$ و $B(2p+1,0)$ و $C(0,2p)$. وسنعرّف النقطة $B'(2p,0)$. عندئذ نرى مباشرة أنّ

$$S_1(ABC)=S_1(AB'C)+S_1(B'BC)$$
$$S_2(ABC)=S_2(AB'C)+S_2(B'BC)$$

ولكن رأينا أنّ $S_1(AB'C)=S_2(AB'C)$ إذن

$$\begin{aligned}S_1(ABC)-S_2(ABC)&=S_1(B'BC)-S_2(B'BC)\\&=2S_1(B'BC)-p\end{aligned}$$

لأنّ مساحة المثلّث $BB'C$ تساوي p . ولكن $S_1(B'BC)$ تساوي مجموع مساحات المثلّثات $(A_kB_kC_k)_{0\leq k<2p}$ التي رؤوسها

$$A_k(2p-k,k) \text{ و } B_k\left(\frac{(2p+1)(2p-k)}{2p},k\right) \text{ و } C_k\left(2p-k,\frac{2p(1+k)}{2p+1}\right)$$

إذن

$$\begin{aligned}S_1(B'BC)&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2p-1}A_kB_k\cdot A_kC_k=\frac{1}{4p(2p+1)}\sum_{k=0}^{2p-1}(2p-k)^2\\&=\frac{1}{4p(2p+1)}\sum_{k=1}^{2p}k^2=\frac{4p+1}{12}\end{aligned}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$S_1(ABC) - S_2(ABC) = \frac{4p+1}{6} - p = \frac{1-2p}{6}$$

ومن ثَمّ

$$f(2p+1, 2p) = \frac{2p-1}{6}$$

إذن

$$\lim_{p\to\infty} f(2p+1, 2p) = +\infty$$

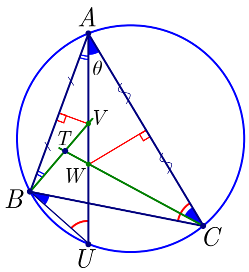
فلا يمكن أن يكون التابع f محدوداً. وبذا يتمّ الإثبات.

ملاحظة : قد يكون من المفيد الإشارة إلى الصيغة التالية للتابع f :

$$f(n,m) = nm \left| \iint_{\Delta} (-1)^{\lfloor nx \rfloor + \lfloor ny \rfloor} \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y \right|$$

و $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : x + y \leq 1\}$.

② **نتأمّل مثلّثاً ABC الزاوية A هي أصغر زواياه. تقسم النقطتان B و C الدائرة $\mathfrak{C}$ المارّة برؤوس المثلّث ABC إلى قوسين أحدهما لا يحوي النقطة A. لتكن U نقطة من هذا القوس، يلاقي محورا القطعتين المستقيمتين $[AB]$ و $[AC]$ المستقيم (AU) في V و W بالترتيب، ويتقاطع المستقيمان (BV) و (CW) في النقطة T. أثبت أنّ $AU = TB + TC$.**



حلٌّ أوّل. لنرمز اختصاراً $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ إلى زوايا المثلّث ABC، ولنرمز بالرمز θ إلى قياس الزاوية $\widehat{UAC}$. عندئذ نستنتج من كون W تقع على محور $[AC]$ أنّ $\widehat{ACW} = \theta$، وهذا يقتضي أنّ $\widehat{TCB} = \widehat{C} - \theta$. ونجد بالمماثلة أنّ $\widehat{ABV} = \widehat{A} - \theta$ ومن ثَمّ $\widehat{CBT} = \widehat{B} + \theta - \widehat{A}$. ومنه نستنتج أنّ

$$\widehat{BTC} = \pi - \left(\widehat{C} - \theta\right) - \left(\widehat{B} + \theta - \widehat{A}\right) = 2\widehat{A}$$

فإذا طبّقنا علاقة الجيب على المثلّث BTC وجدنا أنّ

$$TB = \frac{BC}{\sin(2\widehat{A})} \sin\left(\widehat{C} - \theta\right) = \frac{BC}{\sin(2\widehat{A})} \sin\left(\widehat{B} + \theta + \widehat{A}\right)$$

وكذلك

$$TC = \frac{BC}{\sin(2\widehat{A})}\sin\left(\widehat{B}+\theta-\widehat{A}\right)$$

ولكن

$$\sin\left(\widehat{B}+\theta+\widehat{A}\right)+\sin\left(\widehat{B}+\theta-\widehat{A}\right) = 2\sin\left(\widehat{B}+\theta\right)\cos\widehat{A}$$

إذن

$$TB+TC = \frac{BC}{\sin\widehat{A}}\sin\left(\widehat{B}+\theta\right) = \frac{AB}{\sin\widehat{C}}\sin\left(\widehat{B}+\theta\right) \qquad (1)$$

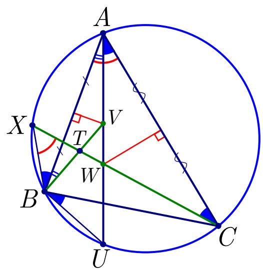
وقد استفدنا من علاقة الجيب في المثلّث ABC. ولكن لدينا من جهة أخرى

$$\widehat{AUB} = \widehat{ACB} = \widehat{C} \quad \text{و} \quad \widehat{CBU} = \widehat{CAU} = \theta$$

إذن في المثلّث ABU، لدينا $\widehat{AUB} = \widehat{C}$ و $\widehat{ABU} = \widehat{B}+\theta$، فإذا طبّقنا علاقة الجيب من جديد وجدنا

$$\frac{AB}{\sin\widehat{C}} = \frac{AU}{\sin\left(\widehat{B}+\theta\right)}$$

وإذا استفدنا من هذه النتيجة وعوّضنا في (1) وجدنا أنّ $TB+TC = AU$. وهي النتيجة المطلوبة.



حلٌّ ثانٍ. نمدّد المستقيم (CW) ليقطع الدائرة في X. من جهة أولى لدينا

$$\widehat{BXC} = \widehat{BAC} = \widehat{A}$$

ومن جهة ثانية

$$\begin{aligned}\widehat{XBT} &= \widehat{XBA}+\widehat{ABT} = \widehat{XCA}+\widehat{BAU}\\ &= \widehat{UAC}+\widehat{BAU} = \widehat{BAC} = \widehat{A}\end{aligned}$$

فالمثلّث TXB متساوي الساقين فيه $BT = TX$، ومن ثَمّ نكون قد أثبتنا صحّة المساواة $BT+TC = CX$. ولكن

$$\widehat{XBC} = \widehat{XBA}+\widehat{B} = \widehat{UAC}+\widehat{B} = \widehat{UBC}+\widehat{B} = \widehat{ABU}$$

فطولا الوترين اللذين يقابلان الزاويتين السابقتين متساويان أيضاً، أي $XC = AU$. ونكون قد أثبتنا صحّة المساواة $BT+TC = AU$. ◼

③ **نتأمّل أعداداً حقيقيّة** $(x_k)_{1\le k\le n}$ **تُحقّق الشرطين :**

$$\max_{1\le i\le n}|x_i| \le \frac{n+1}{2} \quad \text{و} \quad |x_1+x_2+\cdots+x_n|\le 1$$

أثبت وجود تبديل σ **من** $\mathfrak{S}_n$، (**أي تقابلٌ على المجموعة** $\mathbb{N}_n=\{1,\ldots,n\}$)، **يُحقّق**

$$\left|\sum_{k=1}^{n} kx_{\sigma(k)}\right| \le \frac{n+1}{2}$$

في حالة σ من $\mathfrak{S}_n$ نكتب $f(\sigma)=\sum_{k=1}^{n} kx_{\sigma(k)}$. ولنفترض على سبيل الجدل أنّ

$$\forall \sigma\in\mathfrak{S}_n,\quad |f(\sigma)|>\frac{n+1}{2} \qquad (\mathcal{H})$$

يمكننا دون الإقلال من عموميّة المناقشة أن نفترض أنّ $f(id)=\sum_{k=1}^{n}kx_k>0$، على أن نستبدل المتتالية $(-x_i)_{1\le i\le n}$ بالمتتالية $(x_i)_{1\le i\le n}$ إذا دعت الحاجة. نعرّف عندئذ المجموعة

$$\mathcal{A}=\{\sigma\in\mathfrak{S}_n : f(\sigma)>(n+1)/2\}$$

لدينا إذن $id\in\mathcal{A}$.

ليكن σ عنصراً من $\mathcal{A}$، ولتكن $\tau_i=(i,i+1)$ المُناقلة التي تُبادل بين العنصرين $i+1$ و i، دون أن تؤثّر على بقيّة العناصر عندئذ

$$f(\sigma\circ\tau_i)=\sum_{k\notin\{i,i+1\}} kx_{\sigma(k)}+ix_{\sigma(i+1)}+(i+1)x_{\sigma(i)}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} f(\sigma\circ\tau_i)-f(\sigma) &= ix_{\sigma(i+1)}+(i+1)x_{\sigma(i)}-ix_{\sigma(i)}-(i+1)x_{\sigma(i+1)}\\ &= x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(i+1)}\end{aligned}$$

إذن

$$\left|f(\sigma\circ\tau_i)-f(\sigma)\right|=\left|x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(i+1)}\right|\le n+1$$

وهذا يقتضي أنّ

$$f(\sigma\circ\tau_i)\ge f(\sigma)-(n+1)>-\frac{n+1}{2}$$

فإذا استفدنا من $(\mathcal{H})$ استنتجنا من ذلك أنّ $f(\sigma\circ\tau_i)>\dfrac{n+1}{2}$، إذن $\sigma\circ\tau_i\in\mathcal{A}$.

فنكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall i\in\{1,\ldots,n-1\},\ \forall\sigma\in\mathcal{A},\quad \sigma\circ\tau_i\in\mathcal{A} \qquad (1)$$

وبملاحظة أنّ المُناقلة $\rho_i = (1, i)$ التي تُبادل بين العددين i و 1 دون أن تؤثّر على بقية الأعداد من $\mathbb{N}_n$، تُحقّق $\rho_2 = \tau_1$ و

$$\rho_{i+1} = \tau_i \circ \rho_i \circ \tau_i \quad \text{في حالة} \quad 2 \leq i < n$$

نستنتج أنّ المناقلات $(\tau_i)_{1\leq i<n}$ تولّد المناقلات $(\rho_i)_{1<i\leq n}$، فإذا استفدنا من (1) وجدنا

$$\forall i \in \{2, \ldots, n\}, \forall \sigma \in \mathcal{A}, \quad \sigma \circ \rho_i \in \mathcal{A} \tag{2}$$

وأخيراً، في حالة $j \neq i$، تُكتب المناقلة λ_{ij} التي تُبادل بين العددين i و j دون أن تؤثّر على بقية الأعداد من $\mathbb{N}_n$، بالشكل $\lambda_{ij} = \rho_i \circ \rho_j \circ \rho_i$ في حالة $i \geq 2$ و $j \geq 2$، في حين لدينا $\lambda_{1j} = \rho_j$. إذن تولّد المناقلات $(\rho_i)_{1<i\leq n}$ جميع المناقلات $(\lambda_{ij})_{1\leq i<j\leq n}$، فإذا استفدنا من (2) وجدنا

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n, \forall \sigma \in \mathcal{A}, \quad \sigma \circ \lambda_{ij} \in \mathcal{A} \tag{3}$$

ولكن من المعروف أنّ المُناقلات $(\lambda_{ij})_{1\leq i<j\leq n}$ تولّد جميع التباديل في $\mathfrak{S}_n$. إذن نستنتج من ذلك، ومن (3)، أنّ $\mathfrak{S}_n \subset \mathcal{A}$ أي

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad f(\sigma) > \frac{n+1}{2} \tag{4}$$

وعلى وجه الخصوص إذا تأمّلنا التبديل σ_0 من $\mathfrak{S}_n$ المعرّف بالعلاقة

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad \sigma_0(k) = n + 1 - k$$

وجدنا

$$\begin{aligned}
f(\sigma_0) + f(id) &= \sum_{k=1}^{n} kx_k + \sum_{k=1}^{n} kx_{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} kx_k + \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (n+1)x_k = (n+1)\sum_{k=1}^{n} x_k
\end{aligned}$$

وهذا يؤدّي، بالاعتماد على (4)، إلى التناقض

$$n + 1 < f(\sigma_0) + f(id) \leq (n+1)\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq n + 1$$

فالفرض $(\mathcal{H})$ فرْضٌ خاطئ، ويوجد σ من $\mathfrak{S}_n$ يحقّق $\left|\sum_{k=1}^{n} kx_{\sigma(k)}\right| \leq \frac{n+1}{2}$. ■

④ **نقول إنّ المصفوفة المربّعة $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة فضيّة إذا حقّقت الشرطين التاليين :**

❶ **جميع أمثال المصفوفة A تنتمي إلى المجموعة $\mathbb{N}_{2n-1} = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$، أي**

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad a_{ij} \in \mathbb{N}_{2n-1}$$

❷ **أيّاً كان i من $\mathbb{N}_n$ يحوي العمود i والسطر i معاً جميع عناصر $\mathbb{N}_{2n-1}$، أي**

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \{a_{ik} : k \in \mathbb{N}_n\} \cup \{a_{ki} : k \in \mathbb{N}_n\} = \mathbb{N}_{2n-1}$$

أثبت صحّة ما يلي :

1. **لا توجد مصفوفة فضيّة في حالة** $n = 1997$.
2. **مجموعة قيم n التي توجد في حالتها مصفوفات فضيّة من المرتبة n مجموعة غير منتهية.**

1. لنبرهن أوّلاً أنّه إذا وُجدت مصفوفة فضيّة من المرتبة n كان n عدداً زوجيّاً. لتحقيق ذلك نعرّف المجموعات التالية :

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad L_i = \{(i,k) : k \in \mathbb{N}_n\}$$
$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad C_j = \{(k,j) : k \in \mathbb{N}_n\}$$

ثُمّ نتأمّل مصفوفة فضيّة $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ من المرتبة n، ونعرّف في حالة k من المجموعة $\mathbb{N}_{2n-1}$ المجموعة $M_k = \{(i,j) : a_{ij} = k\}$. عندئذ يكون لدينا

$$\operatorname{card}(M_k) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(M_k \cap L_i) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(M_k \cap C_i)$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}
2\operatorname{card}(M_k) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\operatorname{card}(M_k \cap L_i) + \operatorname{card}(M_k \cap C_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{\operatorname{card}(M_k \cap (L_i \cup C_i))}_{1 \lrcorner} + \operatorname{card}(M_k \cap L_i \cap C_i) \right) \\
&= n + \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(M_k \cap \{(i,i)\}) \\
&= n + \operatorname{card}(\{i \in \mathbb{N}_n : a_{ii} = k\})
\end{aligned}$$

وقد استفدنا من كون العنصر k يظهر مرّة واحدة فقط في السطر i والعمود i معاً، ومن ثَمّ يجب أن يكون $\operatorname{card}(M_k \cap (L_i \cup C_i)) = 1$.

ولكن إذا كانت جميع المجموعات $(\{i \in \mathbb{N}_n : a_{ii} = k\})_{1\le k\le 2n-1}$ غير خالية استنتجنا من كونها منفصلة مثنى مثنى، واجتماعها محتوى في $\mathbb{N}_n$ أنّ

$$n = \mathrm{card}(\mathbb{N}_n) \ge \sum_{k=1}^{2n-1} \mathrm{card}(\{i \in \mathbb{N}_n : a_{ii} = k\}) \ge 2n-1$$

وهذا خُلفٌ، (إلاّ في الحالة التافهة $n = 1$). إذن لابُدّ من وجود k_0 تحقّق

$$\{i \in \mathbb{N}_n : a_{ii} = k_0\} = \varnothing$$

وعندها يكون $n = 2\,\mathrm{card}(M_{k_0})$ وهذا يقتضي أنّ n عددٌ زوجي. وعليه، لمّا كان 1997 عدداً فرديّاً فلا توجد مصفوفة فضيّة من المرتبة 1997.

2. سنبرهن أنّه في حالة $n = 2^p$ توجد مصفوفة فضيّة $A^{(p)}$ من المرتبة 2^p أمثال قطرها تساوي جميعاً العدد 1. في الحقيقة، يمكن أن نختار مثلاً

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A^{(2)} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

في حالة $p = 1$ أو $p = 2$. لنفترض أننا أنشأنا $A^{(p)}$، ولتكن I_p المصفوفة الواحديّة من المرتبة 2^p، ولتكن كذلك J_p المصفوفة من المرتبة 2^p التي جميع أمثالها تساوي 1. عندئذ نعرّف $A^{(p+1)}$ من المرتبة 2^{p+1} كِتليّاً كما يلي :

$$A^{(p+1)} = \left[\begin{array}{c|c} A^{(p)} & A^{(p)} - I_p + 2^{p+1}J_p \\ \hline A^{(p)} + 2^{p+1}J_p & A^{(p)} \end{array}\right]$$

فإذا رمزنا $L_i(M)$ و $C_j(M)$ بالترتيب إلى عناصر السطر i وعناصر العمود j من مصفوفة M، وجدنا في حالة $1 \le i \le 2^p$ لدينا

$$L_i\left(A^{(p+1)}\right) = L_i\left(A^{(p)}\right) \cup \left(2^{p+1} + L_i\left(A^{(p-1)}\right) \backslash \{1\}\right) \cup \left\{2^{p+1}\right\}$$

$$C_i\left(A^{(p+1)}\right) = C_i\left(A^{(p)}\right) \cup \left(2^{p+1} + C_i\left(A^{(p-1)}\right)\right)$$

ومن ثَمّ

$$L_i\left(A^{(p+1)}\right) \cup C_i\left(A^{(p+1)}\right) = \mathbb{N}_{2^{p+1}} \cup \left(2^{p+1} + \mathbb{N}_{2^{p+1}-1}\right) = \mathbb{N}_{2^{p+2}-1}$$

ونجد بالمُماثلة $L_i\left(A^{(p+1)}\right) \cup C_i\left(A^{(p+1)}\right) = \mathbb{N}_{2^{p+2}-1}$ في حالة $2^p < i \le 2^{p+1}$.

فالمصفوفة $A^{(p+1)}$ مصفوفة فضيّة. ويتمّ الإثبات. ■

⑤ **أوجد جميع الأزواج (a,b) من الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً التي تُحقّق المساواة**

$$a^{b^2} = b^a$$

لنبدأ بالملاحظة التالية :

خاصّة : لنفترض أنّ a و b و n و m هي أعداد طبيعيّة وأنّ $a^n = b^m$. عندئذ إذا عرّفنا $\delta = \gcd(m,n)$ ، وكتبنا $m = \delta\mu$ و $n = \delta\nu$ ، وجدنا عدداً طبيعيّاً c يُحقّق $a = c^\mu$ و $b = c^\nu$.

الإثبات

في الحقيقة، استناداً إلى المبرهنة الأساسيّة في الحساب

$$a = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\alpha_p} \quad \text{و} \quad b = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\beta_p}$$

مع $\mathcal{P}$ مجموعة الأعداد الأوّلية، والجماعتان $(\alpha_p)_{p\in\mathcal{P}}$ و $(\beta_p)_{p\in\mathcal{P}}$ جماعتان شبه معدومتين من $\mathbb{N}$. وعليه يكون

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{n\alpha_p} = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{m\beta_p}$$

وبسبب الوحدانيّة نستنتج، بعد الاختصار على δ ، أنّ $\forall p \in \mathcal{P}, \nu\alpha_p = \mu\beta_p$. ولكن نستنتج من كون $\gcd(\nu,\mu) = 1$ أنّ $\beta_p = \nu\lambda_p$ و $\alpha_p = \mu\lambda_p$ وذلك أيّاً كان العدد الأوّلي p . فإذا عرّفنا $c = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\lambda_p}$ استنتجنا من ذلك أنّ $a = c^\mu$ و $b = c^\nu$.

لنتأمّل إذن زوجاً من الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً (a,b) يُحقّق $a^{b^2} = b^a$. ولنضع بالتعريف $\delta = \gcd(a,b^2)$ ، ثُمّ لنعرّف x و y بالعلاقتين $a = \delta x$ و $b^2 = \delta y$. عندئذ يوجد استناداً إلى ما أثبتناه عددٌ c يُحقّق $a = c^x$ و $b = c^y$. ولكن عندئذ يكون

$$\delta = \gcd(c^{2y},c^x) = \min(c^{2y},c^x) = \min(b^2,a)$$

- حالة $a = \delta$. إذن $x = 1$ و $c = a$. ومنه

$$b^2 = \delta y = ay \quad \text{و} \quad b = c^y = a^y$$

إذن $y = a^{2y-1}$. ولكن

$$a \geq 2 \Rightarrow a^{2y-1} \geq 2^{2y-1} \geq 2y > y$$

(وقد استفدنا من $2^{\ell-1} \geq \ell$ في حالة $\ell \geq 1$). فالمساواة $y = a^{2y-1}$ تتحقّق فقط في حالة $a = y = 1$. وعندئذ يكون $b = 1$. ومنه الحل $(a,b) = (1,1)$.

- نأتي إلى حالة $\delta = b^2 < a$. إذن $y = 1$ و $c = b$. ومنه

$$a = b^2 x \quad \text{و} \quad a = b^x$$

إذن $b^{x-2} = x$ و $x \geq 2$ لأنّ $b^2 < a = b^2 x$. ولكنّ المتراجحة $b^{x-2} = x \geq 2$ تقتضي أنّ $x \geq 3$. ولأنّ أيّ عدد أوّلي يقسم x يقسم أيضاً b بسبب المساواة $b^{x-2} = x$ استنتجنا أنّ $b \geq 3$ أيضاً. ولكن

$$x \geq 5 \Rightarrow b^{x-2} \geq (1+2)^{x-2} \geq 1 + 8 \cdot 2^{x-5} \geq 1 + 8(x-4) > x$$

إذن $x \in \{3, 4\}$.

- في حالة $x = 3$، نجد $b = 3$ و $a = 3^3$، ومنه الحل $(a,b) = (27,3)$.
- وفي حالة $x = 4$، نجد $b = 2$ و $a = 2^4$، ومنه الحلّ $(a,b) = (16,2)$.

وهكذا نجد أنّ

$$\left\{(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : a^{b^2} = b^a\right\} = \{(1,1),(16,2),(27,3)\}$$

وهي النتيجة المطلوبة.

⑥ في حالة عددٍ طبيعي n من $\mathbb{N}^*$ سنكتب $f(n)$ دلالة على عدد الطرائق المختلفة لتمثيل العدد n كمجموع قوى غير سالبة للعدد 2. إذ نعتبر تمثيلين يختلفان فقط بترتيب حدود المجموع تمثيلاً واحداً. فمثلاً $f(4) = 4$ لأنّ

$$4 = 2^2 = 2^1 + 2^1 = 2^1 + 2^0 + 2^0 = 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0$$

أثبت، في حالة $n \geq 3$ أنّ $2^{n^2/4} \leq f(2^n) \leq 2^{n^2/2}$.

في حالة عددٍ طبيعي n من $\mathbb{N}^*$، لتكن A_n مجموعة الطرائق المختلفة لتمثيل العدد n كمجموع قوى للعدد 2، جميعها أكبر تماماً من 1. ولتكن B_n مجموعة الطرائق المختلفة لتمثيل العدد n كمجموع قوى للعدد 2، على أن تساوي إحدى هذه القوى العدد $1 = 2^0$. وأخيراً لنضع $C_n = A_n \cup B_n$. عندئذ يكون لدينا اعتماداً على التعريف

$$f(n) = \operatorname{card}(C_n) = \operatorname{card}(A_n) + \operatorname{card}(B_n)$$

لنلاحظ ما يلي :

- إذا كان n عدداً فرديّاً أكبر تماماً من 1، كان لدينا وضوحاً $A_n = \varnothing$. وعرّف التطبيق $x \mapsto x - 1$ تقابلاً بين B_n و C_{n-1}. إذن $2 \nmid n \Rightarrow f(n) = f(n-1)$.

▪ وإذا كان n عدداً زوجيّاً. عرّف التطبيق $x \mapsto x-1$ تقابلاً بين B_n و C_{n-1}، وعرّف التطبيق $x \mapsto \frac{x}{2}$ تقابلاً بين A_n و $C_{n/2}$. إذن

$$f(n) = f(n/2) + f(n-1)$$

وهكذا نصل إلى الصيغة التدريجيّة التالية للتابع f :

$$f(n) = \begin{cases} f(n-1) & : \ 2 \nmid n \\ f\left(\frac{n}{2}\right) + f(n-1) & : \ 2 \mid n \end{cases}$$

وهي مع الشرط $f(1) = 1$ كافية لحساب $f(n)$ أيّاً كانت قيمة n من $\mathbb{N}^*$.

لنلاحظ في حالة $n \geq 1$ و $1 \leq k \leq 2^{n-1}$ أنّ

$$f(2^n + 2k) = f\left(2^{n-1} + k\right) + f(2^n + 2(k-1))$$

إذن

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} f\left(2^{n-1} + k\right) = f(2^n + 2^n) - f(2^n) = f\left(2^{n+1}\right) - f(2^n)$$

ومنه

$$f\left(2^{n+1}\right) - f(2^n) = \sum_{2^{n-1} < j \leq 2^n} f(j) \tag{1}$$

وبجمع هذه المساويات نجد أيضاً

$$f\left(2^{n+1}\right) = 1 + \sum_{1 \leq j \leq 2^n} f(j) \tag{2}$$

▫ من العلاقة (1) ومن كون التابع f متزايداً نستنتج مباشرة المتراجحة

$$f\left(2^{n+1}\right) \leq f(2^n) + 2^{n-1} f(2^n) = 2^n f(2^n) \tag{3}$$

إذن

$$f(2^n) \leq f(2) 2^{1+2+\cdots+(n-1)} = 2^{1+n(n-1)/2}$$

وهذا يبرهن على أنّ $f(2^n) \leq 2^{n^2/2}$ في حالة $n \geq 2$.

▫ لنعرّف في حالة $0 \leq j < 2^{n-1}$ المقدار

$$A_j = f\left(2^{n-1} + 1 + j\right) + f\left(2^{n-1} - j\right)$$

عندئذ نلاحظ ما يلي،

$$\begin{aligned} A_{2j-1} &= f\left(2^{n-1}+2j\right)+f\left(2^{n-1}+1-2j\right)\\ &= f\left(2^{n-1}+2j\right)+f\left(2^{n-1}-2j\right)\\ A_{2j} &= f\left(2^{n-1}+1+2j\right)+f\left(2^{n-1}-2j\right)\\ &= f\left(2^{n-1}+2j\right)+f\left(2^{n-1}-2j\right)\\ A_{2j+1} &= f\left(2^{n-1}+2j+2\right)+f\left(2^{n-1}-2j-2\right) \end{aligned}$$

إذن $A_{2j} = A_{2j-1}$ ، وكذلك

$$\begin{aligned} A_{2j+1}-A_{2j} &= f\left(2^{n-1}+2j+2\right)-f\left(2^{n-1}+2j\right)\\ &\quad -\left(f\left(2^{n-1}-2j\right)-f\left(2^{n-1}-2j-2\right)\right)\\ &= f\left(2^{n-2}+j+1\right)-f\left(2^{n-2}-j\right) \end{aligned}$$

ولكنّ التابع f تابعٌ متزايدٌ، إذن $A_{2j+1}-A_{2j} \geq 0$. وهذا يبرهن على أنّ المتتالية $\left(A_j\right)_{0\leq j<2^{n-1}}$ متزايدة، وعلى الخصوص

$$\forall j \in \left\{0,1,\ldots,2^{n-1}-1\right\},\quad A_j \geq A_0 = 2f\left(2^{n-1}\right)$$

إذن

$$\sum_{j=1}^{2^n} f(j) = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} A_j \geq 2^n f\left(2^{n-1}\right)$$

وهذا يبرهن، بناءً على (2)، أنّ

$$f\left(2^{n+1}\right) \geq 1+2^n f\left(2^{n-1}\right) > 2^n f\left(2^{n-1}\right)$$

- فمن جهة أولى، في حالة $k \geq 1$ ، نجد

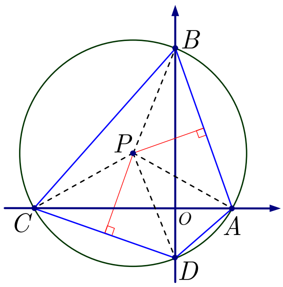
$$f\left(2^{2k}\right) \geq 2^{2k-1} f\left(2^{2(k-1)}\right) \geq 2^{(2k-1)+\cdots+3} f(2) = 2^{k^2}$$

- ومن جهة ثانية، في حالة $k \geq 1$ ، نجد

$$f\left(2^{2k+1}\right) \geq 2^{2k} f\left(2^{2k-1}\right) \geq 2^{2(k+\cdots+1)} f(2) = 2^{k^2+k+1}$$

وهاتان الحالتان معاً تثبتان أنّ $f\left(2^n\right) > 2^{n^2/4}$. وبذا يتمّ إثبات المتراجحة المطلوبة.

① **نتأمّل رباعيّاً محدّباً $ABCD$ ، قطراه (AC) و (BD) متعامدان، والضلعان المتقابلان $[AB]$ و $[CD]$ غير متوازيين. نفترض أنّ النقطة P ، نقطة تقاطع محورَي القطعتين $[AB]$ و $[CD]$ ، تقع داخل الرباعي $ABCD$. أثبت أنّ الشرط اللازم والكافي ليكون الرباعي $ABCD$ رباعياً دائرياً هو أن تكون مساحتا المثلثين ABP و CDP متساويتين.**



لننسب الشكل إلى جملة متعامدة نظاميّة، محوراها محمولان على القطرين المتعامدين ومبدؤها O هو نقطة تقاطعهما. عندئذ يمكن أن نفترض أنّ إحداثيّات النقاط A و B و C و D هي $(a,0)$ و $(0,b)$ و $(-c,0)$ و $(0,-d)$ بالترتيب مع a و b و c و d أعدادٌ موجبة تماماً.

- لنبدأ بحساب (X_P,Y_P) إحداثيّتا النقطة P . من $PA = PB$ و $PC = PD$ نجد

$$(X_P - a)^2 + Y_P^2 = X_P^2 + (Y_P - b)^2$$
$$(X_P + c)^2 + Y_P^2 = X_P^2 + (Y_P + d)^2$$

ومن ثَمّ

$$2aX_P - 2bY_P + b^2 - a^2 = 0$$
$$2cX_P - 2dY_P + c^2 - d^2 = 0$$

إذن

$$Y_p = \frac{a^2c + c^2a - b^2c - d^2a}{2(da - bc)} \quad \text{و} \quad X_P = \frac{a^2d + c^2b - b^2d - d^2b}{2(da - cb)}$$

- لحساب $\delta(P,(AB))$ أي بُعد P عن (AB) ، نلاحظ أنّ معادلة المستقيم (AB) هي $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ، إذن

$$\delta(P,(AB)) = \frac{1}{\sqrt{a^{-2} + b^{-2}}}\left|\frac{X_P}{a} + \frac{Y_P}{b} - 1\right|$$

ولأنّ P تقع داخل الرباعي فهي من جهة O بالنسبة إلى (AB)، نستنتج أنّ

$$\delta(P,(AB)) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(ab - bX_P - aY_P)$$

ومن ثَمّ تُعطى مساحة المثلّث ABP بالعلاقة

$$\mathcal{A}(ABP) = \frac{ab - bX_P - aY_P}{2}$$

وبتعويض قيمتي X_P و Y_P نجد

$$\mathcal{A}(ABP) = \frac{a^2bd + b^3d - ab^2c - a^3c + a^2d^2 + b^2d^2 - a^2c^2 - b^2c^2}{4(da-bc)}$$

أو

$$\mathcal{A}(ABP) = \frac{(a^2+b^2)(bd - ac + d^2 - c^2)}{4(da-bc)} \tag{1}$$

▫ وبالأسلوب نفسه، لحساب $\delta(P,(CD))$ أي بُعد P عن (CD)، نلاحظ أنّ معادلة المستقيم (CD) هي $\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = -1$، إذن

$$\delta(P,(CD)) = \frac{1}{\sqrt{c^{-2}+d^{-2}}}\left|\frac{X_P}{c} + \frac{Y_P}{d} + 1\right|$$

ولأنّ P تقع داخل الرباعي فهي من جهة O بالنسبة إلى (CD)، نستنتج أنّ

$$\delta(P,(CD)) = \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}}(cd + dX_P + cY_P)$$

ومن ثَمّ تُعطى مساحة المثلّث CDP بالعلاقة

$$\mathcal{A}(CDP) = \frac{cd + dX_P + cY_P}{2}$$

وبتعويض قيمتي X_P و Y_P نجد

$$\mathcal{A}(CDP) = \frac{cd^2a + c^3a - bc^2d - bd^3 + a^2d^2 + a^2c^2 - b^2d^2 - b^2c^2}{4(da-bc)}$$

أو

$$\mathcal{A}(CDP) = \frac{(c^2+d^2)(ca - bd + a^2 - b^2)}{4(da-bc)} \tag{2}$$

ومن (1) و (2) نجد

$$\mathcal{A}(CDP) - \mathcal{A}(ABP) = \frac{(ca - bd)\big((a+c)^2 + (b+d)^2\big)}{4(da - bc)}$$

وهكذا نرى أنّ

$$\mathcal{A}(CDP) = \mathcal{A}(ABP) \Leftrightarrow ca = bd$$

أو

$$\mathcal{A}(CDP) = \mathcal{A}(ABP) \Leftrightarrow OC \cdot OA = OB \cdot OD$$

ولكنّ المساواة الأخيرة تُكافئ كون الرباعي $ABCD$ رباعيّاً دائريّاً. وبذا يتمّ الإثبات.

② **في مسابقة، هناك عددٌ a من المتسابقين، وعددٌ b من الحكّام، و b عددٌ فردي أكبر أو يساوي 3. يُعطي كلُّ حكمٍ كلَّ متسابقٍ نتيجة 1 أو 0. نفترض أنّ عدداً k يُحقّق الخاصّة التالية : تتطابق نتيجة أيِّ حكمين عند k من المتسابقين على الأكثر. أثبت أنّ $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.**

لنرمز بالرمز $\mathcal{J}$ إلى مجموعة الحكّام وبالرمز $\mathcal{C}$ إلى مجموعة المتسابقين، نعلم أنّ

$$\text{card}(\mathcal{J}) = b \quad \text{و} \quad \text{card}(\mathcal{C}) = a$$

في حالة حكمٍ j من $\mathcal{J}$ ومتسابقٍ c من $\mathcal{C}$، نكتب $j(c)$ دلالة النتيجة من $\{0,1\}$ التي يُعطيها الحكم j للمتسابق c. وأخيراً لنكتب $\mathcal{J}^{(2)}$ دلالة على مجموعة المجموعات الجزئيّة المؤلّفة من عنصرين في $\mathcal{J}$. نتأمّل المجموعة $\mathcal{A}$ التالية

$$\mathcal{A} = \{(\{j,j'\},c) \in \mathcal{J}^{(2)} \times \mathcal{C} : j(c) = j'(c)\}$$

وفي حالة زوجٍ $\{j,j'\}$ من الحكّام، نتأمّل المجموعة

$$\mathcal{A}_{\{j,j'\}} = \{c \in \mathcal{C} : j(c) = j'(c)\}$$

أي مجموعة المتسابقين الذين يحصلون على النتيجة نفسها من الحكمين j و j'. كما نتأمّل في حالة متسابقٍ c المجموعة

$$\mathcal{A}_c = \{\{j,j'\} \in \mathcal{J}^{(2)} : j(c) = j'(c)\}$$

أي مجموعة أزواج الحكّام اللذين تتطابق نتائج المتسابق c عندهما. عندئذ يمكن التعبير عن $\text{card}(\mathcal{A})$ بأسلوبين كما يلي :

$$\text{card}(\mathcal{A}) = \sum_{\{j,j'\}\in\mathcal{J}^{(2)}} \text{card}\big(\mathcal{A}_{\{j,j'\}}\big) = \sum_{c\in\mathcal{C}} \text{card}(\mathcal{A}_c) \qquad (1)$$

▫ استناداً إلى الفرْض لدينا

$$\forall \{j, j'\} \in \mathcal{J}^{(2)}, \quad \operatorname{card}\left(\mathcal{A}_{\{j,j'\}}\right) \leq k$$

فإذا عُدنا إلى المساواة الأولى في (1) استنتجنا

$$\operatorname{card}(\mathcal{A}) \leq k \operatorname{card}\left(\mathcal{J}^{(2)}\right) = k\frac{b(b-1)}{2} \tag{2}$$

▫ لنأتي الآن إلى المجموعة $\mathcal{A}_c$ في حالة متسابقٍ c. وليكن x عددَ الحكّام الذين أعطوا المتسابق c النتيجة 1، أي $x = \operatorname{card}(\{j \in \mathcal{J} : j(c) = 1\})$، فيكون $b-x$ عددَ الحكّام الذين أعطوا المتسابق c النتيجة 0. عندئذ. بملاحظة أنّ $\mathcal{A}_c$ هي اجتماع المجموعتين $\{\{j, j'\} \in \mathcal{J}^{(2)} : j(c) = j'(c) = 1\}$، التي عدد عناصرها يساوي $\frac{x(x-1)}{2}$، و $\{\{j, j'\} \in \mathcal{J}^{(2)} : j(c) = j'(c) = 0\}$ التي عدد عناصرها $\frac{(b-x)(b-x-1)}{2}$، نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(\mathcal{A}_c) &= \frac{1}{2}(x(x-1) + (b-x)(b-x-1)) \\
&= x^2 - bx + \frac{b(b-1)}{2} \\
&= \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b(b-2)}{4} \geq \frac{b(b-2)}{4}
\end{aligned}$$

أو

$$\operatorname{card}(\mathcal{A}_c) \geq \frac{(b-1)^2}{4} - \frac{1}{4}$$

ولكنّ العدد b عددٌ فردي، فالمتراجحة $\operatorname{card}(\mathcal{A}_c) \geq \frac{(b-1)^2}{4} - \frac{1}{4}$ تقتضي

$$\operatorname{card}(\mathcal{A}_c) \geq \frac{(b-1)^2}{4}$$

وإذا عُدنا إلى المساواة الثانية في (1) استنتجنا

$$\operatorname{card}(\mathcal{A}) \geq \operatorname{card}(\mathcal{C})\frac{(b-1)^2}{4} = \frac{a(b-1)^2}{4} \tag{3}$$

ومن المتراجحتين (2) و (3) نجد

$$k\frac{b(b-1)}{2} \geq \frac{a(b-1)^2}{4}$$

أو $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$. وبذا يتمّ إثبات المطلوب. ■

③ **في حالة عدد طبيعي موجب تماماً n، نرمز بالرمز $d(n)$ إلى عدد القواسم الموجبة للعدد n بما فيها 1 و n. عيِّن المجموعة**

$$\mathcal{K} = \left\{k \in \mathbb{N}^* : \exists n \in \mathbb{N}^*,\ d(n^2) = kd(n)\right\}$$

لنرمز بالرمز $\mathcal{P}$ إلى مجموعة الأعداد الأوّليّة. استناداً إلى المبرهنة الأساسيّة في الحساب، يوجد في حالة كلِّ عددٍ n من $\mathbb{N}^*$، جماعة $\left(\alpha_p(n)\right)_{p\in\mathcal{P}}$ من الأعداد الطبيعيّة، تكون شبه معدومة، (أي تُحقّق $\operatorname{card}\left(\{p \in \mathcal{P} : \alpha_p(n) > 0\}\right) < +\infty$) وتُحقّق

$$n = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\alpha_p(n)}$$

وعندئذ نستنتج من التكافؤ

$$(m \mid n) \Leftrightarrow \left(\forall p \in \mathcal{P},\ \alpha_p(m) \le \alpha_p(n)\right)$$

أنّ

$$d(n) = \operatorname{card}\left(\{m \in \mathbb{N}^* : m \mid n\}\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + \alpha_p(n)\right)$$

وعلى هذا نرى أنّ

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(\frac{1 + 2\alpha_p(n)}{1 + \alpha_p(n)}\right)$$

فإذا رمزنا بالرمز $\widetilde{\mathcal{K}}$ إلى المجموعة

$$\widetilde{\mathcal{K}} = \left\{\frac{d(n^2)}{d(n)} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

استنتجنا مما سبق، ومن وجود تقابلٍ بين مجموعة الأعداد الأوّليّة $\mathcal{P}$ ومجموعة الأعداد الطبيعيّة $\mathbb{N}$ أنّ

$$\widetilde{\mathcal{K}} = \left\{\prod_{i\in\mathbb{N}} \left(\frac{1 + 2\alpha_i}{1 + \alpha_i}\right) : (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}\right\}$$

وقد رمزنا $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ إلى مجموعة المتتاليات شبه المعدومة من الأعداد الطبيعيّة، أي تلك المتتاليات من الأعداد الطبيعيّة التي يكون عددُ حدودها غير المعدومة منتهياً.

في المسألة المطروحة يُطلبُ تعيين المجموعة $\mathcal{K} = \widetilde{\mathcal{K}} \cap \mathbb{N}$.

- من الواضح أنّ 1 ينتمي $\mathcal{K}$، فهو يوافق الجماعة $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ مع $\forall i \in \mathbb{N},\ \alpha_i = 0$.
- إذا كان k عنصراً من $\mathcal{K}$، وُجِدَتْ متتالية شبه معدومة $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ تُحقّق

$$\prod_{i\in\mathbb{N}}(1+2\alpha_i) = k\cdot\prod_{i\in\mathbb{N}}(1+\alpha_i)$$

وهذا يقتضي أنّ k عددٌ فردي. فإذا رمزنا $\mathcal{O}$ إلى مجموعة الأعداد الطبيعيّة الفرديّة استنتجنا من ذلك أنّ $\mathcal{K}\subset\mathcal{O}$.

- لنفترض على سبيل الجدل أنّ $\mathcal{O}\neq\mathcal{K}$. عندئذ نستنتج من كون $\mathcal{K}\subset\mathcal{O}$ أنّ المجموعة $\mathcal{O}\backslash\mathcal{K}$ غير خالية. ليكن $q=\min(\mathcal{O}\backslash\mathcal{K})$. فيكون q عدداً فرديّاً أكبر أو يساوي 3. وإذا عرّفنا $m=\max\{j\in\mathbb{N}^*: 2^j \mid (q+1)\}$ كان $m\geq 1$، وكان $q+1=2^m k$ مع k عددٌ فردي أصغر تماماً من q، فهو عنصرٌ من $\mathcal{K}$. نحن إذن أمام الوضع التالي :

$$q = 2^m k - 1 \quad \text{و} \quad k\in\mathcal{K} \quad \text{و} \quad q\notin\mathcal{K}$$

لّما كان k عنصراً من $\mathcal{K}$، وُجِدَ عددٌ طبيعي موجبٌ تماماً ν، ومتتالية $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ حدودها معدومة بدءاً من الدليل ν، تُحقّقان

$$k = \prod_{i=0}^{\nu-1}\left(\frac{1+2\alpha_i}{1+\alpha_i}\right)$$

لنتأمّل المتتالية $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ المعرّفة بالشكل $\beta_i=\alpha_i$ في حالة $0\leq i<\nu$. وبالعلاقة $\beta_i = 2^{i-\nu}\lambda$ في حالة $\nu\leq i<m+\nu$، على أن يجري تعيين العدد λ لاحقاً. عندئذ

$$\prod_{i=0}^{m+\nu-1}\left(\frac{1+2\beta_i}{1+\beta_i}\right) = \prod_{i=0}^{\nu-1}\left(\frac{1+2\alpha_i}{1+\alpha_i}\right)\cdot\prod_{i=\nu}^{m+\nu-1}\left(\frac{1+2^{i+1-\nu}\lambda}{1+2^{i-\nu}\lambda}\right) = k\cdot\frac{1+2^m\lambda}{1+\lambda}$$

وهنا نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} k\cdot\frac{1+2^m\lambda}{1+\lambda} = q &\Leftrightarrow k(1+2^m\lambda) = (1+\lambda)(2^m k - 1) \\ &\Leftrightarrow \lambda = (2^m-1)k - 1 = q-k \end{aligned}$$

فإذا اخترنا $\lambda = q-k$، كان

$$q = \prod_{i=0}^{m+\nu-1}\left(\frac{1+2\beta_i}{1+\beta_i}\right)\in\mathcal{K}$$

ممّا يتناقض مع تعريف q. هذا التناقض يُثبتُ أنّ $\mathcal{O}\backslash\mathcal{K}=\varnothing$، ومن ثَمّ $\mathcal{K}=\mathcal{O}$. فالمجموعة $\mathcal{K}$ هي مجموعة الأعداد الطبيعيّة الفرديّة. ■

④ **عيِّن جميع أزواج الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً (a,b) التي يقسِم في حالتها العددُ ab^2+b+7 العددَ a^2b+a+b.**

لنتأمّل زوجاً (a,b) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$، ولنفترض أنّ العددَ $n=ab^2+b+7$ يقسمُ العددَ $m=a^2b+a+b$. نلاحظ أنّ $an-bm=7a-b^2$، إذن لا بُدّ أن يقسم n العددَ $\ell=7a-b^2$. وهنا نناقش الحالات التالية.

- حالة $\ell>0$. هنا نلاحظ ما يلي :
  - في حالة $b\geq 3$ لدينا $n\geq 9a+10>\ell$، فلا يُمكن أن يقسمَ العددُ n العدد ℓ في حالة $b\geq 3$.
  - أمّا في حالة $b=2$، فلدينا $n=4a+9$ و $\ell=7a-4$، والشرط $\ell\mid n$ مع $\ell<2n$ يقتضي أنّ $\ell=n$، أو $3a=13$، وهذا خُلفٌ.
  - وأمّا في حالة $b=1$، فلدينا $n=a+8$ و $\ell=7a-1=7n-57$. والشرط $n\mid\ell$ يقتضي $n\mid 57$، ولمّا كان $n\geq 9$ استنتجنا أنّ $n\in\{19,57\}$، أو $a\in\{11,49\}$، ومنه $(a,b)\in\{(11,1),(49,1)\}$.
- حالة $\ell<0$. في هذه الحالة نلاحظ أنّ

$$n>n+\ell=(a-1)b^2+b+7(a+1)>0$$

فلا يمكن في هذه الحالة أن يقسمَ العددُ n العددَ ℓ.

- حالة $\ell=0$. هنا نستنتج من المساواة $7a=b^2$ أنّ $b=7\beta$ و $a=7\beta^2$، ومن ثَمّ

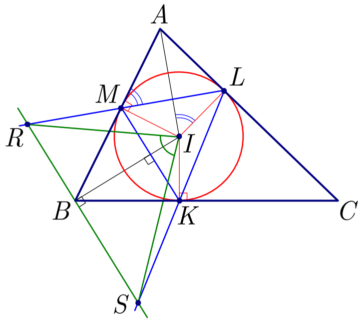
$$(a,b)\in\left\{\left(7\beta^2,7\beta\right):\beta\in\mathbb{N}^*\right\}$$

وبالعكس، نتيقّن بالتحقّق المباشر أنّ جميع الثنائيّات (a,b) من المجموعة

$$\{(11,1),(49,1)\}\cup\left\{\left(7\beta^2,7\beta\right):\beta\in\mathbb{N}^*\right\}$$

هي حلولٌ للمسألة المطروحة.

⑤ **ليكن I مركز الدائرة $\mathfrak{C}$ الماسّة لأضلاع لمثلّث ABC. تمسّ الدائرة $\mathfrak{C}$ الأضلاع $[BC]$ و$[CA]$ و$[AB]$ في K و L و M بالترتيب. يُلاقي المستقيم المرسوم من B موازياً المستقيمين (KM) و (LM) و (LK) في النقطتين R و S بالترتيب. أثبت أنّ الزاوية $\widehat{RIS}$ زاوية حادّة.**



لمّا كان $IM = IK$ و $BK = BM$ استنتجنا أنّ (BI) هو محور القطعة $[KM]$، وهذا يقتضي أنّ $(BI) \perp (KM)$. ولكن $(RS) \parallel (KM)$، إذن يجب أن يكون $(RS) \perp (BI)$.

اعتماداً على مبرهنة فيثاغورث، يمكن أن نكتب

$$IS^2 = BS^2 + BI^2$$

$$IR^2 = BR^2 + BI^2$$

وعلى هذا نستنتج مباشرة أنّ

$$\begin{aligned} IS^2 + IR^2 - RS^2 &= BS^2 + BI^2 + BS^2 + BI^2 - (BS + BR)^2 \\ &= 2\left(BI^2 - BS \cdot BR\right) \end{aligned}$$

ولكن من الرباعي الدائري $AMIL$ نستنتج أنّ $\widehat{AML} = \widehat{AIL} = \frac{1}{2}\left(\pi - \widehat{A}\right)$، ومن ثَمّ نجد في المثلّث RBM أنّ $\widehat{BMR} = \frac{1}{2}\left(\pi - \widehat{A}\right)$ و $\widehat{RBM} = \frac{1}{2}\left(\pi - \widehat{B}\right)$، ومن ثَمّ $\widehat{MRB} = \frac{1}{2}\left(\pi - \widehat{C}\right) =$، فإذا طبّقنا علاقة الجيوب على هذا المثلّث استنتجنا أنّ

$$\frac{BM}{\cos(\widehat{C}/2)} = \frac{BR}{\cos(\widehat{A}/2)}$$

ونجد بأسلوبٍ مماثلٍ، من المثلّث SBK، أنّ

$$\frac{BK}{\cos(\widehat{A}/2)} = \frac{BS}{\cos(\widehat{C}/2)}$$

إذن، نستنتج من العلاقتين السابقتين، ومن كون $BM = BK$ أنّ

$$BR \cdot BS = BM \cdot BK = BK^2$$

وهذا يقتضي أنّ

$$IS^2 + IR^2 - RS^2 = 2\left(BI^2 - BK^2\right) = 2\ IK^2$$

إذن

$$\cos\left(\widehat{RIS}\right) = \frac{IS^2 + IR^2 - RS^2}{2IS \cdot IR} = \frac{IK^2}{IS \cdot IR} > 0$$

فالزاوية $\widehat{RIS}$ زاوية حادّة. وبذا يتمّ الإثبات.

⑥ **نتأمل مجموعة التوابع** $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ **على مجموعة الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً** $\mathbb{N}^*$ **وتُحقّق العلاقة التابعيّة** $(\mathcal{E})$ **التالية.**

$$\forall (t,s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad f\left(t^2 f(s)\right) = s(f(t))^2$$

عيِّن أصغر قيمة ممكنة للمقدار $f(1998)$.

لنتأمّل تابعاً ما $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ يُحقّق العلاقة $(\mathcal{E})$، ولنضع $a = f(1)$.

❶ بوضع $t = 1$ في $(\mathcal{E})$ نجد $\forall s \in \mathbb{N}^*, \quad f \circ f(s) = a^2 s$.

❷ وكذلك، بوضع $s = 1$ في $(\mathcal{E})$ نجد $\forall t \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(at^2\right) = (f(t))^2$.

❸ ليكن x من $\mathbb{N}^*$. عندئذ نلاحظ ما يلي :

$$\begin{aligned}(af(x))^2 &= a^2(f(x))^2 \underset{❷}{=} a^2 f\left(ax^2\right)\\ &\underset{❶}{=} f \circ f\left(f\left(ax^2\right)\right) = f\left(f \circ f\left(ax^2\right)\right)\\ &\underset{❶}{=} f\left(a(ax)^2\right) \underset{❷}{=} (f(ax))^2\end{aligned}$$

إذن، $\forall x \in \mathbb{N}^*, \quad f(ax) = af(x)$.

❹ لنبرهن بالتدرج على العدد n صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_n$ التالية :

$$\forall t \in \mathbb{N}^*, \quad (f(t))^{n+1} = a^n f\left(t^{n+1}\right)$$

الخاصّة $\mathbb{P}_0$ صحيحة وضوحاً. والخاصّة $\mathbb{P}_1$ تنتج من ❷ و ❸. لنفترض صحّة الخاصّة $\mathbb{P}_{n-1}$ في حالة n من $\mathbb{N}^*$. عندئذ

$$\begin{aligned}(f(t))^{n+2} &\underset{(1)}{=} a^{n-1} f(t^n)(f(t))^2 \underset{❸}{=} f\left(a^{n-1}t^n\right)(f(t))^2\\ &\underset{(\mathcal{E})}{=} f\left(t^2 f \circ f\left(a^{n-1}t^n\right)\right) \underset{❶}{=} f\left(t^2 a^2 a^{n-1} t^n\right)\\ &= f\left(a^{n+1}t^{n+2}\right) \underset{❸}{=} a^{n+1} f\left(t^{n+2}\right)\end{aligned}$$

وقد استفدنا من فرْض التدريج في (1)، فالخاصّة $\mathbb{P}_{n+1}$ صحيحة. وهكذا نكون قد أثبتنا صحّة $\mathbb{P}_n$ أيّاً كانت قيمة n.

❺ لنفترض أنّ a و b هما عددان طبيعيّان موجبان تماماً يُحقّقان $a^n \mid b^{n+1}$ أيّاً كانت قيمة n. عندئذ لا بُدّ أن يكون العدد b مُضاعفاً للعدد a. في الحقيقة، بناءً على المبرهنة الأساسيّة في الحساب، لدينا $a = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\alpha_p}$ و $b = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\beta_p}$، إذْ رمزنا $\mathcal{P}$ إلى مجموعة الأعداد الأوّليّة. وعدد الحدود غير المعدومة في كلٍّ من الجماعتين $(\alpha_p)_{p\in\mathcal{P}}$ و $(\beta_p)_{p\in\mathcal{P}}$ منتهٍ.

وعندها يُكافئ الفرْض $\forall n\in\mathbb{N},\ a^n \mid b^{n+1}$ ، أنّ

$$\forall p\in\mathcal{P},\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n\alpha_p\le(n+1)\beta_p$$

ومنه، أيّاً كان العدد الأوّلي p من $\mathcal{P}$ كان $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \alpha_p\le\left(1+\frac{1}{n}\right)\beta_p$. فإذا جعلنا n تسعى إلى اللانهاية استنتجنا أنّ $\alpha_p\le\beta_p$. ولكنّ هذا يقتضي أنّ $a\mid b$.

وهكذا نستنتج من ❹ أنّ

$$\forall t\in\mathbb{N}^*,\quad a\mid f(t)$$

❻ لنعرّف إذن $g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ بالصيغة $\forall t\in\mathbb{N}^*,\ g(t)=\dfrac{1}{a}f(t)$. عندئذ نلاحظ أنّه في حالة (s,t) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ يكون لدينا

$$\begin{aligned}a^2s(g(t))^2&=s(f(t))^2=f\left(t^2f(s)\right)\\&=f\left(at^2g(s)\right)=af\left(t^2g(s)\right)=a^2g\left(t^2g(s)\right)\end{aligned}$$

فالتابع g يُحقّق الخاصّة $(\mathcal{E})$، وإضافة إلى ذلك هو يُحقّق $g(1)=1$.

❼ بتطبيق ما أثبتناه عن f على g نستنتج أنّ

$$\forall t\in\mathbb{N}^*,\quad g\left(t^2\right)=(g(t))^2 \quad \text{و} \quad \forall s\in\mathbb{N}^*,\quad g\circ g(s)=s$$

فإذا تأمّلنا (x,y) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ وجدنا

$$\begin{aligned}(g(x)g(y))^2&=g\left(x^2\right)(g(y))^2=g\left(y^2g\circ g\left(x^2\right)\right)\\&=g\left(y^2x^2\right)=g\left((xy)^2\right)=(g(xy))^2\end{aligned}$$

إذن

$$\forall(x,y)\in\mathbb{N}^*,\quad g(xy)=g(x)g(y)$$

❽ إذا كان p عدداً أوّليّاً كان $g(p)$ أيضاً عدداً أوّليّاً، أي $g(\mathcal{P})\subset\mathcal{P}$. في الحقيقة، لنفترض أنّ $g(p)=\alpha\beta$ عندئذ نستنتج من ❼ أنّ $p=g(\alpha)g(\beta)$ ، فإمّا أن يكون $g(\alpha)=1$ ، ومن ثَمّ $\alpha=g(g(\alpha))=g(1)=1$ ، أو يكون $g(\beta)=1$ ، وهذا بدوره يقتضي أنّ $\beta=1$ ، وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $g(p)\in\mathcal{P}$ لأنّ $g(p)\ne1$.

نستنتج من كون $g(\mathcal{P})\subset\mathcal{P}$ ، ومن الخاصّة $\forall s\in\mathbb{N}^*,\ g\circ g(s)=s$ أنّ التطبيق $p\mapsto g(p)$ يُعرّف تقابلاً على مجموعة الأعداد الأوّليّة $\mathcal{P}$.

❾ لنعرّف إذن الأعداد الأوّليّة المختلفة $p = g(2)$ و $q = g(3)$ و $r = g(37)$. عندئذ بملاحظة أنّ $1998 = 2 \times 3^3 \times 37$ نستنتج أنّ

$$f(1998) = ag(1998) = ag(2)(g(3))^3 g(37) = apq^3r$$

ولكنّ الجداء pqr أكبر من جداء ضرب الأعداد الأوليّة التي تحتلّ المراتب الأولى والثانية والثالثة في الصِّغر أي $pqr \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$، ولأنّ $q \geq 2$ نستنتج أنّ

$$pq^3r \geq 4 \times 30 = 120$$

ومن ثَمّ، بملاحظة أنّ $a \geq 1$، نصل إلى المتراجحة $f(1998) \geq 120$.

وبالعكس، إذا عرّفنا $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ بالعلاقة

$$g\left(2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 37^d \cdot \prod_{p \in \mathcal{Q}} p^{\alpha_p}\right) = 3^a \cdot 2^b \cdot 37^c \cdot 5^d \cdot \prod_{p \in \mathcal{Q}} p^{\alpha_p}$$

وقد عرّفنا $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \backslash \{2, 3, 5, 37\}$. تيقّنا مباشرة أنّ g يُحقّق الخاصّة $(\mathcal{E})$ وأنّه يُحقّق $g(1998) = 120$. فالعدد 120 هو أصغر قيمة يمكن أن يأخذها تابعٌ يُحقّق الخاصّة $(\mathcal{E})$. وهي النتيجة المطلوبة. ■

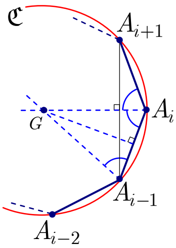
① **أوجد جميع المجموعات المنتهية $\mathcal{P}$ من نقاط المستوي، المؤلّفة من ثلاثة عناصر على الأقلّ، ويكون محور أي قطعة مستقيمة طرفاها من $\mathcal{P}$ محور تناظر لكامل المجموعة $\mathcal{P}$.**

لنتأمّل مجموعة منتهية $\mathcal{P}$ من نقاط المستوي، عددُ عناصرها n أكبر أو يساوي 3، ولنفترض أنّها تُحقّق الخاصّة المنصوص عليها في المسألة.

لتكن النقطة G مركز ثقل المجموعة $\mathcal{P}$. أي النقطة الوحيدة من المستوي التي تُحقّق

$$\sum_{M\in\mathcal{P}} \overrightarrow{GM} = 0$$

- إنّ محور أيِّ قطعة مستقيمة طرفاها من $\mathcal{P}$، هو محور تناظر للمجموعة $\mathcal{P}$، وهو من ثَمّ يحوي النقطة G.
- لتكن M_0 نقطة من $\mathcal{P}$. ولنضع $R = GM_0$. لمّا كانت G تقع على محور القطعة المستقيمة $[MM_0]$ مع M من $\mathcal{P}$ استنتجنا أنّ $\forall M \in \mathcal{P}, GM = R$. فنقاط المجموعة $\mathcal{P}$ تقع على الدائرة $\mathfrak{C}$ التي مركزها G ونصف قطرها R.
- يمكننا إذن أن نسمّي $(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1})$ نقاط المجموعة $\mathcal{P}$، مرتّبة على محيط $\mathfrak{C}$ بالاتجاه الموجب،(عكس اتّجاه عقارب الساعة)، كما سنكتب A_i دلالة على $A_{i \bmod n}$ في حالة $i \geq n$.



النقطة A_i هي النقطة الوحيدة من $\mathcal{P}$ التي تقع داخل القوس المُقابل للزاوية الموجّهة $(\overrightarrow{GA_{i-1}}, \overrightarrow{GA_{i+1}})$، ولكنّ هذا القوس يحوي أيضاً A_i' نظيرة A_i بالنسبة إلى محور القطعة المستقيمة $[A_{i-1}, A_{i+1}]$. إذن يجب أن يكون $A_i = A_i'$. أي يجب أن تقع A_i على محور القطعة المستقيمة $[A_{i-1}, A_{i+1}]$. ومنه $A_{i-1}A_i = A_iA_{i+1}$ وكذلك

$$(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \overrightarrow{A_iG}) = (\overrightarrow{A_iG}, \overrightarrow{A_iA_{i-1}}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \overrightarrow{A_iA_{i-1}})$$

ولأنّ G تقع على محور $[A_{i-1}A_i]$، استنتجنا

$$(\overrightarrow{A_{i-1}A_i}, \overrightarrow{A_{i-1}G},) = (\overrightarrow{A_iG}, \overrightarrow{A_iA_{i-1}})$$

وإذا طبّقنا النتيجة السابقة على A_{i-1} بدلاً من A_i استنتجنا مما سبق أنّ

$$(\overrightarrow{A_{i-1}A_i}, \overrightarrow{A_{i-1}G}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_{i-1}A_i}, \overrightarrow{A_{i-1}A_{i-2}})$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّه، أياً كانت i، كان

$$A_{i-1}A_i = A_iA_{i+1} \quad \text{و} \quad (\overrightarrow{A_{i-1}A_i}, \overrightarrow{A_{i-1}A_{i-2}}) = (\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \overrightarrow{A_iA_{i-1}})$$

وهذا يبرهن على أنّ المضلّع $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ مضلّعٌ منتظم ذو n ضلعاً. فالمجموعة $\mathcal{P}$ هي رؤوس مضلّعٍ منتظمٍ. وبالعكس، نرى مباشرة أنّ رؤوس أي مضلّعٍ منتظم تُحقق الخاصّة المنصوص عنها في المسألة.

وعليه تُحقّق مجموعة منتهية $\mathcal{P}$ من نقاط المستوي، خاصّة كون محور أي قطعة مستقيمة، طرفاها نقطتان من $\mathcal{P}$، محور تناظرٍ لكامل $\mathcal{P}$ إذا وفقط إذا كانت مؤلّفة من رؤوس مضلّعٍ منتظم. ■

② ليكن n عدداً طبيعيّاً أكبر تماماً من 1. أوجد أصغر عددٍ C يُحقّق

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \qquad \sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j\left(x_i^2 + x_j^2\right) \le C\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^4$$

وبيِّن متى تتحقّق المساواة.

بالاستفادة من المتراجحة $(a+b)^2 \ge 4ab$ يمكن أن نكتب

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^4 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j\right)^2 \ge 8\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\cdot\left(\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j\right)$$

ومن ثَمّ

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^4 \ge 8\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \ge 8\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j\left(x_i^2 + x_j^2\right)$$

- إذا كان هناك ثلاثة حدودٍ موجبة تماماً x_p و x_q و x_r مع $p<q<r$، كان

$$x_px_q\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \ge x_px_q\left(x_p^2 + x_q^2 + x_r^2\right) > x_px_q\left(x_p^2 + x_q^2\right)$$

ومن ثَمّ

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^4 > 8\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j\left(x_i^2 + x_j^2\right)$$

▫ إذا كان x_p و x_q عددان موجبان تماماً ومختلفان، وكان $x_k = 0$ في حالة k مختلفة عن p و q، وجدنا

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j\right)^2 - 8\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\cdot\left(\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j\right) = \left(x_p - x_q\right)^4$$

ومن ثَمّ

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^4 > 8\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j\left(x_i^2 + x_j^2\right)$$

نستنتج ممّا سبق أنّ

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j\left(x_i^2 + x_j^2\right) \le \frac{1}{8}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^4$$

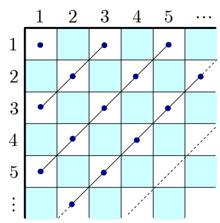
وذلك أيّاً كان $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ من $\left(\mathbb{R}_+\right)^n$، وتحدث المساواة في حالة

$$\left(x_1,\ldots,x_n\right) \in \left\{\lambda\left(e_i + e_j\right) : 1 \le i < j \le n, \lambda \in \mathbb{R}_+\right\}$$

إذ رمزنا $\left(e_i\right)_{1\le i\le n}$ إلى الأساس القانوني في $\mathbb{R}^n$. ■

③ نتأمّل رقعة شطرنج مربّعة الشكل بُعداها $n \times n$ و n عددٌ زوجي. نقول عن مربّعين على الرقعة إنّهما متجاوران إذا اشتركا بضلع وكانا مختلفين. نرغب بوضع علامات على هذه المربّعات بأسلوبٍ يكون فيه كلُّ مربّعٍ في الرقعة مجاوراً لأحد المربّعات المُعلّمة. أوجد أصغر عددٍ من العلامات يمكن وضعها على الرقعة لتتحقّق الخاصّة المطلوبة.

سنطابق بين المربّعات والثنائيّات (i,j) من $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$، وسنفترض أنّ مربّعات الرقعة ملوّنة بالتناوب كما في رقعة الشطرنج المربّع $(1,1)$ أبيض. وسنرمز $\left(W_k\right)_{1\le k\le n}$ إلى أقطار الرقعة المكوّنة من مربّعات بيضاء اللّون، والمعرّفة كما يلي :



$$W_k = \{(i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n : i + j = 2k\}$$

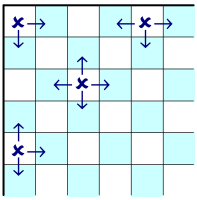
فإذا وضعنا $n = 2m$، كان لدينا في حالة $1 \le k \le m$:

$$W_k = \{(i, 2k - i) : i \in \{1,2,\ldots,2k\}\}$$

أمّا في حالة $m < k \le 2m$، فنجد

$$W_k = \{(i, 2k - i) : i \in \{2(k - m),\ldots,2m\}\}$$

وأخيراً سنقول عن مربّع من الرقعة إنّه **مأخوذٌ** إذا كان مُجاوراً لمربّع عليه علامة. سنسعى أوّلاً إلى أخذ جميع المربّعات السوداء بوضع علامات في المربّعات البيضاء.



▫ لنبدأ بوضع علامات على المربّعات البيضاء، بأسلوب نضمن فيه أن تصبح جميع المربّعات السوداء مأخوذة. إذا بدأنا بوضع علامة في المربّع الأبيض الوحيد من القطر W_1 أخذنا قطراً أسودَ فيه مربّعان. وأيُّ علامة نضعها في القطر الأبيض W_2 تأخذ مربّعات سوداء مأخوذة سابقاً. لذلك لا نضع علامات في هذا القطر الأبيض المكوّن من ثلاثة مربّعات، بل ننتقل إلى القطر الأبيض التالي أي W_3، ونضع عليه علامات بدءاً من محيط الرقعة وبالتناوب لنأخذ القطرين الأسودين الثاني والثالث.

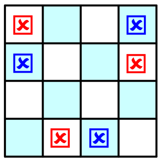
▫ ونتابع بالأسلوب نفسه، فلا نضع علامات على الأقطار البيضاء ذات الأدلّة الزوجيّة أي $(W_{2k})_{1\le k\le m}$، بل نضع علامات على الأقطار البيضاء ذات الأدلّة الفرديّة أي $(W_{2k-1})_{1\le k\le m}$، ولكن ليس على جميع مربّعات هذه الأقطار بل بالتناوب بدءاً من محيط الرقعة. وعند الانتهاء من ذلك نضمن أن تكون جميع المربعات السوداء على الرقعة مأخوذة.

▫ أمّا عدد العلامات التي نكون بذلك قد وضعناها على مربّعات القطر W_{2k-1} فيساوي $2k-1$ مربّعاً في حالة $1\le k\le \frac{m+1}{2}$، ويساوي $2(m-k+1)$ في حالة $\frac{m+1}{2}<k\le m$. وعليه يكون عدد العلامات الموضوعة على المربّعات البيضاء بهذا الأسلوب، والذي سنرمز إليه w، مساوياً

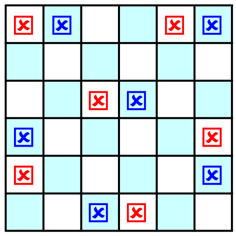
$$\begin{aligned} w &= \sum_{1\le k\le (m+1)/2} (2k-1) + \sum_{(m+1)/2<k\le m} 2(m-k+1) \\ &= \sum_{\substack{1\le k\le m \\ k \text{ فردي}}} k + \sum_{\substack{1\le k\le m \\ k \text{ زوجي}}} k = \sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2} \end{aligned}$$

وهكذا نرى أنّه يكفي وضع $\frac{m(m+1)}{2}$ علامة على المربّعات البيضاء لأخذ جميع المربّعات السوداء على الرقعة.

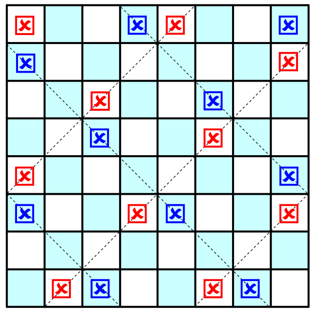
▫ وإذا طبّقنا الأسلوب نفسه ووضعنا علامات على المربّعات السوداء بهدف أخذ جميع المربّعات البيضاء، استنتجنا أنّه بالإمكان أَخْذُ جميع مربّعات الرقعة بوضع $m(m+1)$ علامة. كما في الأشكال التالية :



$n=4$



$n=6$



$n=8$

▫ وبالعكس، لنبيِّن أنّ $m(m+1)$ هو أصغر عددٍ من العلامات يمكن وضعها على الرقعة بهدف أخذ جميع مربّعاتها. لتحقيق ذلك يكفي أن نبيِّن أنّ $\frac{m(m+1)}{2}$ هو أصغر عددٍ من العلامات يمكن وضعها على المربّعات السوداء بهدف أخذ جميع المربّعات البيضاء.

في حالة $1 \leq k \leq m$، نعرّف $\mathcal{B}_k$ مجموعة المربّعات السوداء التي عليها علامات والتي تُجاور القطر W_{2k-1}. كلُّ واحدٍ من مربّعات هذه المجموعة يُجاور مربّعين على الأكثر من مربّعات هذا القطر، إذن $2\,\mathrm{card}(\mathcal{B}_k) \geq \mathrm{card}(W_{2k-1})$، ومن ثَمّ

$$\mathrm{card}(\mathcal{B}_k) \geq \left\lceil \frac{\mathrm{card}(W_{2k-1})}{2} \right\rceil$$

ولكنّ المجموعات $(\mathcal{B}_k)_{1\leq k\leq m}$ منفصلة مثنى مثنى، ومن ثَمّ يُحقّق العدد الكلّي b للعلامات السوداء على الرقعة ما يلي :

$$\begin{aligned} b &= \sum_{k=1}^{m} \mathrm{card}(\mathcal{B}_k) \geq \sum_{k=1}^{m} \left\lceil \frac{\mathrm{card}(W_{2k-1})}{2} \right\rceil \\ &\geq \sum_{1\leq k\leq \frac{m+1}{2}} (2k-1) + \sum_{\frac{m+1}{2}<k\leq m} 2(m-k+1) = \frac{m(m+1)}{2} \end{aligned}$$

وهي النتيجة المرجوّة. إذن أصغر عددٍ من العلامات يمكن وضعها على الرقعة بهدف أخذ جميع مربّعاتها يساوي $m(m+1) = n(n+2)/4$، وبذا يكتمل الحلّ.

④ **أوجد جميع الأزواج (n,p) من الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً التي الشروط التالية :**

❶ **العدد** p **عددٌ أوّلي.**

❷ $n \leq 2p$.

❸ **العدد** n^{p-1} **يقسم** $(p-1)^n+1$.

- من الواضح أنّ الأزواج $(1,p)$، حيث p عددٌ أوّليّ، هي حلولٌ تافهة للمسألة.
- وفي حالة $p=2$ ، نستنتج من الشرط ❸ أنّ $2\mid n$ ، ومنه الحلّ $(2,2)$ للمسألة المطروحة.
- سنفترض فيما يلي أنّ $n>1$ و $p>2$. عندئذ نستنتج من ❸ أنّ n عددٌ فردي. نتأمّل إذن العدد q أصغر عددٍ أوّلي يقسم n عندئذ يكون $-1 \neq 1 \bmod q$. واستناداً إلى الفرْض تكون المجموعة $\{m\in\mathbb{N}^*:(p-1)^m=-1 \bmod q\}$ غير خالية، إذ تنتمي n إليها، نعرّف إذن

$$\beta=\min\left\{k\in\mathbb{N}^*:(p-1)^k=-1 \bmod q\right\}$$

كما نستنتج من المساواة $(p-1)^n=-1 \bmod q$ أنّ $\gcd(p-1,q)=1$ ، فنعرّف α بأنّها رتبة العدد $p-1$ في الزمرة $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. أي

$$\alpha=\min\left\{k\in\mathbb{N}^*:(p-1)^k=1 \bmod q\right\}$$

مع $\alpha\leq q-1$. نُجري الآن قسمة إقليديّة للعدد n على α فنجد عددين m و r يُحقّقان

$$n=m\alpha+r \quad \text{و} \quad 0\leq r<\alpha$$

عندئذ نجد في $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ أنّ

$$-1\equiv(p-1)^n\equiv((p-1)^\alpha)^m(p-1)^r\equiv(p-1)^r \bmod q$$

وهذا يقتضي أنّ $\beta\leq r<\alpha$ ، لأنّ $r\neq 0$. ومن جديد، نُجري قسمة إقليديّة للعدد n على β فنجد عددين k و ℓ يُحقّقان

$$n=k\beta+\ell \quad \text{و} \quad 0\leq \ell<\beta$$

عندئذ نجد في $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ أنّ

$$-1\equiv(p-1)^n\equiv\left((p-1)^\beta\right)^k(p-1)^\ell\equiv(-1)^k(p-1)^\ell \bmod q$$

ولكن في حالة k زوجي، يقتضي هذا أنّ $\ell=0$ لأنّ $\ell<\beta$ ، وفي حالة k فردي، يقتضي هذا أيضاً أنّ $\ell=0$ لأنّ $\ell<\alpha$. ومنه نستنتج أنّ $n=k\beta$.

ولكن $1 - q \leq \alpha < \beta$، و q هو أصغر عددٍ أوَّلي يقسم n فحتّى يقسم β العدد n يجب أن يكون $\beta = 1$ ، وهذا يعني أنّ $p \mid q$. ولكنّ العددين p و q عددان أوّليّان، إذن $p = q$.

نستنتج مما سبق أنّ $n = \lambda p$. ولأنّ العددَ n عددٌ فردي، لا يمكن أن يكون $\lambda \geq 3$ ، لأنّ هذا يقتضي $n \geq 3p$ ويتناقض مع الفرْض ❷، إذن $n = p$.

ولكن

$$\begin{aligned}(p-1)^p + 1 &= 1 + \sum_{k=0}^{p} C_p^k p^k (-1)^{p-k} \\ &= 1 + (-1)^p + (-1)^{p-1} p^2 + \sum_{k=2}^{p} C_p^k p^k (-1)^{p-k}\end{aligned}$$

ولأنّ $p \mid C_p^k$ في حالة $1 \leq k < p$، و p عددٌ أوّلي فردي، نستنتج أنّ

$$(p-1)^p + 1 = p^2 \bmod p^3$$

ومن ثَمّ

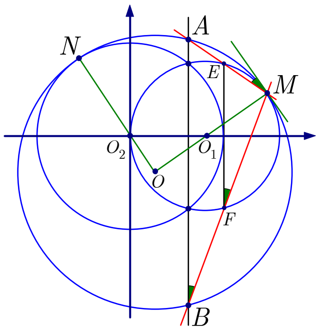
$$p^2 \mid (1 + (p-1)^p) \quad \text{و} \quad p^3 \nmid (1 + (p-1)^p)$$

فالشرط ❸ الذي ينصّ على أنّ $p^{p-1} \mid (1 + (p-1)^p)$ يقتضي أنّ $p - 1 \leq 2$ أو $p = 3$ لأنّ p عددٌ أوّليّ فردي. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $(n, p) = (3, 3)$ هو الزوج الوحيد الذي يُحقّق الشروط المطلوبة في حالة $p \geq 3$ و $n > 1$. إذن مجموعة الأزواج (n, p) التي تُحقّق الشروط ❶ و ❷ و ❸ هي

$$\{(1, p) : p \in \mathcal{P}\} \cup \{(2, 2), (3, 3)\}$$

حيث $\mathcal{P}$ هي مجموعة الأعداد الأوّليّة. ■

⑤ تقع الدائرتان $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ داخل الدائرة $\mathfrak{C}$ ، وتمسّانها عند النقطتين M و N بالترتيب. نفترض أنّ الدائرة $\mathfrak{C}_1$ تمر بمركز الدائرة $\mathfrak{C}_2$. يقطع الوتر المشترك للدائرتين $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ ، عند تمديده، الدائرة $\mathfrak{C}$ في A و B . ويلاقي المستقيمان (AM) و (BM) الدائرة $\mathfrak{C}_1$ ثانية في E و F بالترتيب. أثبت أنّ المستقيم (EF) يمس الدائرة $\mathfrak{C}_2$.



لنرمز O_1 و O_2 و O إلى مراكز الدوائر $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ و $\mathfrak{C}$، و r_1 و r_2 و r إلى أقطارها بالترتيب.

الزاوية التي يصنعها المماس المشترك للدائرتين $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}$ في M مع المستقيم MA تحصر من الدائرة $\mathfrak{C}_1$ القوس $\widehat{ME}$ فقياسها يساوي $\widehat{MFE}$، وهي تحصر أيضاً من الدائرة $\mathfrak{C}$ القوس $\widehat{MA}$ فقياسها يساوي $\widehat{MBA}$. إذن

$$\widehat{MFE} = \widehat{MBA}$$

فالمستقيمان (AB) و (EF) متوازيان وعموديّان على خطّ المركزين (O_1O_2). المثلّث MEF هو صورة المثلّث MAB وفق التحاكي الذي مركزه M ونسبته تساوي نسبة نصفَي قطرَي الدائرتين المارّتين برؤوس هذين المثلّثين أي r_1/r. تؤول المسألة إلى إثبات أنّ بُعد O_2 عن مسقط E على المستقيم (O_1O_2) يساوي r_2.

لننسب إذن الشكل إلى جملة متعامدة نظاميّة مبدؤها O_2، ومحور فواصلها المستقيم الموجّه بالشعاع $\overrightarrow{O_2O_1}$، فيكون $O_2(0,0)$ و $O_1(r_1,0)$.

- لنفترض أنّ (x_A, y_A) هي إحداثيّات النقطة A، عندئذ نستنتج من تَساوي قوّتي A بالنسبة إلى الدائرتين $\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ أنّ $(O_1A)^2 - r_1^2 = (O_2A)^2 - r_2^2$، أو

$$(x_A - r_1)^2 + y_A^2 - r_1^2 = x_A^2 + y_A^2 - r_2^2$$

وهذا يكافئ أنّ

$$x_A = \frac{r_2^2}{2r_1} \qquad (1)$$

- ولمّا كان $\overrightarrow{ME} = \frac{r_1}{r}\overrightarrow{MA}$، فإذا افترضنا أنّ (x_M, y_M) و (x_E, y_E) هي بالترتيب إحداثيّات النقطتين M و E، استنتجنا أنّ

$$x_E = x_M + \frac{r_1}{r}(x_A - x_M) = \frac{r - r_1}{r}x_M + \frac{r_1}{r}x_A$$

وإذا استفدنا من (1) وجدنا

$$x_E = \frac{r - r_1}{r}x_M + \frac{r_2^2}{2r} \qquad (2)$$

علينا إذن تعيين x_M.

▫ لنفترض أنّ (x_O, y_O) هي إحداثيّات النقطة O. عندئذ

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_2M} &= \overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_2O_1} + r_1\frac{\overrightarrow{O_1M}}{O_1M}\\ &= \overrightarrow{O_2O_1} + r_1\frac{\overrightarrow{OO_1}}{OO_1} = \overrightarrow{O_2O_1} + \frac{r_1}{r-r_1}\overrightarrow{OO_1}\end{aligned}$$

وبإسقاط هذه المساواة على محور الفواصل نجد

$$x_M = r_1 + \frac{r_1}{r-r_1}(r_1 - x_O) = \frac{r_1(r-x_O)}{r-r_1}$$

فإذا استفدنا من (2) وجدنا

$$x_E = \frac{2r_1(r-x_O)+r_2^2}{2r} \qquad (3)$$

▫ ولكن نعلم، من جهة أخرى، أنّ $O_2O = r - r_2$ و $O_1O = r - r_1$ إذن

$$(x_O - r_1)^2 + y_O^2 = (r-r_1)^2 \quad \text{و} \quad x_O^2 + y_O^2 = (r-r_2)^2$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\begin{aligned}2r_1x_O &= x_O^2 + y_O^2 + r_1^2 - (r-r_1)^2\\ &= (r-r_2)^2 + r_1^2 - (r-r_1)^2\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}2r_1(x_O - r) &= (r-r_2)^2 + r_1^2 - (r-r_1)^2 - 2rr_1\\ &= (r-r_2)^2 - r^2 = r_2^2 - 2rr_2\end{aligned}$$

وأخيراً نجد $2r_1(r-x_O) + r_2^2 = 2rr_2$، فإذا عُدنا إلى العلاقة (3) استنتجنا أنّ $x_E = r_2$. وهذا يعني أنّ المستقيم (EF) يبعد عن O_2، مركز الدائرة $\mathfrak{C}_2$، مسافة تساوي نصف قطر هذه الدائرة، فهو إذن مماسٌّ لهذه الدائرة. وبذا يتمّ الإثبات. ◼

⑥ لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقيّة. يُطلبُ تعيين جميع التوابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ التي تُحقّق العلاقة التابعيّة :

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1 \qquad (\mathcal{E})$$

وذلك أيّاً كان العددان الحقيقيّان x و y.

لنتأمّل تابعاً f يُحقّق العلاقة التابعيّة $(\mathcal{E})$.

- إذا كان $f(0)=0$ استنتجنا من $(\mathcal{E})$ بعد تعويض $x=y=0$ أنّ $0=-1$ وهذا خُلفٌ واضحٌ. ومنه نستنتج أنّ $\lambda=f(0)\neq 0$.
- في حالة y من $\mathbb{R}$، نختار $x=f(y)$ ونعوّض في $(\mathcal{E})$، فنجد

$$\lambda=f(0)=2f(f(y))+(f(y))^2-1$$

ومنه

$$\forall y\in\mathbb{R},\quad f(f(y))=\frac{\lambda+1}{2}-\frac{1}{2}(f(y))^2 \qquad (1)$$

- وفي حالة (α,β) من $\mathbb{R}^2$، نختار $x=f(\alpha)$ و $y=\beta$ في $(\mathcal{E})$، فنجد

$$f(f(\alpha)-f(\beta))=f(f(\beta))+f(\alpha)f(\beta)+f(f(\alpha))-1$$

ثُمّ نستفيد من (1) في حساب $f(f(\alpha))$ و $f(f(\beta))$ لنجد

$$\begin{aligned} f(f(\alpha)-f(\beta)) &= \lambda-\frac{1}{2}(f(\beta))^2+f(\alpha)f(\beta)-\frac{1}{2}(f(\alpha))^2\\ &=\lambda-\frac{1}{2}(f(\alpha)-f(\beta))^2\end{aligned}$$

ومنه

$$(2)\ \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\quad f(f(\alpha)-f(\beta))=\lambda-\frac{1}{2}(f(\alpha)-f(\beta))^2$$

- وبتعويض $y=0$ في $(\mathcal{E})$ نجد

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x-\lambda)=f(\lambda)+\lambda x+f(x)-1$$

ومنه، في حالة z من $\mathbb{R}$، نعرّف $x_z=\frac{z+1-f(\lambda)}{\lambda}$ فيكون $z=f(x_z-\lambda)-f(x_z)$، وبالاعتماد على (2) نستنتج

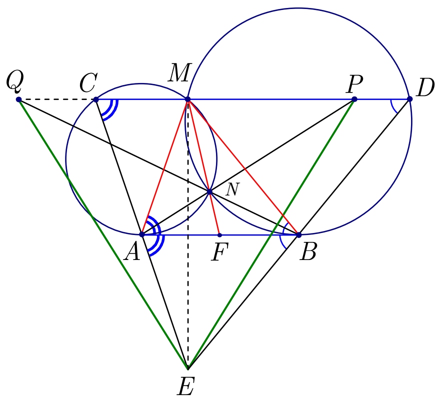
$$f(z)=f(f(x_z-\lambda)-f(x_z))=\lambda-\frac{(f(x_z-\lambda)-f(x_z))^2}{2}=\lambda-\frac{z^2}{2}$$

وبتطبيق هذه النتيجة على $z=\lambda$، والاستفادة من (1)، نجد

$$\lambda-\frac{\lambda^2}{2}=f(f(0))=\frac{1+\lambda}{2}-\frac{\lambda^2}{2}$$

أي $\lambda=1$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $f(z)=1-\frac{z^2}{2}$ وذلك مهما كانت قيمة z من $\mathbb{R}$. وبالعكس، نتيقّن مباشرة أنّ هذا التابع يُحقّق $(\mathcal{E})$ فهو الحل الوحيد للمسألة. ■

① **المستقيم (AB) هو مماسٌ مشترك للدائرتين المرسومتين على الرباعيّين $CANM$ و $MNBD$. النقطة M تقع بين C و D على المستقيم (CD)، والمستقيمان (AB) و (CD) متوازيان. يتلاقى المستقيمان (NA) و (CM) في P، ويتلاقى المستقيمان (NB) و (MD) في Q، وأخيراً يتلاقى المستقيمان (CA) و (DB) في E. أثبت أنّ الطولين PE و QE متساويان.**



لمّا كان (AB) يوازي (CD) استنتجنا أنّ

$$\widehat{EBA} = \widehat{BDM}$$

ومن جهة ثانية، لأنّ $\widehat{ABM}$ زاوية مماسيّة تحصر القوس $\widehat{MB}$ المقابل للزاوية المحيطيّة $\widehat{BDM}$ استنتجنا أنّ $\widehat{BDM} = \widehat{ABM}$، إذن

$$\widehat{EBA} = \widehat{ABM}$$

ونبرهن بأسلوبٍ مماثل أنّ

$$\widehat{EAB} = \widehat{BAM}$$

فالمثلّثان ABE و ABM طبوقان، وعلى وجه الخصوص $EB = MB$ و $EA = MA$.

نستنتج إذن أنّ (AB) هو محور القطعة المستقيمة $[EM]$، ومنه $(CD) \perp (EM)$.

يقطع المحورُ الأساسي (MN) للدائرتين المستقيمَ (AB) في F. وعندها، من كون (FA) مماسّاً للدائرة $CANM$، نستنتج أنّ $FA^2 = FN \cdot FM$، وكذلك، من كون (FB) مماسّاً للدائرة $MNBD$، نستنتج أنّ $FB^2 = FN \cdot FM$. إذن $FA = FB$.

بتطبيق مبرهنة تالس على المستقيمين المتوازيين (AB) و (CD) وعلى القواطع (AP) و (FM) و (BQ) نستنتج أنّ

$$\frac{AF}{PM} = \frac{NF}{NM} = \frac{BF}{QM}$$

ومنه $PM = QM$. ولكنّ هذا، بالإضافة إلى الخاصّة $(PQ) \perp (EM)$، يعني أنّ (EM) هو محور القطعة $[PQ]$، ومن ثَمّ $PE = QE$. وبذا يكتمل الإثبات. ■

② **نتأمّل ثلاثة أعداد حقيقيّة موجبة A و B و C جداء ضربها يساوي 1. أثبت أنّ**

$$\left(A-1+\frac{1}{B}\right)\left(B-1+\frac{1}{C}\right)\left(C-1+\frac{1}{A}\right)\leq 1$$

لنعرّف الأعداد α و β و γ كما يلي :

$$\gamma=C-1+\frac{1}{A} \quad \text{و} \quad \beta=B-1+\frac{1}{C} \quad \text{و} \quad \alpha=A-1+\frac{1}{B}$$

عندئذ نلاحظ مباشرة أنّ

$$\alpha+\beta=A+\frac{1}{C}+\left(\sqrt{B}-\frac{1}{\sqrt{B}}\right)^2\geq A+\frac{1}{C}>0$$

وبالمماثلة نجد أيضاً أنّ

$$\gamma+\alpha>0 \quad \text{و} \quad \beta+\gamma>0$$

إذن، من بين الأعداد α و β و γ هناك عددٌ واحدٌ سالبٌ على الأكثر.

- فإذا كان أحد الأعداد α أو β أو γ سالباً كان العددان الآخران موجبين، ونتج من ذلك أنّ جداء ضربهم سالبٌ، فتتحقّق المتراجحة $\alpha\beta\gamma\leq 1$ وضوحاً.
- لنفترض إذن أنّ الأعداد α و β و γ موجبة. ولنلاحظ ما يلي :

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=\cancel{AB}-B+1-\cancel{A}+1-\frac{1}{B}+\frac{A}{C}-\cancel{\frac{1}{C}}+\cancel{\frac{1}{BC}}\\&=\frac{A}{C}-\left(B+\frac{1}{B}-2\right)\\&=\frac{A}{C}-\left(\sqrt{B}-\frac{1}{\sqrt{B}}\right)^2\leq\frac{A}{C}\end{aligned}$$

ونجدُ بالمماثلة أنّ

$$\gamma\alpha\leq\frac{C}{B} \quad \text{و} \quad \beta\gamma\leq\frac{B}{A}$$

ولأنّ الأعداد الواردة في المتراجحات الثلاث السابقة موجبة، نستنتج بحساب جداء ضربها طرفاً بطرف أنّ $(\alpha\beta\gamma)^2\leq 1$، وهذا يقتضي أنّ $\alpha\beta\gamma\leq 1$ في هذه الحالة أيضاً.

وبذا يكتمل إثبات المتراجحة. ■

③ **في هذه المسألة، العدد k هو عددٌ حقيقي موجبٌ تماماً، والعدد n هو عددٌ طبيعي أكبر أو يساوي 2. نتأمّل عدداً n من النقاط الواقعة على مستقيم، ونفترض أنها ليست جميعها منطبقة. يمكن إخضاع هذه النقاط إلى « نقلات ». إذْ تُجرى النقلةُ كما يلي : نختار نقطتين غير منطبقتين، ولنفترض أنّهما A و B، مع A إلى يمين B، ثُمّ نستبدل بالنقطة B نقطة B' تقع إلى يمين A وتُحقّق $AB' = kBA$. ما هي قيم k التي تتيح لنا نقل النقاط إلى اليمين بالمسافة التي نشاء وذلك بتطبيق نقلات متتابعة ؟**

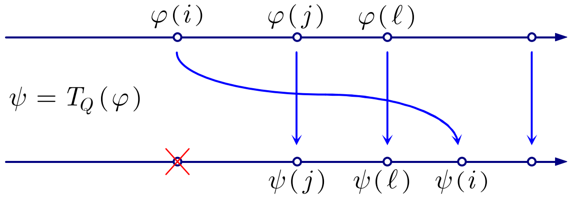
قد يكون من المناسب المُطابقة بين المستقيم المُشار إليه ومحور الأعداد الحقيقيّة. وللتعامل مع النقاط التي يمكن أن "تنطبق على بعضها" من المفيد أن نعيد صياغة المسألة بالأسلوب الآتي.

- الأشياء التي نتعامل معها هي مجموعة التطبيقات الحقيقيّة $\varphi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{R}$ التي تُحقّق $\operatorname{card}(\operatorname{Im}\varphi) \geq 2$. سنرمز بالرمز $\mathcal{F}$ إلى مجموعة هذه التطبيقات.

- لتكن $\mathcal{P}_2^{(n)}$ مجموعة أجزاء $\mathbb{N}_n$ المؤلّفة من عنصرين. في حالة مجموعة Q من $\mathcal{P}_2^{(n)}$، و φ من $\mathcal{F}$ نعرّف $T_Q(\varphi)$ من $\mathcal{F}$ كما يلي :
  - إذا كان $\operatorname{card}(\varphi(Q)) = 1$ وضعنا $T_Q(\varphi) = \varphi$.
  - أمّا إذا كان $\operatorname{card}(\varphi(Q)) = 2$ أسمينا i العنصر من Q الذي صورته هي أصغر العددين في $\varphi(Q)$ وأسمينا j ذلك العنصر من Q الذي صورته هي أكبر العددين في $\varphi(Q)$. عندئذ يكون لدينا $Q = \{i, j\}$ مع $\varphi(i) < \varphi(j)$. وعندها نعرّف التطبيق $T_Q(\varphi)$ بوضع $\psi = T_Q(\varphi)$ بوضع $\psi(\ell) = \varphi(\ell)$ في حالة $i \neq \ell$، ووضع

$$\psi(i) = \varphi(j) + k(\varphi(j) - \varphi(i))$$

وذلك كما هو موضّح في الشكل التالي.



ثُمّ نعرّف مجموعة النقلات بأنّها المجموعة

$$\mathcal{T} = \left\{ T_Q : Q \in \mathcal{P}_2^{(n)} \right\}$$

1. ليكن a عدداً موجباً سنعيّنه لاحقاً. ولنعرّف في حالة φ من $\mathcal{F}$، المقدارين

$$\Delta_a(\varphi) = aM(\varphi) - \sum_{\ell=1}^{n} \varphi(\ell) \quad \text{و} \quad M(\varphi) = \max_{1\le\ell\le n}(\varphi(\ell))$$

ثُمّ لنتأمّل النقلة T_Q من $\mathcal{T}$، والتطبيق φ من $\mathcal{F}$، ولنضع $\psi = T_Q(\varphi)$. إذا كان $\operatorname{card}(\varphi(Q)) = 1$ كان لدينا وضوحاً $\Delta_a(\psi) = \Delta_a(\varphi)$.

لنفترض إذن أنّ $\operatorname{card}(\varphi(Q)) = 2$، عندئذ يكون $Q = \{i,j\}$ مع $\varphi(i) < \varphi(j)$. عندها نلاحظ ما يلي.

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{n} \psi(\ell) &= \left(\sum_{\ell=1}^{n} \varphi(\ell)\right) - \varphi(i) + \varphi(j) + k(\varphi(j) - \varphi(i))\\ &= \left(\sum_{\ell=1}^{n} \varphi(\ell)\right) + (k+1)(\varphi(j) - \varphi(i))\end{aligned}$$

❶ فإذا كان $\varphi(j) + k(\varphi(j) - \varphi(i)) \le M(\varphi)$ كان $M(\psi) = M(\varphi)$ ومن ثَمّ $\Delta_a(\psi) \le \Delta_a(\varphi)$.

❷ أمّا إذا كان $\varphi(j) + k(\varphi(j) - \varphi(i)) > M(\varphi)$ كان

$$M(\psi) = \varphi(j) + k(\varphi(j) - \varphi(i))$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\Delta_a(\varphi) - \Delta_a(\psi) &= a(M(\varphi) - M(\psi)) + (k+1)(\varphi(j) - \varphi(i))\\ &= a(M(\varphi) - M(\psi)) + \frac{k+1}{k}(M(\psi) - \varphi(j))\\ &= \left(\frac{k+1}{k} - a\right)(M(\psi) - M(\varphi)) + \frac{k+1}{k}(M(\varphi) - \varphi(j))\end{aligned}$$

إذن

$$\Delta_a(\varphi) - \Delta_a(\psi) \ge \left(\frac{k+1}{k} - a\right)(M(\psi) - M(\varphi)) \tag{1}$$

مع مساواة إذا كان $\varphi(j) = M(\varphi)$.

وعلى هذا، إذا اخترنا $a = 1 + 1/k$ كان $\Delta_a(\psi) \le \Delta_a(\varphi)$. فنكون قد أثبتنا الخاصّة التالية :

$$\forall \varphi \in \mathcal{F}, \forall T \in \mathcal{T}, \quad \Delta_{1+1/k}(T(\varphi)) \le \Delta_{1+1/k}(\varphi) \tag{2}$$

2. لننطلق إذن من عنصرٍ φ_0 من $\mathcal{F}$، ولنتأمّل متتالية ما من النقلات $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{T}$، ثُمّ لنعرّف المتتالية $(\varphi_m)_{m\geq 0}$ بالعلاقة $\varphi_{m+1} = T_m(\varphi_m)$. عندئذ نستنتج من (2) أنّ

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \Delta_{1+1/k}(\varphi_{m+1}) \leq \Delta_{1+1/k}(\varphi_m)$$

وهذا يبرهن على أنّ

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \Delta_{1+1/k}(\varphi_m) \leq \Delta_{1+1/k}(\varphi_0)$$

ولكن

$$\Delta_{1+1/k}(\varphi_m) = \left(1 + \frac{1}{k} - n\right)M(\varphi_m) + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n}(M(\varphi_m) - \varphi_m(\ell))}_{>0}$$

$$\geq \left(1 + \frac{1}{k} - n\right)M(\varphi_m)$$

فإذا كان $1 + \frac{1}{k} - n > 0$، أي $k < \frac{1}{n-1}$، استنتجنا مما سبق أنّ

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad M(\varphi_m) \leq \frac{k}{1 - k(n-1)}\Delta_{1+1/k}(\varphi_0)$$

فالمتتالية $(M(\varphi_m))_{m\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأعلى، ولا يمكن لأيّ متتالية جزئيّة منها أن تسعى إلى اللانهاية.

وبذا نُثبتُ أنّه في حالة $k < \frac{1}{n-1}$ لا يمكن للنّقاط أن تبتعد إلى اليمين بأيّ قدر نشاء، وذلك مهما كانت النقلات التي نطبّقها عليها.

3. لنفترض الآنّ $k \geq \frac{1}{n-1}$، ولننطلق من عنصرٍ φ_0 من $\mathcal{F}$، ثُمّ لنتأمّل متتالية النقلات $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{T}$، والمتتالية $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{F}$، المعرّفتين تدريجيّاً كما يلي. إذا كان φ_m معرّفاً، عندئذ يوجد i_m و j_m من $\mathbb{N}_n$ يُحقّقان $\varphi_m(j_m) = M(\varphi_m)$ و $\varphi_m(i_m) = L(\varphi_m)$، مع $L(\varphi) = \min_{1\leq \ell\leq n}(\varphi(\ell))$. وعندئذ نعرّف

$$\varphi_{m+1} = T_m(\varphi_m) \quad \text{و} \quad T_m = T_{\{i_m, j_m\}}$$

عندئذ نرى أنفسنا مباشرة في حالة المساواة في المتراجحة (1) مع $a = 1 + 1/k$، أي

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \Delta_{1+1/k}(\varphi_{m+1}) = \Delta_{1+1/k}(\varphi_m)$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \Delta_{1+1/k}(\varphi_m) = \Delta_{1+1/k}(\varphi_0)$$

ولكن

$$\Delta_{1+1/k}(\varphi_0) = \left(1 - n + \frac{1}{k}\right) M(\varphi_0) + \sum_{\ell=1}^{n} (M(\varphi_0) - \varphi_0(\ell))$$

$$\Delta_{1+1/k}(\varphi_m) = \left(1 - n + \frac{1}{k}\right) M(\varphi_m) + \sum_{\ell=1}^{n} (M(\varphi_m) - \varphi_m(\ell))$$

إذن، مهما تكن m، يكن

$$\sum_{\ell=1}^{n} (M(\varphi_m) - \varphi_m(\ell)) = \sum_{\ell=1}^{n} (M(\varphi_0) - \varphi_0(\ell)) + \left(n - 1 - \frac{1}{k}\right)(M(\varphi_m) - M(\varphi_0))$$

ولكن، من الواضح أنّ $M(\varphi_m) > M(\varphi_0)$، ولأنّ $k \geq \dfrac{1}{n-1}$، إذن

$$\left(n - 1 - \frac{1}{k}\right)(M(\varphi_m) - M(\varphi_0)) \geq 0$$

وهذا يبرهن على صحّة المتراجحة

$$\sum_{\ell=1}^{n} (M(\varphi_m) - \varphi_m(\ell)) \geq \sum_{\ell=1}^{n} (M(\varphi_0) - \varphi_0(\ell))$$

ومنه

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad n(M(\varphi_m) - L(\varphi_m)) \geq M(\varphi_0) - L(\varphi_0)$$

أو

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad M(\varphi_m) \geq L(\varphi_m) + \frac{M(\varphi_0) - L(\varphi_0)}{n} \qquad (3)$$

ولكن، من الواضح أنّه بعد تطبيق n نقلة على φ_m، تصبح جميع النقاط التي كان يمثّلها φ_m أكبر من $M(\varphi_m)$، وهذا ما تعبّر عنه المتراجحة $L(\varphi_{m+n}) \geq M(\varphi_m)$ في حالة m من $\mathbb{N}$, فإذا استفدنا من ذلك في (3) استنتجنا أنّ

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad L(\varphi_{m+n}) \geq L(\varphi_m) + \frac{M(\varphi_0) - L(\varphi_0)}{n}$$

ومنه

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad L(\varphi_{(\ell+1)n}) \geq L(\varphi_{\ell n}) + \frac{M(\varphi_0) - L(\varphi_0)}{n}$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad L(\varphi_{\ell n}) \geq L(\varphi_0) + \frac{\ell}{n}(M(\varphi_0) - L(\varphi_0))$$

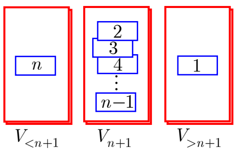
ومن ثَمّ $\lim_{\ell\to\infty} L(\varphi_{\ell n}) = +\infty$.

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ الشرط اللازم والكافي حتّى نتمكّن من إبعاد نقاط المجموعة إلى اليمين بأي قدرٍ نشاء وذلك بإجراء عددٍ كافٍ من النقلات، هو أن يكون $k \geq \frac{1}{n-1}$. وهي النتيجة المرجوّة. ■

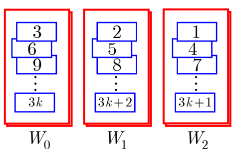
④ **نتأمّل مئةً من البطاقات المتباينة مرقّمة من 1 حتّى 100. ونفترض أنّ هذه البطاقات موزّعة في ثلاث عُلبٍ يحوي كلٌّ منها بطاقة واحدة على الأقلّ. بكم طريقة يمكن إجراء هذا التوزيع، إذا علمتَ أنّه يُحقّق الخاصّة التالية : عند اختيار أي زوجٍ من الصناديق، ثُمّ اختيار بطاقةٍ من كلِّ واحدٍ منهما، تكفي معرفة قيمة مجموع هاتين البطاقتين لتعيين الصندوق الثالث.**

لنتأمّل ثلاثة صناديق U_1 و U_2 و U_3، ولنتأمّل عدداً n من البطاقات مرقّمةً من 1 إلى n .

- نسمّي توزيعاً من النوع T_1، أيَّ توزيعٍ للبطاقات على الصناديق الثلاثة يحوي وفقه أحد الصناديق، ولنرمز إليه $V_{>n+1}$، البطاقة ذات الرقم 1 فقط، ويحوي صندوقٌ ثانٍ، ولنرمز إليه $V_{<n+1}$، البطاقة ذات الرقم n فقط، في حين يحوي الصندوق الثالث، الذي سنسمّيه V_{n+1}، بقيّة البطاقات، أي تلك التي تتراوح أرقامها من 2 حتّى $n-1$.



- ونسمّي توزيعاً من النوع T_2، أيَّ توزيعٍ للبطاقات على الصناديق الثلاثة يحوي وفقه أحد الصناديق ، وليكن W_0، البطاقات التي تقبل أرقامها القسمة على 3، ويحوي صندوقٌ ثانٍ، وليكن W_1 ، البطاقات التي باقي قسمة أرقامها على العدد 3 يساوي 2، في حين يحوي الصندوق الثالث، الذي نسمّيه W_2، بقيّة البطاقات، أي تلك التي باقي قسمة أرقامها على العدد 3 يساوي 1.



نلاحظ مباشرة أنّ كلّ توزيعٍ من أحد النوعين T_1 أو T_2 للبطاقات، يحقّق الخاصّة $\mathbb{P}$ المنصوص عنها في نصّ المسألة، أي أنّ كلّ صندوق يحوي بطاقة واحدة على الأقلّ، وعند اختيار صندوقين، ثُمّ اختيار بطاقةٍ ما من كلٍّ منهما، تكفي معرفة مجموع البطاقتين لتعيين الصندوق الثالث.

لنتأمّل، في حالة n أكبر أو يساوي 3، الخاصّة $\mathcal{P}_n$ التالية :

> " إنّ أيّ توزيع، محقّق للخاصّة $\mathbb{P}$، للبطاقات المرقّمة من 1 إلى n على الصناديق الثلاثة، هو من أحد النوعين T_1 أو T_2. "

سنبرهن على صحّة الخاصّة $\mathcal{P}_n$ بالتدريج على العدد n.

- في حالة $n = 3$، لا يمكن لأيِّ صندوقٍ أن يكون خالياً، فكلٌّ صندوقٍ يحوي بطاقة واحدة فقط، وأيُّ توزيعٍ من التوزيعات الستة الممكنة هو من النوع T_1. بالطبع، في هذه الحالة يتطابق النوعان T_1 و T_2.
- لنفترض صحّة الخاصّة $\mathcal{P}_n$، ولنتأمّل توزيعاً، يُحقّق الخاصّة $\mathbb{P}$، للبطاقات من 1 إلى $n+1$ على الصناديق الثلاثة. عندئذ نناقش الحالتين التاليتين.

❶ الصندوق B_1 الذي يحوي البطاقة $n+1$ لا يحوي بطاقات أخرى غيرها. عندئذ نسمّي B_2 الصندوق الذي يحوي البطاقة 1 ونسمّي B_3 الصندوق الثالث.

إذا كان B_2 يحوي بطاقات أخرى غير البطاقة 1، عرّفنا m بأنّه مجموع k_2، أكبر رقمٍ لبطاقة في B_2، مع k_3 أكبر رقمٍ لبطاقة في B_3. من الواضح أنّ $k_3 \geq 2$ لأنّ البطاقة رقم 1 ليست في B_3، كما إنّ $k_2 \geq 2$ لأننا افترضنا احتواء الصندوق B_2 على بطاقات غير البطاقة رقم 1. ولمّا كانت البطاقة التي تحمل الرقم n موجودة في أحد الصندوقين B_2 أو B_3 استنتجنا أنّ $\max(k_2, k_3) = n$. ومنه $m = k_2 + k_3 \geq n+2$. كما إنّه من الواضح أنّ $m \leq n + (n-1) = 2n-1$. إذن ينتمي العدد $k = m - n - 1$ إلى المجموعة $\{1, \ldots, n\}$، فالبطاقة التي تحمل الرقم k موجودة في أحد الصندوقين B_2 أو B_3. وهكذا يكون لدينا

$$m = \underbrace{k_2}_{B_2} + \underbrace{k_3}_{B_3} = \underbrace{n+1}_{B_1} + \underbrace{k}_{B_2 \vee B_3}$$

وهذا خُلفٌ إذْ لا يُحقّق هذا التوزيع للبطاقات الخاصّة $\mathbb{P}$. نستنتج من هذا التناقض أنّ الصندوق B_2 الذي يحوي البطاقة 1 لا يحوي غيرها، ومن ثَمّ يكون هذا التوزيع للبطاقات من النوع T_1.

❷ الصندوق الذي يحوي البطاقة $n+1$ يحوي بطاقات أخرى غيرها. فإذا حذفنا هذه البطاقة، حصلنا على توزيعٍ يُحقّق الخاصّة $\mathbb{P}$، للبطاقات من 1 إلى n على الصناديق الثلاثة. فهو إذن أحد التوزيعين T_1 أو T_2 وذلك استناداً إلى فرْض التدريج.

- لنفترض أنّ هذا التوزيع للبطاقات من 1 إلى n، هو من النوع T_1، وأنّ الصندوق B_1 يحوي فقط البطاقة ذات الرقم 1، والصندوق B_2 يحوي فقط البطاقة ذات الرقم n، وأخيراً أنّ الصندوق B_3 يحوي بقيّة البطاقات، أي تلك التي أرقامها بين 2 و $n-1$. عندها لا يمكن أن يُحقّق توزيع البطاقات من 1 إلى $n+1$، الخاصّة $\mathbb{P}$ في ظلّ المساواة
$$n+2=\underbrace{n+1}_{?}+\underbrace{1}_{B_1}=\underbrace{n}_{B_2}+\underbrace{2}_{B_3}$$
إلاّ إذا كانت البطاقة $n+1$ موجودة في B_1. ولكن في حالة $n \geq 4$ لدينا أيضاً
$$n+3=\underbrace{n+1}_{B_1}+\underbrace{2}_{B_3}=\underbrace{n}_{B_2}+\underbrace{3}_{B_3}$$
وهذا يناقض الخاصّة $\mathbb{P}$. أمّا في حالة $n=3$ فيكون توزيع البطاقات من 1 إلى $n+1=4$، توزيعاً من النوع T_2، على الوجه التالي :
$$B_3=\{2\} \text{ و } B_2=\{3\} \text{ و } B_1=\{1,4\}$$
- لنفترض الآن أنّ توزيع البطاقات من 1 إلى n، هو من النوع T_2، وأنّ الصندوق B_ℓ يحوي البطاقات التي باقي قسمة أرقامها على العدد 3 يساوي ℓ، لنكتب تسهيلاً $B_k=B_{k \bmod 3}$. ثُمّ لنفترض أنّ $n \bmod 3=r$. عندئذ نلاحظ أنّ
$$\underbrace{n+1}_{?}+\underbrace{r+1}_{B_{r+1}}=\underbrace{n}_{B_r}+\underbrace{r+2}_{B_{r+2}}$$
ولأنّ $\{r \bmod 3,(r+1) \bmod 3,(r+2) \bmod 3\}=\{0,1,2\}$، استنتجنا من المساواة السابقة، أنّ الإمكانيّة الوحيدة لِيُحقّق توزيع البطاقات من 1 إلى $n+1$ الخاصّة $\mathbb{P}$، هو أن تنتمي البطاقتان $n+1$ و $r+1$ إلى الصندوق B_{r+1} نفسه. وهذا يبرهن على أنّ هذا التوزيع للبطاقات هو من النوع T_2. فالخاصّة $\mathcal{P}_{n+1}$ صحيحة.

الآن، في حالة $n \geq 4$، تكون التوزيعات من النمط T_1 مختلفة عن التوزيعات من النمط T_2. وهناك ستّة طرائق لتسمية الصناديق الثلاثة في كلٍّ من هذين النمطين. فالعدد الكلّي لأساليب توزيع البطاقات من 1 إلى n على الصناديق الثلاثة، مع تحقيق الخاصّة $\mathbb{P}$، يساوي 12 في حالة $n \geq 4$. والجواب عن المسألة المطروحة في حالة $n=100$ هو 12. ويتمّ الإثبات. ■

⑤ **أيوجد عددٌ طبيعي n يقبل القسمة على ألفين من الأعداد الأوّليّة، المختلفة وفقط على ألفين منها، ويقسم في الوقت نفسه العدد $2^n + 1$ ؟ (يمكن للعدد n أن يقبل القسمة على قوّةٍ لعددٍ أوّلي).**

في الحقيقة، الجواب هو نعم. بل سنثبتُ أنّه في حالة أيِّ عددٍ طبيعي موجب تماماً معطى r، يوجد عددٌ طبيعي n_r يقسم $2^{n_r} + 1$ ويُحقّق $\operatorname{card}(\{p \in \mathcal{P} : p \mid n_r\}) = r$. وقد رمزنا $\mathcal{P}$ إلى مجموعة الأعداد الأوّليّة.

يعتمد الإثبات على عددٍ من الملاحظات، نذكرها فيما يلي :

❶ إذا كان a و m عددين طبيعيّين، وكان m فرديّاً كان $2^a + 1$ قاسماً للعدد $2^{am} + 1$.

في الحقيقة،

$$2^{am} + 1 = (2^a + 1)\left(\sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p \, 2^{a(m-1-p)}\right)$$

❷ لنعرّف $a_k = 2^{3^{k-1}} + 1$ في حالة $k \geq 1$. عندئذ توجد متتالية من الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً $(b_k)_{k\geq 1}$ تُحقّق في حالة $k \geq 1$ ما يلي :

$$a_{k+1} = 3a_k b_k \quad \text{و} \quad \gcd(3a_k, b_k) = 1$$

في الحقيقة، نلاحظ أنّ $a_1 = 3$ و $a_2 = 3^2$ و $a_3 = 3^3 \times 19$، وهذا يعرّف $b_1 = 1$ و $b_2 = 19$. لنفترض أنّنا عرّفنا الأعداد $(b_k)_{1\leq k<m}$ بأسلوب تتحقّق فيه الشروط

$$a_{k+1} = 3a_k b_k \quad \text{و} \quad \gcd(3a_k, b_k) = 1$$

في حالة $1 \leq k < m$. عندئذ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= \left(2^{3^{m-1}}\right)^3 + 1 = (a_m - 1)^3 + 1 \\ &= a_m\left(a_m^2 - 3a_m + 3\right) = a_m(3a_m a_{m-1} b_{m-1} - 3a_m + 3) \\ &= 3a_m(a_m(a_{m-1}b_{m-1} - 1) + 1) \\ &= 3a_m b_m \end{aligned}$$

وقد عرّفنا

$$b_m = a_m(a_{m-1}b_{m-1} - 1) + 1 = 3a_{m-1}b_{m-1}(a_{m-1}b_{m-1} - 1) + 1$$

ومنه نستنتج أنّ $\gcd(a_m, b_m) = 1$ وأنّ $\gcd(3, b_m) = 1$. ولأنّ العدد 3 عددٌ أوّلي نصل إلى النتيجة $\gcd(3a_m, b_m) = 1$.

وهكذا نكون قد أثبتنا بالتدريج وجود المتتالية $(b_k)_{k\geq 1}$ من $\mathbb{N}^*$ التي تُحقّق في حالة $k \geq 1$ ما يلي :

$$a_{k+1} = 3a_k b_k \quad \text{و} \quad \gcd(3a_k, b_k) = 1 \tag{1}$$

وعلى الخصوص $a_{k+1} = 3^{k+1} b_1 b_2 b_3 \cdots b_k$ في حالة $k \geq 1$. ومن جهة أخرى، بملاحظة التكافؤ $k \geq 2 \Leftrightarrow \frac{2^{3^{k-1}}+1}{3} > 1$، نستنتج من المساواة $b_m = a_m\left(\frac{a_m}{3} - 1\right) + 1$، أنّ

$$\forall m \geq 2, \quad b_m \geq a_m + 1 > 1$$

لنعرّف إذن p_m أصغر عددٍ أوّلي يقسم b_m في حالة $m \geq 2$، أي

$$p_m = \min(\{p \in \mathcal{P} : p \mid b_m\})$$

عندئذ يكون التطبيق $p_m \mapsto m$ تطبيقاً متبايناً. لأنّه، في حالة $\ell < m$، لدينا

$$a_m = 3a_{m-1}b_{m-1} = \cdots = 3^{m-\ell} a_\ell b_\ell b_{\ell+1} \cdots b_{m-1}$$

إذن $p_\ell \mid a_m$ ولأنّ $\gcd(3a_m, b_m) = 1$ نستنتج أنّ $p_\ell \nmid b_m$ ومنه $p_\ell \neq p_m$ لأنّ $p_m \mid b_m$.

كما نرى أنّ جميع الأعداد الأوّليّة $\{p_m : m \geq 2\}$ مختلفة عن 3، وهي فرديّة لأنّ الأعداد $(a_m)_{m\geq 1}$ فرديّة.

نأتي الآن إلى إثبات الخاصّة التي بدأنا بها. نستنتج مما سبق أنّ العدد $a_{r+1} = 3^{r+1} b_2 b_3 \cdots b_r$ يقبل القسمة على العدد n_r المعرّف بالصيغة

$$n_r = 3^{r+1} \prod_{2\leq k\leq r} p_r$$

وإذا عرّفنا العدد الفردي m بالمساواة $m = 3p_2p_3\cdots p_r$ استنتجنا من الخاصّة ❶ أنّ $2^{3^r} + 1$ يقسم $2^{3^r m} + 1$ أي $a_{r+1} \mid 2^{n_r} + 1$. إذن $n_r \mid 2^{n_r} + 1$ كما إنّ

$$\{p \in \mathcal{P} : p \mid n_r\} = \{3\} \cup \{p_m : 2 \leq m \leq r\}$$

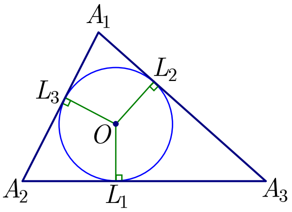
ومنه

$$\operatorname{card}(\{p \in \mathcal{P} : p \mid n_r\}) = r$$

وهكذا نرى أنّ العدد n_{2000} يُحقّق الخاصّة المرجوّة. ■

⑥ **نتأمّل مثلّثاً حادّ الزوايا $A_1A_2A_3$. نسمّي K_i موقع الارتفاع النازل من الرأس A_i على الضلع المقابل، كما نسمي L_i نقطة تماس الدائرة $\mathfrak{C}$ الماسّة لأضلاع هذا المثلّث داخلاً مع الضلع المقابل للرأس A_i . ليكن d_3 نظير المستقيم (K_1K_2) بالنسبة إلى المستقيم (L_1L_2)، وبالمماثلة ليكن d_2 نظير (K_3K_1) بالنسبة إلى (L_3L_1)، و d_1 نظير (K_2K_3) بالنسبة إلى (L_2L_3) . أثبت أنّ رؤوس المثلّث الذي تؤلّفه المستقيمات d_1 و d_2 و d_3 تقع على الدائرة $\mathfrak{C}$.**

نطابق في هذا الحلّ بين نقاط المستوي وحقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$. ونفترض أنّ العدد 0 يمثّل مركز الدائرة $\mathfrak{C}$ الماسّة لأضلاع المثلّث داخلاً، كما نفترض أنّ نصف قطر هذه الدائرة يساوي 1. ونرمز α و β و γ إلى الأعداد العقديّة التي تمثّل النقاط L_1 و L_2 و L_3 ، والتي طويلة كلٍّ منها يساوي 1.



▫ تعيين العدد العقدي a_1 الذي يمثّل الرأس A_1 .

تقع A_1 على المستقيم المار بالنقطة L_3 عمودياً على (OL_3)، إذن يوجد عددٌ حقيقي t يُحقّق

$$a_1 = \gamma + t(\mathrm{i}\gamma) = (1+\mathrm{i}t)\gamma$$

وكذلك تقع A_1 على المستقيم المار بالنقطة L_2 عمودياً على (OL_2)، فيوجد عددٌ حقيقي s يُحقّق أيضاً $a_1 = (1+\mathrm{i}s)\beta$.

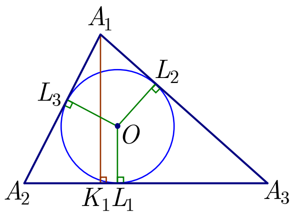
نستنتج من المساواة $(1+\mathrm{i}t)\gamma = (1+\mathrm{i}s)\beta$، بحساب الطويلة، أنّ $s^2 = t^2$، ولكن لا يمكن أن يكون $s = t$، لأنّ $\gamma \neq \beta$، إذن $s = -t$. وعليه $\dfrac{1+\mathrm{i}t}{1-\mathrm{i}t} = \dfrac{\beta}{\gamma}$، وهذا يقتضي أنّ $1+\mathrm{i}t = \dfrac{2\beta}{\beta+\gamma}$، وأخيراً نجد

$$a_1 = (1+\mathrm{i}t)\gamma = \frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}$$

ونعيّن بأسلوب مماثلٍ العددين العقديّين a_2 و a_3 اللذين يمثّلان A_2 و A_3 بالترتيب، فنجد

$$a_1 = \frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma} \quad \text{و} \quad a_2 = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma} \quad \text{و} \quad a_3 = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \qquad (1)$$

▫ تعيين العدد العقدي k_1 الذي يمثّل النقطة K_1 موقع الارتفاع النازل من الرأس A_1.



من جهة أولى، تقع K_1 على المستقيم المار بالنقطة L_1 عمودياً على (OL_1)، إذن يوجد عددٌ حقيقي t يُحقّق

$$k_1 = (1 + \mathrm{i}t)\alpha$$

ومن جهة ثانية، تقع K_1 على المستقيم المار بالنقطة A_1 موازياً (OL_1)، فيوجد عددٌ حقيقي s يُحقّق $k_1 = a_1 + s\alpha$.

نستنتج من المساواة $(1 + \mathrm{i}t)\alpha = a_1 + s\alpha$ أنّ $1 - s + \mathrm{i}t = a_1\overline{\alpha}$ ومن ثَمّ

$$\mathrm{i}t = \frac{a_1\overline{\alpha} - \overline{a_1}\alpha}{2}$$

إذن

$$k_1 = \alpha + \mathrm{i}t\alpha = \alpha + \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}\overline{a_1}\alpha^2 = \alpha + \frac{\beta\gamma - \alpha^2}{\beta + \gamma}$$

وبالمماثَلة، نجد العددين العقديّين k_2 و k_3 اللذين يمثلان النقطتين K_2 و K_3 بالترتيب. فنجد

$$k_1 = \alpha + \frac{\beta\gamma - \alpha^2}{\beta + \gamma} \quad \text{و} \quad k_2 = \beta + \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\alpha + \gamma} \quad \text{و} \quad k_3 = \gamma + \frac{\alpha\beta - \gamma^2}{\alpha + \beta} \tag{2}$$

▫ عبارة نظير نقطة بالنسبة إلى مستقيم.

نتأمّل مستقيماً d مارّاً بالنقطتين M_1 و M_2 المعرّفتين بالعددين z_1 و z_2 بالترتيب. ونتأمّل نقطة W ممثّلة بالعدد العقدي w. عندئذ يمثّل العدد العقدي

$$w' = z_1 + \frac{z_2 - z_1}{\overline{z_2 - z_1}}\overline{(w - z_1)} \tag{3}$$

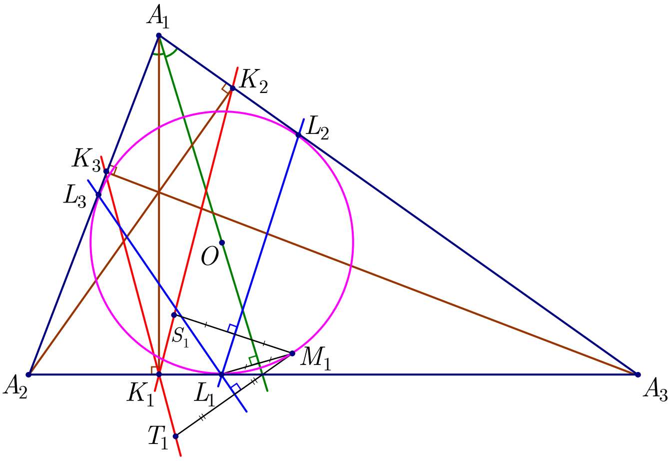
النقطة W' نظيرة W بالنسبة إلى المستقيم d.

لتكن W' النقطة التي يمثّلها العدد العقدي w' المعطى بالعبارة (3). نلاحظ من جهة أولى أنّ $|w' - z_1| = |w - z_1|$ إذن تقع M_1 على محور القطعة $[WW']$. ومن جهة ثانية نرى أنّ

$$w' = z_1 + \frac{z_2 - z_1}{\overline{z_2 - z_1}}\left(\overline{(w - z_2)} + \overline{(z_2 - z_1)}\right) = z_2 + \frac{z_2 - z_1}{\overline{z_2 - z_1}}\overline{(w - z_2)}$$

إذن $|w' - z_2| = |w - z_2|$، ومن ثَمّ تقع M_2 أيضاً على محور القطعة $[WW']$. وهذا يبرهن على أنّ d هو محور $[WW']$، ومن ثَمّ تكون W' نظيرة W بالنسبة إلى d.

▫ تعيين العدد العقدي m_1 الذي يمثّل النقطة M_1 نظيرة L_1 بالنسبة إلى المستقيم (OA_1).



بالاستفادة من (3) بعد اختيار $z_1 = 0$ و $z_2 = a_1$ نجد مباشرة أنّ

$$m_1 = \frac{a_1}{\overline{a_1}}\,\overline{\alpha} = \frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}\cdot\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\frac{1}{\alpha} = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$$

▫ تعيين العدد العقدي s_1 الذي يمثّل النقطة S_1 نظيرة M_1 بالنسبة إلى المستقيم (L_1L_2).

بالاستفادة من (3) بعد اختيار $z_1 = \alpha$ و $z_2 = \beta$ نجد

$$s_1 = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\,\overline{(m_1-\alpha)} = \alpha - \alpha\beta\left(\frac{\alpha}{\beta\gamma}-\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha+\beta-\frac{\alpha^2}{\gamma}$$

▫ تعيين العدد العقدي t_1 الذي يمثّل النقطة T_1 نظيرة M_1 بالنسبة إلى المستقيم (L_1L_3).

بالاستفادة من (3) بعد اختيار $z_1 = \alpha$ و $z_2 = \gamma$ نجد

$$t_1 = \alpha + \frac{\gamma-\alpha}{\overline{\gamma}-\overline{\alpha}}\,\overline{(m_1-\alpha)} = \alpha - \alpha\gamma\left(\frac{\alpha}{\beta\gamma}-\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha+\gamma-\frac{\alpha^2}{\beta}$$

▫ تنتمي النقطة S_1 إلى المستقيم (K_1K_2)، وتنتمي النقطة T_1 إلى المستقيم (K_1K_3). وهي الخاصّة الأساسيّة التي يستند إليها إثبات الخاصّة المنصوص عنها في المسألة.

لإثبات وقوع النقاط S_1 و K_1 و K_2 على استقامة واحدة يكفي أنّ نثبتَ أنّ العدد العقدي $\xi = \dfrac{k_1-s_1}{k_2-s_1}$ هو في الحقيقة عددٌ حقيقي. ولكن

$$k_1 - s_1 = \frac{\beta(\alpha^2-\beta\gamma)}{\gamma(\beta+\gamma)} \quad \text{و} \quad k_2 - s_1 = \frac{\alpha^3-\beta^2\gamma}{\gamma(\alpha+\gamma)}$$

إذن

$$\xi = \frac{k_1 - s_1}{k_2 - s_1} = \frac{\beta\left(\alpha^2 - \beta\gamma\right)(\alpha + \gamma)}{\left(\alpha^3 - \beta^2\gamma\right)(\beta + \gamma)}$$

ولإثبات أنّ هذا العددَ عددٌ حقيقي، علينا التوّثُق من كون $\xi = \bar{\xi}$. وهذا تحقّقٌ مباشرٌ :

$$\bar{\xi} = \frac{\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta\gamma}\right)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^2\gamma}\right)\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)} = \frac{\beta\left(\beta\gamma - \alpha^2\right)(\alpha + \gamma)}{\left(\beta^2\gamma - \alpha^3\right)(\beta + \gamma)} = \xi$$

وهذا ما يُثبتُ وقوع النقاط S_1 و K_1 و K_2 على استقامة واحدة.

وبأسلوب مماثلٍ نجد

$$k_3 - t_1 = \frac{\alpha^3 - \beta\gamma^2}{\beta(\alpha + \beta)} \quad \text{و} \quad k_1 - t_1 = \frac{\gamma\left(\alpha^2 - \beta\gamma\right)}{\beta(\beta + \gamma)}$$

إذن

$$\zeta = \frac{k_1 - t_1}{k_3 - t_1} = \frac{\gamma\left(\alpha^2 - \beta\gamma\right)(\alpha + \beta)}{\left(\alpha^3 - \beta\gamma^2\right)(\beta + \gamma)}$$

ونتيقّن مباشرة أنّ $\zeta = \bar{\zeta}$، فالعدد ζ ينتمي إلى $\mathbb{R}$، وهذا يُثبت وقوع النقاط T_1 و K_1 و K_3 على استقامة واحدة أيضاً.

▫ نستنتج من انتماء S_1 إلى (K_1K_2) أنّ M_1 تقع على المستقيم d_3 نظير المستقيم (K_1K_2) بالنسبة إلى المستقيم (L_1L_2). كما نستنتج من انتماء T_1 إلى (K_1K_3) أنّ M_1 تقع على المستقيم d_2 نظير المستقيم (K_1K_3) بالنسبة إلى المستقيم (L_1L_3). وهكذا نرى أنّ $\{M_1\} = d_2 \cap d_3$، وبملاحظة أنّ $|m_1| = 1$ نستنتج أنّ المستقيمين d_2 و d_3 يتقاطعان في نقطة من الدائرة $\mathfrak{C}$.

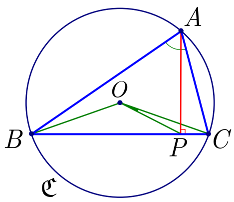
▫ ونبرهن بالمماثلة أنّ المستقيمين d_1 و d_3 يتقاطعان في النقطة M_2 نظيرة L_2 بالنسبة إلى المستقيم (OA_2)، وهي نقطة من الدائرة $\mathfrak{C}$ لأنّ (OA_2) محور تناظر لهذه الدائرة. كما يتقاطع المستقيمان d_1 و d_2 في النقطة M_3 نظيرة L_3 بالنسبة إلى المستقيم (OA_3)، وهي أيضاً نقطة من الدائرة $\mathfrak{C}$. وبذا يتمّ الإثبات. ■

ملاحظة : النتيجة صحيحة بوجه عام، دون شرط كون المثلّث حادّ الزوايا.

أولمبياد الرياضيّات الثاني والأربعون

① **نتأمّل مثلّثاً حادّ الزوايا ABC . ليكن O مركز الدائرة $\mathfrak{C}$ المارّة برؤوسه، وليكن P موقع الارتفاع النازل من الرأس A . نفترض أنّ $\widehat{BCA} \geq \widehat{ABC} + \frac{\pi}{6}$. أثبت أنّ**

$$\widehat{CAB} + \widehat{COP} < \frac{\pi}{2}$$



لمّا كانت زوايا المثلّث ABC حادّة استنتجنا من الفرْض أنّ

$$\frac{\pi}{2} > \widehat{C} - \widehat{B} \geq \frac{\pi}{6}$$

وهذا يقتضي أنّ $\sin(\widehat{C} - \widehat{B}) \geq \frac{1}{2}$ ، ومن ثَمّ

$$\sin\widehat{C}\cos\widehat{B} - \sin\widehat{B}\cos\widehat{C} \geq \frac{1}{2}$$

وبالاستفادة من علاقة الجيوب نستنتج، بضرب طرفي المتراجحة السابقة بالمقدار $2OB$ الذي يساوي قطر الدائرة $\mathfrak{C}$ المارّة برؤوس المثلّث ABC ، ما يلي :

$$AB \cdot \cos\widehat{B} - AC \cdot \cos\widehat{C} \geq OB$$

ولكن

$$AC\cos\widehat{C} = CP \quad \text{و} \quad AB\cos\widehat{B} = BP$$

إذن نستنتج من المتراجحة السابقة أنّ

$$BP - BO \geq CP$$

ولكنّ النقاط B و O و P لا تقع على استقامة واحدة لأنّ الزاوية $\widehat{A}$ حادّة، إذن نستنتج من متراجحة المثلّث أنّ $BP - BO < OP$. وهكذا نصل إلى المتراجحة $CP < OP$. فإذا تأمّلنا المثلّث COP وجدنا أنّ هذه المتراجحة تُكافئ $\widehat{COP} < \widehat{OCP}$.

ولكنّ المثلّث OBC مثلّثٌ متساوي الساقين فيه $\widehat{BOC} = 2\widehat{A}$ ، إذن

$$2\widehat{OCP} + 2\widehat{A} = \pi$$

ومن ثَمّ $\widehat{OCP} = \frac{\pi}{2} - \widehat{A}$ ، وبذا نكون قد أثبتنا أنّ $\widehat{COP} < \frac{\pi}{2} - \widehat{A}$ ، وهي المتراجحة المرجوّة.

② **نتأمّل ثلاثة أعداد حقيقيّة موجبة تماماً** a **و** b **و** c . **أثبت أنّ**

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

هذا تطبيق على متراجحة Hölder ، التي تنص على ما يلي. في حالة عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$ ، وعددين موجبين تماماً p و q يُحقّقان $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ، ومتتاليتين $(x_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ و $(y_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ من الأعداد الموجبة تماماً، تتحقّق المتراجحة التالية :

$$\sum_{i=1}^n x_iy_i\leq\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}$$

وفي الحالة الخاصّة الموافقة للقيم

$$p=3 \text{ و } q=\frac{3}{2} \text{ و } x_i=\left(\alpha_i^2a_i\right)^{1/3} \quad y_i=\left(\frac{a_i}{\alpha_i}\right)^{2/3}$$

نجد

$$\sum_{i=1}^n a_i\leq\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i^2a_i\right)^{1/3}\left(\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{\alpha_i}\right)^{2/3}$$

أو

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^3}{\sum_{i=1}^n\alpha_i^2a_i}\leq\left(\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{\alpha_i}\right)^2$$

نأتي إلى حالة المسألة المطروحة التي توافق $n=3$ و $a_1=a$ و $a_2=b$ و $a_3=c$ وأخيراً

$$\alpha_1=\sqrt{a^2+8bc} \quad\text{و}\quad \alpha_2=\sqrt{b^2+8ca} \quad\text{و}\quad \alpha_3=\sqrt{c^2+8ab}$$

إذْ تأخذ المتراجحة السابقة الصيغة التالية :

$$\frac{(a+b+c)^3}{a\alpha_1^2+b\alpha_2^2+c\alpha_3^2}\leq\left(\frac{a}{\alpha_1}+\frac{b}{\alpha_2}+\frac{c}{\alpha_3}\right)^2 \qquad (1)$$

ولكن إذا عرّفنا $\mathcal{N}=(a+b+c)^3$ وجدنا أنّ

$$\begin{aligned}\mathcal{N}&=a^3+b^3+c^3+3\left(ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2\right)+6abc\\&=a^3+b^3+c^3+3\left(a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\right)+24abc\\&=a^3+b^3+c^3+24abc+F(a,b,c)\end{aligned}$$

وقد رمزنا $F(a,b,c)=3\left(a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\right)$.

في حين نجد أنّ

$$a\alpha_1^2 + b\alpha_2^2 + c\alpha_3^2 = a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$$

إذن

$$\frac{(a+b+c)^3}{a\alpha_1^2 + b\alpha_2^2 + c\alpha_3^2} = 1 + \frac{F(a,b,c)}{a\alpha_1^2 + b\alpha_2^2 + c\alpha_3^2} \geq 1$$

وإذا عُدنا إلى (1) استنتجنا أنّ

$$\frac{a}{\alpha_1} + \frac{b}{\alpha_2} + \frac{c}{\alpha_3} \geq 1$$

مع مساواة، إذا وفقط إذا كان $a = b = c$. وهي المتراجحة المرجوّة. ■

ملاحظة : في الحقيقة يمكن تعميم هذه النتيجة كما يلي :

$$\forall x \geq 8, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + xbc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + xca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + xab}} \geq \frac{3}{\sqrt{1+x}}$$

ولإثبات ذلك نضع، في حالة $x \geq 8$، ما يلي

$$\alpha_3 = \sqrt{c^2 + xab} \quad \text{و} \quad \alpha_2 = \sqrt{b^2 + xca} \quad \text{و} \quad \alpha_1 = \sqrt{a^2 + xbc}$$

عندئذ يكون

$$a\alpha_1^2 + b\alpha_2^2 + c\alpha_3^2 = a^3 + b^3 + c^3 + 3xabc$$

ومن ثَمّ، إذا عرّفنا $T = \dfrac{3abc}{a^3 + b^3 + c^3}$ صار لدينا

$$\frac{(a+b+c)^3}{a\alpha_1^2 + b\alpha_2^2 + c\alpha_3^2} = \frac{1+8T}{1+xT} + \frac{F(a,b,c)}{a\alpha_1^2 + b\alpha_2^2 + c\alpha_3^2} \geq \frac{1+8T}{1+xT}$$

ولكن، تبيّن المتراجحة بين المتوسطين الحسابي والهندسي أنّ $0 < T \leq 1$، وفي حالة $x \geq 8$ يكون التابع $T \mapsto \frac{1+8T}{1+xT}$ متناقصاً على المجال $]0,1]$ فهو يبلغ قيمته الصغرى على هذا المجال عند $T = 1$، وهي إذن $\frac{9}{1+x}$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\frac{(a+b+c)^3}{a\alpha_1^2 + b\alpha_2^2 + c\alpha_3^2} \geq \frac{9}{1+x}$$

وإذا عُدنا إلى (1) استنتجنا أنّ

$$\frac{a}{\alpha_1} + \frac{b}{\alpha_2} + \frac{c}{\alpha_3} \geq \frac{3}{\sqrt{1+x}}$$

وهو التعميم الذي أعلنّا عنه.

③ **شارك واحد وعشرون طالباً وإحدى وعشرون طالبة في مسابقة للرياضيّات. نفترض ما يلي :**

❶ عددُ المسائل التي حلّها كلّ متسابق أو متسابقة يساوي 6 على الأكثر.

❷ أيّاً كان المتسابق والمتسابقة اللّذين نختارهما فتوجد مسألة على الأقل حلّها كلٌّ منهما.

أثبت وجود مسألة على الأقل حلّها ثلاثة متسابقين على الأقل وثلاث متسابقات على الأقل.

نحتاج إلى بعض الرموز. لتكن B مجموعة المتسابقين، ولتكن G مجموعة المتسابقات، وأخيراً لتكن P مجموعة المسائل. في حالة مسألة p من P، سنكتب $B(p)$ دلالة على مجموعة المتسابقين الذين حلّوا المسألة p، وبالمماثلة سنكتب $G(p)$ دلالة على مجموعة المتسابقات اللاتي حللن المسألة p. كما سنكتب $P(b)$ دلالة على مجموعة المسائل التي حلّها المتسابق b من B، وسنكتب $P(g)$ دلالة على تلك التي حلّتها المتسابقة g من G.

سنفترض بوجه عامّ أنّ

$$\operatorname{card}(B) = \operatorname{card}(G) = 4n + 1$$

مع $n \geq 3$. كما سنفترض تحقّق الشرطين

❶ $\forall b \in B, \operatorname{card}(P(b)) \leq n + 1$ و $\forall g \in G, \operatorname{card}(P(g)) \leq n + 1$.

❷ $\forall (b, g) \in B \times G,\ P(b) \cap P(g) \neq \varnothing$.

والمطلوب هو إثبات وجود مسألة p_0 من P تُحقّق

$$\operatorname{card}(B(p_0)) \geq 3 \quad \text{و} \quad \operatorname{card}(G(p_0)) \geq 3$$

في الحقيقة، توافق المسألة المطروحة حالة $n = 5$.

لإثبات الخاصّة المطلوبة سنتبع طريقة نقض الفرْض، إذن لنضع الفرْض $(\mathcal{H})$ التالي :

$$\forall p \in P, \quad \operatorname{card} G(p) \geq 3 \Rightarrow \operatorname{card}(B(p)) \leq 2$$

ثُمّ لنعرّف المجموعتين

$$P_0 = \{p \in P : \operatorname{card}(G(p)) \leq 2\}$$

$$P_1 = \{p \in P : \operatorname{card}(G(p)) \geq 3\}$$

يعتمد الإثبات على أن نقدّر بطريقتين عدد عناصر المجموعة

$$\mathcal{S} = \{(p, b, g) \in P \times B \times G : p \in P(b) \cap P(g)\}$$

▫ فمن جهة أولى، نجد بالاعتماد على الخاصّة ❷ أنّ

$$\operatorname{card}(\mathcal{S}) \geq \operatorname{card}(B \times G) = (4n + 1)^2 \qquad (1)$$

▫ ومن جهة أخرى، اعتماداً على ❶ نجد

$$\begin{aligned}\sum_{p\in P}\operatorname{card}(G(p)) &= \sum_{p\in P}\left(\sum_{g\in G(p)}1\right)\\ &= \operatorname{card}(\{(p,g)\in P\times G : g\in G(p)\})\\ &= \operatorname{card}(\{(p,g)\in P\times G : p\in P(g)\})\\ &= \sum_{g\in G}\left(\sum_{p\in P(g)}1\right) = \sum_{g\in G}\operatorname{card}(P(g))\\ &\le (n+1)\operatorname{card}(G)\end{aligned}$$

وأخيراً نجد

$$\sum_{p\in P}\operatorname{card}(G(p)) \le (n+1)(4n+1) \tag{2}$$

ونجد بالمثل أنّ

$$\sum_{p\in P}\operatorname{card}(B(p)) \le (n+1)(4n+1) \tag{3}$$

▫ لتكن g متسابقة من G. ولنفترض على سبيل الجدل أنّ

$$\forall p\in P(g),\quad \operatorname{card}(B(p))\le 3$$

عندئذ نستنتج من الخاصّة ❷ أنّ $B=\bigcup_{p\in P(g)} B(p)$ ومن ثَمّ

$$4n+1=\operatorname{card}(B)\le 3\operatorname{card}(P(g))\le 3(n+1)$$

وهذا خُلفٌ لأنّ $n\ge 3$. بذلك نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall g\in G,\ \exists p\in P(g),\ \operatorname{card}(B(p))\ge 4$$

ولكن، بناءً على $(\mathcal{H})$ لدينا

$$\operatorname{card}(B(p))\ge 4 \Rightarrow \operatorname{card}(G(p))\le 2$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $\forall g\in G,\ P(g)\cap P_0\neq\varnothing$، وهذا يقتضي أنّ

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(G) &= \sum_{g\in G}1 \le \sum_{g\in G}\operatorname{card}(P(g)\cap P_0)\\ &\le \sum_{g\in G}\left(\sum_{p\in P(g)\cap P_0}1\right) = \sum_{p\in P_0,\,g\in G(p)}1 = \sum_{p\in P_0}\operatorname{card}(G(p))\end{aligned}$$

وبالعودة إلى (2) نستنتج

$$4n+1+\sum_{p\in P_1}\operatorname{card}(G(p))\leq\sum_{p\in P}\operatorname{card}(G(p))\leq(n+1)(4n+1)$$

ومن ثَمّ

$$\sum_{p\in P_1}\operatorname{card}(G(p))\leq n(4n+1) \tag{4}$$

▫ وبالمثل، ليكن b متسابقاً من B. ولنفترض على سبيل الجدل أنّ

$$\forall p\in P(b),\quad \operatorname{card}(G(p))\leq 3$$

عندئذ نستنتج من الخاصّة ❷ أنّ $G=\bigcup_{p\in P(b)}G(p)$ ومن ثَمّ

$$4n+1=\operatorname{card}(G)\leq 3\operatorname{card}(P(b))\leq 3(n+1)$$

وهذا خُلفٌ لأنّ $n\geq 3$. بذلك نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall b\in B, \exists p\in P(b), \operatorname{card}(G(p))\geq 4$$

ولكن، بناءً على $(\mathcal{H})$ لدينا

$$\operatorname{card}(G(p))\geq 4\Rightarrow p\in P_1$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $\forall b\in B, P(b)\cap P_1\neq\varnothing$، وهذا يقتضي أنّ

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(B)&=\sum_{b\in B}1\leq\sum_{b\in B}\operatorname{card}(P(b)\cap P_1)\\&\leq\sum_{b\in B}\left(\sum_{p\in P(b)\cap P_1}1\right)=\sum_{p\in P_1, b\in B(p)}1=\sum_{p\in P_1}\operatorname{card}(B(p))\end{aligned}$$

وبالعودة إلى (3) نستنتج

$$4n+1+\sum_{p\in P_0}\operatorname{card}(B(p))\leq\sum_{p\in P}\operatorname{card}(B(p))\leq(n+1)(4n+1)$$

ومن ثَمّ

$$\sum_{p\in P_0}\operatorname{card}(B(p))\leq n(4n+1) \tag{5}$$

وأخيراً، بالعودة إلى المجموعة $\mathcal{S}$ نجد أنّ

$$\begin{aligned} \operatorname{card}(\mathcal{S}) &\leq \sum_{p\in P} \operatorname{card}(B(p)\times G(p)) \\ &\leq \sum_{p\in P_0} \operatorname{card}(B(p)\times G(p)) + \sum_{p\in P_1} \operatorname{card}(B(p)\times G(p)) \\ &\leq 2\sum_{p\in P_0} \operatorname{card}(B(p)) + 2\sum_{p\in P_1} \operatorname{card}(G(p)) \\ &\leq 2n(4n+1) + 2n(4n+1) = 4n(4n+1) \end{aligned}$$

وهذه المتراجحة تتناقض مع (1). هذا التناقض يُثبت خطأ الفرْض $(\mathcal{H})$، فلا بُدّ من وجود مسألة قام بحلّها ثلاثة متسابقين وثلاث متسابقات على الأقلّ. وبذا يتمّ الإثبات. ◼

④ **ليكن n عدداً طبيعيّاً فرديّاً أكبر أو يساوي 3، نذكّر أنّ $\mathbb{N}_n = \{1,2,\dots,n\}$، ونتأمّل $(k_j)_{j\in\mathbb{N}_n}$ متتالية معطاة من الأعداد الصحيحة. وأخيراً نرمز كالعادة $\mathfrak{S}_n$ إلى مجموعة التباديل على $\mathbb{N}_n$، التي عدد عناصرها $n!$. نعرّف في حالة σ من $\mathfrak{S}_n$ المقدار**

$$\Phi(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} k_j\sigma(j)$$

أثبت وجود تبديلين مختلفين ρ و ρ' من $\mathfrak{S}_n$ يكون في حالتهما العدد $\Phi(\rho)-\Phi(\rho')$ مُضاعفاً للعدد $n!$.

لنعرّف في حالة j من $\mathbb{N}_n$ المقدار

$$A_j = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sigma(j)$$

إذا كان $\tau_j = (1,j)$ هو المناقلة من $\mathfrak{S}_n$ التي تُبادل بين العددين 1 و j وتُبقي بقيّة الأعداد على حالها. استنتجنا من كون التطبيق $\sigma \mapsto \sigma\circ\tau_1$ تقابلاً على مجموعة التبادل $\mathfrak{S}_n$ أنّ

$$A_j = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sigma(j) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sigma\circ\tau_j(j) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sigma(1) = A_1$$

إذن

$$nA_1 = \sum_{j=1}^{n} A_j = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma(j)\right) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right) = \frac{n(n+1)}{2}n!$$

وهكذا نرى، بالاستفادة من كون العدد n عدداً فرديّاً، أنّ

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad A_j = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sigma(j) = \frac{n+1}{2} n! \equiv 0 \bmod n!$$

وأخيراً

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \Phi(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} k_j A_j \equiv 0 \bmod n! \qquad (1)$$

لنتأمل من جهة أخرى التطبيق

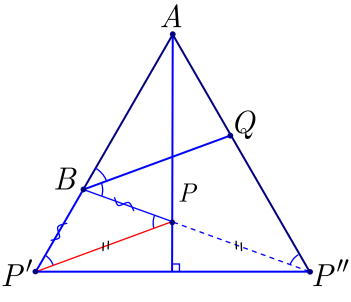
$$\varphi : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{Z}/n!\mathbb{Z},\ \varphi(\sigma) = \Phi(\sigma) \bmod n!$$

إذا كان φ متبايناً كان في الحقيقة تقابلاً لأنّ لمنطلقه ومستقرّه عدد العناصر نفسه. وعندها نجد في حالة $n > 1$ ما يلي

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varphi(\sigma) \equiv \left(\sum_{k=0}^{n!-1} k\right) \bmod n! \equiv \frac{n!(n!-1)}{2} \bmod n! \equiv \frac{n!}{2} \bmod n!$$

وهذا يتناقض مع (1) لأنّ $\frac{n!}{2} \bmod n! \neq 0 \bmod n!$. نستنتج من هذا التناقض أنّ التطبيق φ لا يمكن أن يكون متبايناً، فيوجد تبديلان مختلفان ρ و ρ' من $\mathfrak{S}_n$ يكون في حالتهما العدد $\Phi(\rho) - \Phi(\rho')$ مُضاعفاً للعدد $n!$. وهي النتيجة المرجوّة. ■

⑤ **نتأمّل مثلّثاً ABC، ونقطتين P من $[BC]$ و Q من $[CA]$. نفترض أنّ المستقيم (AP) ينصّف الزاوية $\widehat{BAC}$، وأنّ المستقيم (BQ) ينصّف الزاوية $\widehat{ABC}$، وأنّ $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$، وأخيراً أنّ $AB + BP = AQ + QB$. ما هي القيم الممكنة لزوايا المثلّث ABC ؟**



لنمدّد $[AB]$ من جهة B إلى P' لتتحقّق المساواة $BP = BP'$. ولنختر النقطة P'' من نصف المستقيم $[AQ)$ التي تُحقّق $AP'' = AP'$.

عندئذ يكون المثلّث $AP'P''$ مثلّثاً متساوي الأضلاع، ويكون (AP) محور الضلع $[P'P'']$. وبوجه خاصٍّ نجد $PP' = PP''$.

كما نستنتج من كون المثلّث BPP' متساوي الساقين فيه $\widehat{P'BP} = \pi - \widehat{B}$ أنّ

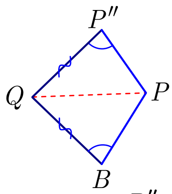
$$\widehat{BP'P} = \widehat{P'PB} = \tfrac{1}{2}\widehat{B}$$

ونستنتج من تطابق المثلّثين APP' و APP'' أنّ

$$\widehat{AP''P} = \widehat{AP'P} = \tfrac{1}{2}\widehat{B}$$

كما نستنتج من الفرْض أنّ

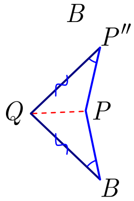
$$AQ + QP'' = AP'' = AP' = AB + BP = AQ + QB$$



وهذا يبرهن على أنّ $QB = QP''$.

نحن إذن أمام الوضع التالي

$$\widehat{QBP} = \widehat{PP''Q} = \tfrac{1}{2}\widehat{B} \quad \text{و} \quad QB = QP''$$



فإذا طبّقنا علاقة الجيوب على المثلّثين PQB و PQP'' وجدنا

$$\frac{QB}{\sin\widehat{BPQ}} = \frac{PQ}{\sin(\widehat{B}/2)} = \frac{QP''}{\sin\widehat{QPP''}}$$

وهذا يقتضي أنّ $\sin\widehat{BPQ} = \sin\widehat{QPP''}$. هناك إذن حالتان :

- إمّا أن يكون $\widehat{BPQ} = \widehat{QPP''}$ ومن ثَمّ $\widehat{PQP''} = \widehat{BQP}$. إذن (PQ) هو محور القطعة المستقيمة $[BP'']$، وبوجه خاصٍّ نجد $PB = PP''$، وهذا يجعل المثلّث BPP' متساوي الأضلاع، وبوجه خاصّ $\widehat{BP'P} = \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\widehat{B}$، إذن $\widehat{B} = \frac{2\pi}{3}$، وهذا خُلفٌ لأنّه يجعل $\widehat{C} = 0$.
- إذن لا بُدّ أن يكون $\widehat{BPQ} + \widehat{QPP''} = \pi$. فالنقاط B و P و P'' تقع على استقامة واحدة. والنقطة P'' هي نقطة تقاطع المستقيمين (BP) و (AC)، وهذا يبرهن على أنّ $C = P''$.

وهكذا نستنتج أنّ

$$\widehat{C} = \widehat{BP''Q} = \tfrac{1}{2}\widehat{B}$$

ولأنّ $\widehat{C} + \widehat{B} = \frac{2\pi}{3}$ نستنتج أنّ

$$\widehat{A} = \frac{\pi}{3} \quad \text{و} \quad \widehat{B} = \frac{4\pi}{9} \quad \text{و} \quad \widehat{C} = \frac{2\pi}{9}$$

وهي النتيجة المرجوّة.

⑥ **نتأمّل أعداداً طبيعيّة** a و b و c و d **تُحقّق** $a > b > c > d > 0$. **نفترض أنّ**

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$$

أثبت أنّ $ab + cd$ **ليس عدداً أوّليّاً.**

لنضع $\alpha = a + d$ و $\beta = b - c$. عندئذ

$$ac + bd = ac + (c + \beta)d = \alpha c + \beta d$$

$$(b + d + a - c)(b + d - a + c) = (\alpha + \beta)(b + d - a + c)$$

ومن ثَمّ يُكافئ الفرْضُ قولَنا $(\alpha + \beta)(b + d - a + c) = \alpha c + \beta d$، أو

$$\alpha(a - b - d) = \beta(c + b - a) \qquad (\mathcal{H})$$

ومن جهة أخرى نلاحظ أنّ العدد $n = ab + cd$ يُكتب بالصيغة

$$n = a(c + \beta) + cd = \beta a + \alpha c$$

نعرّف إذن $\delta = \gcd(\alpha, \beta)$ والأعداد α' و β' و n' بالصيغ $\alpha = \delta\alpha'$ و $\beta = \delta\beta'$ و $n' = \beta' a + \alpha' c$. فيكون $n = \delta n'$.

- من جهة أولى، $n' \geq a + c > 1$ لأنّ $\alpha' \geq 1$ وكذلك $\beta' \geq 1$.
- لنفترض على سبيل الجدل أنّ $\delta = 1$. عندئذ نستنتج من $(\mathcal{H})$، أنّه يوجد عددٌ صحيح λ يُحقّق $a - b - d = \lambda\beta$ و $c + b - a = \lambda\alpha$. وبجمع هاتين المساواتين نجد

$$c - d = \lambda(a + b + d - c)$$

أو $(1 + \lambda)(c - d) = \lambda(a + b)$.

من الواضح أنّ $\lambda \neq 0$. كما إنّ $a > c - d$ و $b > c - d$، إذن

$$1 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1 + \lambda}{\lambda} = \frac{a + b}{c - d} > 2$$

وهذا يؤدّي إلى التناقض $0 < \lambda < 1$ لأنّ λ عددٌ صحيح. يُثبتُ ذلك أنّ $\delta > 1$. إذن $n = \delta n'$ مع $\delta > 1$ و $n' > 1$ فهو ليس عدداً أوّلياً. وبهذا يتمّ إثبات الخاصّة المرجوّة. ◼

ملاحظة : كان بالإمكان ملاحظة أنّ الفرْض يقتضي

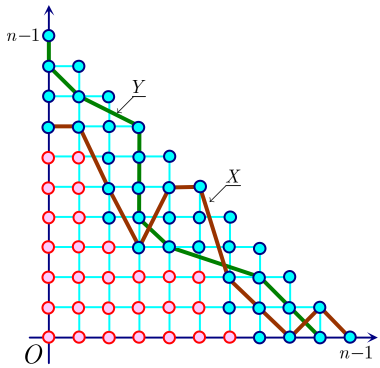
$$(ab + cd)(ad + bc) = (ac + bd)\left(b^2 + d^2 + bd\right)$$

والمتراجحة $ab + cd > ac + bd > ad + bc$ تجعل كون $ab + cd$ عدداً أوّلياً أمراً مستحيلاً.

① **ليكن n عدداً طبيعيّاً موجباً تماماً. ولتكن $\mathcal{T}$ مجموعة نقاط المستوي التي إحداثيّاتها هي الثنائيّات (x,y) من $\mathbb{N}^2$ التي تُحقّق $x+y<n$. يجري تلوين نقاط المجموعة $\mathcal{T}$ بأحد اللونين الأحمر أو الأزرق، ونفترض تحقُّق الخاصّة التالية : إذا كانت النقطة (x,y) حمراء اللّون كانت جميع النقاط (x',y') من $\mathcal{T}$ التي تُحقّق الشرطين $x'\leq x$ و $y'\leq y$ أيضاً حمراء اللون. نسمّي مجموعةً جزئيّة من $\mathcal{T}$ مكوّنة من n نقطة زرقاء اللون فواصلها مختلفة مثنى مثنى مجموعةً من النوع X، كما نسمّي مجموعةً جزئيّة من $\mathcal{T}$ مكوّنة من n نقطة زرقاء اللّون تراتيبها مختلفة مثنى مثنى مجموعةً من النوع Y. أثبت أنّ عدد المجموعات الجزئيّة من النوع X يساوي عدد المجموعات الجزئيّة من النوع Y.**

في الحقيقة، لنرمز في حالة $0\leq k<n$، بالرمز C_k إلى عدد النقاط الزرقاء في $\mathcal{T}$ التي فواصلها تساوي k. ولنرمز كذلك بالرمز R_k إلى عدد النقاط الزرقاء في $\mathcal{T}$ التي تراتيبها تساوي k. عندئذ إذا كانت $\mathcal{X}$ مجموعة المجموعات الجزئيّة من النوع X، وكانت $\mathcal{Y}$ مجموعة المجموعات الجزئيّة من النوع Y كان لدينا

$$\operatorname{card}(\mathcal{X})=C_0C_1\cdots C_{n-1} \quad \text{و} \quad \operatorname{card}(\mathcal{Y})=R_0R_1\cdots R_{n-1}$$



المطلوب إذن هو إثبات صحّة المساواة

$$C_0C_1\cdots C_{n-1}=R_0R_1\cdots R_{n-1}$$

ولتحقيق ذلك سنبرهن على وجود تقابل، أو تبديل، σ على مجموعة الأعداد $\{0,1,\ldots,n-1\}$ يُحقّق $R_{\sigma(k)}=C_k$ وذلك في حالة $0\leq k<n$. يجري هذا الإثبات بالتدريج على عدد النقاط الحمراء في $\mathcal{T}$.

- النتيجة واضحة إذا كان عدد النقاط الحمراء يساوي صفراً، إذ في هذه الحالة يكون

$$C_k=n-k=R_k$$

- وهي أيضاً واضحة إذا كان عدد النقاط الحمراء يساوي واحداً، إذْ لا بُدّ أن تكون النقطة $O(0,0)$ هي النقطة الحمراء، وعندها يكون $R_k=C_k$ أيّاً كانت قيمة k.

- لنفترض الآن أننا أثبتنا صحّة الخاصّة إذا كان عدد النقاط الحمراء في $\mathcal{T}$ أصغر تماماً من m، ولنتأمّل مجموعةً $\mathcal{T}$ عدد النقاط الملوّنة باللون الأحمر فيها يساوي m.

نختار نقطة حمراء اللون (x_0, y_0) يكون عندها المقدار $x_0 + y_0$ أعظميّاً بين جميع النقاط الملوّنة باللّون الأحمر في $\mathcal{T}$. عندئذ نرى مباشرة أنّ النقاط (x_0, j) عندما تتحوّل j في المجموعة $\{y_0 + 1, \ldots, n - 1 - x_0\}$ هي نقاط زرقاء وبقيّة النقاط (x_0, j) عندما تتحوّل j في المجموعة $\{0, \ldots, y_0\}$ هي نقاط حمراء، إذن

$$C_{x_0} = n - 1 - x_0 - y_0$$

ونجد بأسلوب مماثلٍ أنّ $R_{y_0} = n - 1 - x_0 - y_0$. إذن $C_{x_0} = R_{y_0}$، لنرمز بالرمز t إلى هذه القيمة المشتركة أي $C_{x_0} = R_{y_0} = t$.

ثُمّ لنستبدل بهذه النقطةِ نقطةً زرقاء، فنحصل على وضع جديد يكون فيه عدد النقاط الحمراء مساوياً $m - 1$. وإذا رمزنا C'_k إلى عدد النقاط الزرقاء التي فواصلها تساوي k في هذا الوضع الجديد، ورمزنا كذلك بالرمز R'_k إلى عدد النقاط الزرقاء التي تراتيبها تساوي k أيضاً في الوضع الجديد. كان لدينا

$$\begin{aligned} &\forall k \in \{0, \ldots, n-1\} \backslash \{y_0\}, \quad R'_k = R_k, \qquad R'_{y_0} = R_{y_0} + 1 \\ &\forall k \in \{0, \ldots, n-1\} \backslash \{x_0\}, \quad C'_k = C_k, \qquad C'_{x_0} = C_{x_0} + 1 \end{aligned} \tag{$*$}$$

ولكن، استناداً إلى فرْض التدريج، يوجد تقابلٌ

$$\sigma : \{0, \ldots, n-1\} \to \{0, \ldots, n-1\}$$

يُحقّق $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, \ R'_{\sigma(k)} = C'_k$.

- إذا كان $\sigma(x_0) = y_0$، استنتجنا مما سبق أنّ $R_{\sigma(k)} = C_k$ أيّاً كان العدد k من المجموعة $\{0, \ldots, n-1\}$.
- لنفترض أنّ $\sigma(x_0) \neq y_0$، ولنعرّف المجموعتين

$$B = \{j : R'_j = t\} \quad \text{و} \quad A = \{i : C'_i = t\}$$

عندئذ نرى مباشرة أنّ $x_0 \in A$ و $y_0 \in B$. وإذا كان i عنصراً من A استنتجنا من المساواة $R'_{\sigma(i)} = C'_i$ أنّ $\sigma(i) \in B$، ومن ثَمّ $\sigma(A) \subset B$. وكذلك إذا كان j عنصراً من B استنتجنا من المساواة $R'_j = C'_{\sigma^{-1}(j)}$ أنّ $\sigma^{-1}(j) \in A$، ومن ثَمّ $\sigma^{-1}(B) \subset A$، وهكذا نرى أنّ $\sigma(A) = B$.

وعليه، نستنتج أنّه إذا كانت $\tau_{bb'}$ مُناقلة بين عنصرين b و b' من عناصر B، حقّق التبديل $\tilde{\sigma} = \tau_{bb'} \circ \sigma$ الخاصّة $R'_{\tilde{\sigma}(k)} = C'_k$ أيّاً كان k من $\{0,\ldots,n-1\}$.
يكفي إذن أن نستبدل بالتبديل σ التبديل $\sigma' = \tau_{\sigma(x_0),y_0} \circ \sigma$ الذي يُحقّق استناداً إلى ما سبق الخاصّتين $\forall k \in \{0,\ldots,n-1\},\ R'_{\sigma'(k)} = C'_k$ و $\sigma'(x_0) = y_0$.
وكما في النقطة السابقة، يقتضي هذا، اعتماداً على $(*)$، أنّ

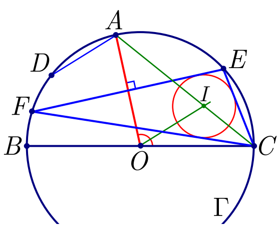
$$\forall k \in \{0,\ldots,n-1\}, \quad R_{\sigma'(k)} = C_k$$

وهذا يُثبتُ صحّة النتيجة في حالة كون عدد النقاط الحمراء يساوي m. وبذا ينتهي إثبات الخاصّة المرجوّة بالتدريج. ◪

② ليكن $[BC]$ قطراً في دائرة Γ مركزها O. ولتكن A نقطة من Γ تُحقّق

$$0 < \widehat{AOB} < \frac{2\pi}{3}$$

ولتكن النقط D منتصف القوس $\overset{\frown}{AB}$ التي لا تحوي النقطة C. يقطع المستقيم المارّ بالنقطة O موازياً (DA) المستقيمَ (AC) في I. ويقطع محور القطعة المستقيمة $[OA]$ الدائرة Γ في النقطتين E و F. أثبت أنّ I هو مركز الدائرة الماسّة لأضلاع المثلّث CEF داخلاً.



إنّ النقطة الأساس هي إثبات وقوع I داخل المثلّث CEF. سنعتمد برهاناً تحليليّاً مباشراً. إذ سنطابق بين حقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$ والمستوي، وبين الدائرة المثلثيّة و Γ، بأسلوب يكون فيه العدد $z_C = 1$ هو ممثّل النقطة C، والعدد -1 هو ممثّل النقطة B. أمّا النقطة A فيمثّلها العدد $e^{i\theta}$، الذي، بناءً على الفرض، يُحقّق الشرط $\frac{\pi}{3} < \theta < \pi$. سنعرّف $\alpha = \exp(i\theta/2)$، فيكون العدد α^2 هو العدد العقدي الذي يمثّل النقطة A.
أمّا النقطة D فيمثّلها العدد $i\alpha = \exp\left(i\frac{\pi+\theta}{2}\right)$.

كما نستنتج من كون المثلّثين OAE و OAF متساويَي الأضلاع أنّ النقطة E يمثّلها العدد $z_E = \exp\left(i\theta - \frac{\pi}{3}\right)$، في حين يمثّل العدد $z_F = \exp\left(i\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ النقطة F.

وهكذا، إذا عرّفنا $\omega = \exp(\mathrm{i}\,\pi/6)$، أمكننا أن نلخّص ما سبق بالجدول التالي الذي يقرن كلّ نقطة بالعدد العقدي الذي يمثّلها :

O	A	B	C	D	E	F
0	α^2	-1	1	$\mathrm{i}\,\alpha$	$\overline{\omega}^2\alpha^2$	$\omega^2\alpha^2$

أمّا النقطة I فهي نقطة تقاطع المستقيم (AC) والمستقيم المارّ بالنقطة O موازياً (AD).
إذن يوجد عددان حقيقيّان s و t يُحقّقان

$$\overrightarrow{CI} = s\overrightarrow{CA} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OI} = t\overrightarrow{DA}$$

فالعدد z_I الذي يمثّل النقطة I يُحقّق

$$z_I = t(\alpha^2 - \mathrm{i}\,\alpha) = 1 + s(\alpha^2 - 1)$$

وهذه المساواة تقتضي

$$(1-s)\overline{\alpha} + (s-t)\alpha + \mathrm{i}\,t = 0$$

وبأخذ الجزء الحقيقي نجد $(1-t)\,\mathrm{Re}(\alpha) = 0$، أو $t = 1$. إذن العدد العقدي الذي يمثّل النقطة I هو $z_I = \alpha^2 - \mathrm{i}\,\alpha$.

سنعتمد في إثبات المطلوب على الخاصّة التالية :

خاصّة : إذا كان ABC مثلّثاً أطوال أضلاعه $[BC]$ و $[CA]$ و $[AB]$ هي a و b و c بالترتيب، وكان I مركز الدائرة الماسّة لأضلاع هذا المثلّث داخلاً. عندئذ يكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$. أي

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = 0$$

سنرجئ إثبات هذه الخاصّة إلى وقت لاحق. ولكن اعتماداً على هذه الخاصّة تؤول المسألة المطروحة إلى تحقّقٍ مباشر من صحّة المساواة السابقة. نلاحظ أوّلاً أنّ

$$EF = \left|\omega^2\alpha^2 - \overline{\omega}^2\alpha^2\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$FC = \left|1 - \omega^2\alpha^2\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\,\mathrm{Im}(\alpha\omega)$$

$$EC = \left|1 - \overline{\omega}^2\alpha^2\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\,\mathrm{Im}(\alpha\overline{\omega})$$

إذ استفدنا في المساواة الأخيرة من كون $\frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$.

وهنا نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= EF\cdot z_C + FC\cdot z_E + EC\cdot z_F\\ &= \sqrt{3} + 2\,\mathrm{Im}(\alpha\omega)\alpha^2\overline{\omega}^2 + 2\,\mathrm{Im}(\alpha\overline{\omega})\alpha^2\omega^2\\ &= \sqrt{3} - \mathrm{i}\big((\alpha\omega-\overline{\alpha\omega})\alpha^2\overline{\omega}^2 + (\alpha\overline{\omega}-\overline{\alpha}\omega)\alpha^2\omega^2\big)\\ &= \sqrt{3} - \mathrm{i}\big(\alpha^3\overline{\omega} - \alpha\overline{\omega}^3 + \alpha^3\omega - \alpha\omega^3\big)\\ &= \sqrt{3} - \mathrm{i}\,\alpha^3(\omega+\overline{\omega}) = \sqrt{3} - 2\,\mathrm{i}\,\alpha^3\cos\Big(\frac{\pi}{6}\Big)\\ &= \sqrt{3}\big(1-\mathrm{i}\,\alpha^3\big)\end{aligned}$$

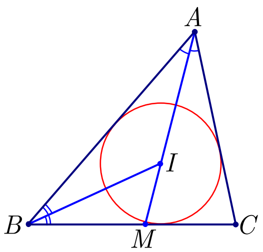
وكذلك أنّ

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= (EF+FC+EC)\cdot z_I\\ &= \big(\sqrt{3} + 2\,\mathrm{Im}(\alpha\omega) + 2\,\mathrm{Im}(\alpha\overline{\omega})\big)\big(\alpha^2 - \mathrm{i}\,\alpha\big)\\ &= \big(\sqrt{3} + 2\,\mathrm{Im}(\alpha(\omega+\overline{\omega}))\big)\big(\alpha^2 - \mathrm{i}\,\alpha\big)\\ &= \Big(\sqrt{3} - 2\,\mathrm{i}\cos\Big(\frac{\pi}{6}\Big)(\alpha-\overline{\alpha})\Big)\big(\alpha^2 - \mathrm{i}\,\alpha\big)\\ &= \sqrt{3}\big(\alpha - \mathrm{i}(\alpha^2-1)\big)(\alpha-\mathrm{i})\\ &= \sqrt{3}\big(\mathrm{i} + \alpha - \mathrm{i}\,\alpha^2\big)(\alpha-\mathrm{i}) = \sqrt{3}\big(1-\mathrm{i}\,\alpha^3\big)\end{aligned}$$

فالمساواة $\mathcal{A}=\mathcal{B}$ ، تُكافئ

$$EF\cdot(z_C - z_I) + FC\cdot(z_E - z_I) + EC\cdot(z_F - z_I) = 0$$

أو $EF\cdot\overrightarrow{IC} + FC\cdot\overrightarrow{IE} + EC\cdot\overrightarrow{IF} = 0$ ، فالنقطة I هي مركز الدائرة الماسّة لأضلاع المثلّث CEF داخلاً، وبذا يكتمل الإثبات.



لنأتِ إلى إثبات الخاصّة التي أشرنا إليها. لمّا كان (AM) منصّف الزاوية $\widehat{BAC}$ ، استنتجنا $\frac{c}{b} = \frac{BA}{CA} = \frac{BM}{CM}$ ، ومن ثَمّ $b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = 0$ ، وكذلك $BM = \frac{ca}{c+b}$. ولمّا كان (BI) منصّف الزاوية $\widehat{ABC}$ ، استنتجنا صحة المساواة $\frac{c(c+b)}{ca} = \frac{BA}{BM} = \frac{IA}{IM}$ ، ومنه $a\overrightarrow{IA} + (c+b)\overrightarrow{IM} = 0$ ، وبالاستفادة من $b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = 0$ وجدنا أنّ $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = 0 = 0$. ويتمّ الإثبات. ■

③ **في حالة** (m,n) **من** $\mathbb{N}^2$ **مع** $n \geq 3$ ، **نعرّف** $\mathcal{A}_{m,n}$ **بأنّها مجموعة الأعداد الطبيعيّة** a **التي يكون عندها العدد** $a^n + a^2 - 1$ **قاسماً للعدد** $a^m + a - 1$. **أوجد الثنائيّات** (m,n) **التي تُحقّق الشرط** $\operatorname{card}(\mathcal{A}_{m,n}) = +\infty$.

نلاحظ أوّلاً أنّه في حالة وجود عددٍ a أكبر تماماً من الواحد في المجموعة $\mathcal{A}_{m,n}$ يكون

$$a^n + a^2 - 1 \leq a^m + a - 1 < a^m + a^2 - 1$$

وهذا يقتضي أنّ $a^n < a^m$ ، ومن ثَمّ $n < m$ لأنّ $a > 1$.

لنتأمّل إذن ثنائيّة (m,n) من $\mathbb{N}^2$ تُحقّق الشرط

$$\operatorname{card}(\mathcal{A}_{m,n}) = +\infty \quad \text{مع} \quad n \geq 3$$

عندئذ لا بُدّ أن يكون $n < m$ ، وذلك بناءً على الملاحظة السابقة. ولنتأمّل كثيرَي الحدود A_m و B_n من $\mathbb{Z}[X]$ ، المعرّفين كما يلي :

$$B_n(X) = X^n + X^2 - 1 \quad \text{و} \quad A_m(X) = X^m + X - 1$$

بإجراء قسمة إقليديّة لكثير الحدود A_m على B_n نجد كثيرَي حدود Q و R من $\mathbb{Z}[X]$ يُحقّقان

$$\deg R < n \quad \text{و} \quad A_m = QB_n + R$$

نستنتج بوجه خاصٍ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{R(x)}{B_n(x)} = 0$ ، فيوجد عددٌ x_0 يُحقّق

$$\forall x > x_0, \qquad \left|\frac{R(x)}{B_n(x)}\right| < 1$$

فإذا كان a عنصراً من $\mathcal{A}_{m,n}$ أكبر من x_0 كان

$$\frac{R(a)}{B_n(a)} = \frac{A_m(a)}{B_n(a)} - Q(a) \in \mathbb{Z} \cap]-1,1[= \{0\}$$

ومن ثَمّ $R(a) = 0$. إذن يقتضي الشرط $\operatorname{card}(\mathcal{A}_{m,n}) = +\infty$ أن يكون لكثير الحدود R عدداً لانهائيّاً من الجذور، فهو إذن معدوم، أي $R = 0$. نستنتج أنّ كثير الحدود B_n يقسم كثير الحدود A_m .

لنعرّف $\ell = m - n$ ، ولنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} A_m &= X^{n+\ell} + X - 1 = X^\ell\left(B_n + 1 - X^2\right) + X - 1 \\ &= X^\ell B_n + (1 - X)\left(X^{\ell+1} + X^\ell - 1\right) \end{aligned}$$

نستنتج من كون $B_n \mid A_m$ ومن كون $\gcd(X-1, B_n)=1$ لأنّ $B_n(1)\neq 0$ أنّ B_n يقسم $X^{\ell+1}+X^{\ell}-1$. وهذا يقتضي بوجه خاصٍّ أنّ $n\leq \ell+1$ ومن ثَمّ $\ell\geq 2$، لأنّ $n\geq 3$.

ولكن $X^n+X^2-B_n=1$ إذن

$$X^{\ell+1}+X^{\ell}-1=X^{\ell+1}+X^{\ell}-\left(X^n+X^2-B_n\right)$$
$$=X^{\ell+1}-X^n+X^{\ell}-X^2+B_n$$

ومن ثَمّ، يقسم كثيرُ الحدود B_n كثيرَ الحدود $S(X)=X^{\ell+1}-X^n+X^{\ell}-X^2$.

ولكن .بملاحظة أنّ $B_n(0)=-1$ و $B_n(1)=1$ نستنتج وجود عددٍ α من $]0,1[$ يُحقّق $B_n(\alpha)=0$، ولأنّ B_n يقسم S نستنتج أنّ $S(\alpha)=0$. أو

$$\alpha^{\ell+1}-\alpha^n+\alpha^{\ell}-\alpha^2=0$$

ولكن $\alpha^{\ell}\leq\alpha^2$ و $\alpha^{\ell+1}\leq\alpha^n$ لأنّ $\ell\geq 2$ و $n\leq\ell+1$. إذن نستنتج من المساواة السابقة أنّ $\alpha^{\ell}=\alpha^2$ و $\alpha^{\ell+1}=\alpha^n$، ومنه $\ell=2$ و $n=\ell+1$. إذن $n=3$ و $m=n+\ell=5$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّه في حالة $n\geq 3$ لدينا

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{A}_{m,n}\right)=+\infty\Rightarrow(m,n)=(5,3)$$

أمّا العكس، فهو واضحٌ إذ لدينا

$$X^5+X-1=\left(X^2-X+1\right)\left(X^3+X^2-1\right)$$

فالمجموعة $\mathcal{A}_{5,3}$ هي المجموعة الوحيدة اللانهائيّة من بين المجموعات $\left(\mathcal{A}_{m,n}\right)_{m,n\geq 3}$.

④ **ليكن n عدداً طبيعيّاً أكبر تماماً من الواحد، ولتكن $\left(d_j\right)_{1\leq j\leq k}$ القواسم الموجبة للعدد n مرتّبة ترتيباً متزايداً : $1=d_1<d_2<\cdots<d_k=n$. نعرّف**

$$D_n=d_1d_2+d_2d_3+\cdots+d_{k-1}d_k$$

❶ أثبت أنّ $D_n\leq n^2$.

❷ أوجد مجموعة قيم n التي يكون عندها D_n قاسماً للعدد n^2.

لنلاحظ أوّلاً أنّه إذا كان d قاسماً لعددٍ n كان $d'=n/d$ أيضاً قاسماً للعدد n، إذن

$$\forall j\in\{1,2,\ldots,k\},\quad d_j=\frac{n}{d_{k+1-j}}$$

وعليه

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{n^2}{d_k d_{k-1}} + \cdots + \frac{n^2}{d_3 d_2} + \frac{n^2}{d_2 d_1} \\ &= n^2 \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{d_j d_{j+1}} \leq n^2 \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{d_j} - \frac{1}{d_{j+1}} \right) \\ &\leq n^2 \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_k} \right) = n^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) < n^2 \end{aligned}$$

وبذا يتمّ إثبات صحّة الخاصّة ❶.

ليكن p أصغر عددٍ أوّلي يقسم n. عندئذ يكون $d_2 = p$ و $d_{k-1} = \frac{n}{p}$.

- في حالة كون $k = 2$، أي $n = p$، يكون $D_n = p$ وهو قاسمٌ للعدد n^2.
- في حالة كون $k > 2$ يكون

$$D_n \geq d_1 d_2 + d_{k-1} d_k = p + \frac{n^2}{p} > \frac{n^2}{p}$$

ومن ثَمّ $p < \frac{n^2}{D_n} < 1$.

فإذا كان $D_n \mid n^2$ كان العدد $m = \frac{n^2}{D_n}$ عدداً طبيعيّاً محصوراً تماماً بين 1 و p، وإذا اخترنا q أيّ عددٍ أوّلي يقسم m كان q قاسماً للعدد n^2، فهو إذن قاسمٌ للعدد n، وهو أصغر تماماً من p مما يتناقض مع تعريف p. نستنتج من هذا التناقض أنّ $D_n \nmid n^2$ في هذه الحالة.

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $D_n \mid n^2$ إذا وفقط إذا كان n عدداً أوّليّاً. ■

⑤ أوجد جميع التوابع الحقيقيّة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقيّة والتي تُحقّق العلاقة التابعيّة $(\mathcal{E})$ التالية :

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

وذلك مهما كانت الأعداد الحقيقيّة x و y و z و t.

سنبرهن أنّ f هو واحدٌ من التوابع الثلاثة التالية، والتي نتوثّق مباشرة أنّها تُحقّق $(\mathcal{E})$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \text{ أو } f \equiv \frac{1}{2} \text{ أو } f \equiv 0$$

لنتأمّل إذن تابعاً $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ يُحقّق العلاقة التابعيّة $(\mathcal{E})$، ولنفترض أنّه يوجد x_0 من $\mathbb{R}$ يُحقّق $f(x_0)\notin\{0,\frac{1}{2}\}$.

- باختيار $y=t=0$ و $x=z=x_0$ في العلاقة التابعيّة نجد

$$4f(0)f(x_0)=2f(0)$$

وهذا يقتضي أنّ $f(0)=0$ لأنّ $f(x_0)\neq\frac{1}{2}$.

- وباختيار $y=1$ و $t=0$ و $x=z=x_0$ في العلاقة التابعيّة نجد

$$2f(x_0)f(1)=2f(x_0)$$

وهذا يقتضي أنّ $f(1)=1$ لأنّ $f(x_0)\neq 0$.

- باختيار $z=t=0$ في العلاقة التابعيّة نجد

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(xy)=f(x)f(y) \qquad (1)$$

أي إنّ f يُحافظ على قانون الضرب.

- باختيار $x=y=0$ و $z=1$ في $(\mathcal{E})$ نجد

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad f(t)=f(-t) \qquad (2)$$

فالتابع f تابعٌ زوجي.

- وباختيار $y=x$ و $t=-z$ في $(\mathcal{E})$، والاستفادة من (2) نجد

$$f\left(x^2+z^2\right)=(f(x)+f(z))^2 \qquad (3)$$

وبوجه خاصٍّ، إذا كان $u\geq 0$ كان

$$f(u)=f\left((\sqrt{u})^2+0^2\right)=(f(\sqrt{u})+f(0))^2\geq 0$$

فالتابع f يأخذ قيماً موجبة عند الأعداد الموجبة، بل عند جميع الأعداد لأنّه تابعٌ زوجي.

وإذا كان $v>u\geq 0$ وعرّفنا $w=\sqrt{v-u}$ استنتجنا أنّ

$$f(v)=f\left(w^2+(\sqrt{u})^2\right)=(f(w)+f(\sqrt{u}))^2\geq(f(\sqrt{u}))^2=f(u)$$

فالتابع f تابعٌ متزايدٌ على $\mathbb{R}_+$.

وأخيراً نستنتج من (3) و (1) في حالة عددين موجبين x و y أنّ

$$(f(\sqrt{x})+f(\sqrt{y}))^2=f(x+y)=f\left((\sqrt{x+y})^2\right)=(f(\sqrt{x+y}))^2$$

أو

$$\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2,\quad f(\sqrt{x+y})=f(\sqrt{x})+f(\sqrt{y})$$

وهكذا إذا عرّفنا التابع g كما يلي :

$$g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ g(x)=f(\sqrt{x})$$

كان g تابعاً متزايداً يُحقّق $g(0)=0$ و $g(1)=1$ وأخيراً

$$\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2,\quad g(x+y)=g(x)+g(y)$$

▫ نستنتج من ذلك بالتدريج على العدد n من $\mathbb{N}$ أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad g(nx)=ng(x)$$

ومنه نستنتج أنّ $\forall m\in\mathbb{N}^*,\ mg(\frac{1}{m})=g(1)=1$، فإذا عوّضنا $\frac{1}{m}$ بالعدد x في النتيجة أعلاه استنتجنا أنّ

$$\forall(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\quad g\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{m}$$

أو $\forall r\in\mathbb{Q}_+,\ g(r)=r$.

ليكن x من $\mathbb{R}_+$، نختار متتاليتين موجبتين $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathbb{Q}_+$ تُحقّقان

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad s_n\le x\le r_n$$

و $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=x$. عندئذ نستفيد من تزايد g والخاصّة السابقة لنكتب

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad s_n\le g(s_n)\le g(x)\le g(r_n)=r_n$$

وبجعل n تسعى إلى اللانهاية نجد $g(x)=x$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\forall x\ge 0,\quad f(\sqrt{x})=x$$

ومن ثَمّ

$$\forall x\ge 0,\quad f(x)=x^2$$

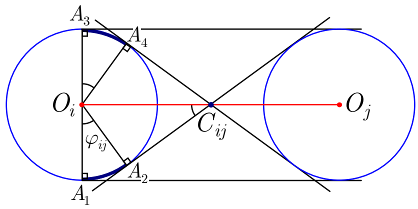
وأخيراً، لأنّ f تابعٌ زوجي نجد $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=x^2$. وهي النتيجة المرجوّة. ■

⑥ **ليكن n عدداً طبيعيّاً أكبر أو يساوي 3. نتأمّل في المستوي عدداً n من الدوائر $(\Gamma_k)_{1\le k\le n}$. نفترض أنّ مركز الدائرة Γ_i هو النقطة O_i وأنّ نصف قطرها يساوي 1. كما نفترض أنّ أي مستقيم في المستوي يقطع على الأكثر دائرتين من هذه الدوائر. أثبت أنّ**

$$\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{O_iO_j}\le\frac{(n-1)\pi}{4}$$

تكمن صعوبة هذه المسألة في إيجاد الصياغة المناسبة للتعبير عن أنّ كلّ مستقيم في المستوي يقطع دائرتين على الأكثر من هذه الدوائر. هذا يتطلّب، في حالة $n \geq 3$، ألاّ تتقاطع أي دائرتين من هذه الدوائر.

في حالة $i \neq j$، نعرّف Δ_{ij} بأنّها مجموعة النقاط من الدائرة Γ_i التي يقطع المماسّ المرسوم منها الدائرة Γ_j.



لنضع C_{ij} منتصف $[O_iO_j]$، فيكون C_{ij} مركز تناظر الشكل المكوّن من الدائرتين Γ_i و Γ_j. ولنعرّف $[A_1A_3]$ قطر الدائرة Γ_i العمودي على خط المركزين (O_iO_j). المماس المرسوم من C_{ij} للدائرة Γ_i ومن جهة A_1 يمس الدائرة Γ_i في A_2، وهو أيضاً يمس Γ_j لأنّ C_{ij} مركز تناظر. نعرّف بأسلوب مماثل النقطة A_3. بملاحظة الشكل المبيّن أعلاه، نرى أنّ Δ_{ij} تساوي اجتماع القوسين $\widehat{A_1A_2}$ و $\widehat{A_3A_4}$، (المتناظرتين بالنسبة إلى خط المركزين (O_iO_j)). والزاوية φ_{ij} التي تُقابل القوس $\widehat{A_1A_2}$ تساوي $\widehat{O_iC_{ij}A_2}$ لتعامد ضلعيهما. إذن

$$\sin\varphi_{ij} = \frac{O_iA_2}{O_iC_{ij}} = \frac{1}{O_iC_{ij}} = \frac{2}{O_iO_j} \qquad (1)$$

في حين يُعطى قياس المجموعة Δ_{ij} بالصيغة $\mu(\Delta_{ij}) = 2\varphi_{ij}$ لأنّ نصف قطر الدائرة Γ_i يساوي 1.

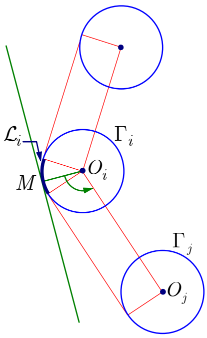
ملاحظة : في الحقيقة،

$$\Delta_{ij} = \left\{ M \in \Gamma_i : 0 \leq \overrightarrow{O_iM} \cdot \overrightarrow{O_iO_j} \leq 2 \right\}$$

لنعرّف إذن المجموعة $\mathcal{K}_i = \bigcup_{j\neq i} \Delta_{ij}$ من Γ_i. لمّا كانت المجموعات $(\Delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}_n\setminus\{i\}}$ منفصلة مثنى مثنى، (لأنّ وجود عنصر مشترك M في Δ_{ij} و $\Delta_{ij'}$ يعني أنّ المماس المرسوم من M للدائرة Γ_i يقطع أيضاً الدائرتين Γ_j و $\Gamma_{j'}$ وهذا يتناقض مع الفرْض)، نستنتج أنّ

$$\mu(\mathcal{K}_i) = \sum_{j\neq i} \mu(\Delta_{ij}) = 2\sum_{j\neq i} \varphi_{ij} \qquad (2)$$

علينا إيجاد فكرة إضافيّة، لأنّ المتراجحة $\mu(\mathcal{K}_i) \leq 2\pi$ تؤدّي إلى متراجحة أقلّ دقّة من المتراجحة المطلوبة، إذْ فيها n بدلاً من $(n-1)$.



لنتأمّل إذن على الدائرة Γ_i، المجموعة $\mathcal{L}_i$ المعرّفة كما يلي : تنتمي M إلى $\mathcal{L}_i$ إذا وفقط إذا وقعت الدوائر $\left(\Gamma_j\right)_{j\in\mathbb{N}_n\backslash\{i\}}$ جميعاً في نصف المستوي المفتوح الذي يحوي O_i ويعيّنه المماس المرسوم من M للدائرة Γ_i. نُقنع أنفسنا بسهولة أنّ

$$\mathcal{L}_i = \left\{M \in \Gamma_i : \forall j \in \mathbb{N}_n\backslash\{i\},\ \overrightarrow{O_iM}\cdot\overrightarrow{O_iO_j} < 0\right\}$$

من الواضح أنّ $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{K}_i = \varnothing$، لأنّ انتماء M إلى $\mathcal{K}_i$ يعني أنّ المماس المرسوم من M للدائرة Γ_i يقطع، أو يمس، إحدى الدوائر $\left(\Gamma_j\right)_{j\in\mathbb{N}_n\backslash\{i\}}$، في حين يعنى انتماء M إلى $\mathcal{L}_i$ أنّ المماس المرسوم من M للدائرة Γ_i لا يتقاطع مع أيٍّ من الدوائر $\left(\Gamma_j\right)_{j\in\mathbb{N}_n\backslash\{i\}}$. وعليه نرى أنّ

$$\forall i \in \mathbb{N}_n,\quad \mu(\mathcal{L}_i) + \mu(\mathcal{K}_i) \leq 2\pi \tag{3}$$

لنتأمّل دائرة Γ_0 مركزها O ونصف قطرها يساوي 1. ولتكن

$$\mathcal{N} = \left\{M \in \Gamma_0 : \exists(i,j) \in \mathbb{N}_n^2, (i \neq j) \wedge \left(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{O_iO_j} = 0\right)\right\}$$

لمّا كانت المجموعة $\mathcal{N}$ مجموعة منتهية استنتجنا أنّ $\mu(\Gamma_0\backslash\mathcal{N}) = 2\pi$.

لنعرّف في حالة M من $\Gamma_0\backslash\mathcal{N}$، المقدار $m(M) = \max\limits_{1\leq j\leq n}\left(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OO_j}\right)$. ثُمّ لنعرّف المجموعات $\left(\mathcal{L}'_i\right)_{i\in\mathbb{N}_n}$ كما يلي :

$$\mathcal{L}'_i = \left\{M \in \Gamma_0\backslash\mathcal{N} : m(M) = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OO_i}\right\}$$

ولنبرهن على صحّة الخواص التالية.

❶ $\Gamma_0\backslash\mathcal{N} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_n}\mathcal{L}'_i$.

❷ إذا كان $k \neq j$ كان $\mathcal{L}'_k \cap \mathcal{L}'_j = \varnothing$.

❸ $\forall i \in \mathbb{N}_n,\ \mu(\mathcal{L}'_i) = \mu(\mathcal{L}_i)$.

في الحقيقة، الخاصّة ❶ واضحة من التعريف. ولإثبات الخاصّة ❷، نلاحظ أنّ انتماء M إلى $\mathcal{L}'_k \cap \mathcal{L}'_j$ يعني أنّ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OO_k} = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OO_j}$، ومنه $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{O_kO_j} = 0$ فالنقطة M تنتمي إلى $\mathcal{N}$ وهذا خُلفٌ.

لإثبات النقطة ❸ نتأمّل τ_i الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OO_i}$، أي التطبيق $\vec{v} \mapsto \vec{v} + \overrightarrow{OO_i}$،
ثُمّ نبرهن أنّ $\tau_i(\mathcal{L}_i') = \mathcal{L}_i$.

في الحقيقة، تنتمي النقطة M إلى $\mathcal{L}_i'$ إذا وفقط إذا كان لدينا

$$\forall j \in \mathbb{N}_n \backslash \{i\}, \quad \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OO_j} < \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OO_i}$$

ومن ثَمّ

$$\forall j \in \mathbb{N}_n \backslash \{i\}, \quad \overrightarrow{OM} \cdot \left(\overrightarrow{OO_j} - \overrightarrow{OO_i} \right) < 0$$

أو

$$\forall j \in \mathbb{N}_n \backslash \{i\}, \quad \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{O_iO_j} < 0$$

ولكن $M' = \tau_i(M)$ يُكافئ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O_iM'}$، إذن

$$M \in \mathcal{L}_i' \Leftrightarrow \left(\forall j \in \mathbb{N}_n \backslash \{i\}, \quad \overrightarrow{O_iM'} \cdot \overrightarrow{O_iO_j} < 0 \right) \Leftrightarrow M' \in \mathcal{L}_i$$

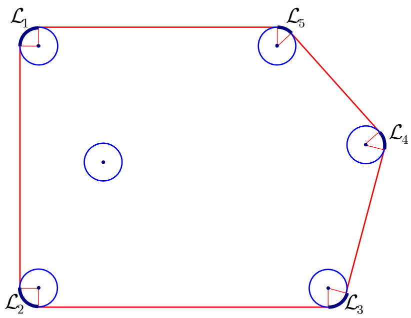
وهذا يبرهن أنّ $\mathcal{L}_i$ هي صورة $\mathcal{L}_i'$ وفق الانسحاب τ_i، ويقتضي أنّ

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \mu(\mathcal{L}_i') = \mu(\mathcal{L}_i)$$

وهي النقطة الثالثة. نستنتج إذن أنّ

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\mathcal{L}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(\mathcal{L}_i') = \mu(\Gamma_0 \backslash \mathcal{N}) = 2\pi \qquad (4)$$

وهو ما يوضّحه الشكل التالي



وبالعودة إلى (3) وجمع المتراجحات طرفاً مع طرفٍ نجد

$$2\pi + \sum_{i=1}^{n} \mu(\mathcal{K}_i) \leq 2\pi n$$

أو

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\mathcal{K}_i) \le 2\pi(n-1)$$

ثُمّ بالعودة إلى (2) نجد

$$\sum_{1\le i\ne j\le n} \varphi_{ij} \le \pi(n-1)$$

وأخيراً إذا استفدنا من كون $\varphi_{ij} \ge \sin(\varphi_{ij}) = \frac{2}{O_iO_j}$، نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n} \frac{4}{O_iO_j} &= \sum_{1\le i\ne j\le n} \frac{2}{O_iO_j}\\ &= \sum_{1\le i\ne j\le n} \sin\varphi_{ij}\\ &\le \sum_{1\le i\ne j\le n} \varphi_{ij} \le \pi(n-1)\end{aligned}$$

أو

$$\sum_{1\le i<j\le n} \frac{1}{O_iO_j} \le \frac{\pi(n-1)}{4}$$

وهي المتراجحة المرجوّة. ■

① **لتكن** $\mathcal{S}$ **مجموعة الأعداد الطبيعيّة** $\mathbb{N}_{10^6}=\{1,2,\ldots,1000000\}$. **ولتكن** A **مجموعة جزئيّة ما من** $\mathcal{S}$ **مؤلّفة من 101 عنصراً. أثبت وجود مئة عنصرٍ** $(x_i)_{1\le i\le 100}$ **من** $\mathcal{S}$ **بأسلوبٍ تكون فيه المجموعات** $(x_i+A)_{i\in\mathbb{N}_{100}}$ **مجموعات منفصلة مثنى مثنى، أي**

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}_{100}^2,\qquad (i\neq j)\Rightarrow(x_i+A)\cap(x_j+A)=\varnothing$$

نذكّر أنّ $a+B=\{a+b:b\in B\}$.

في الحقيقة، أكثر من ذلك صحيح. لنثبت الخاصّة العامّة التالية.

خاصّة : لتكن $\mathcal{S}$ مجموعة جزئيّة من $\mathbb{N}$ مكوّنة من n عنصراً. ولتكن A مجموعة جزئيّة من $\mathcal{S}$ عددُ عناصرها يساوي k. عندئذ إذا تحقّق الشرط

$$n>(m-1)\left(1+\frac{k(k-1)}{2}\right)$$

أمكن إيجاد مجموعة جزئيّة B من $\mathcal{S}$ عددُ عناصرها m وتحقّق أنّ المجموعات $(b+A)_{b\in B}$ مجموعات منفصلة مثنى مثنى.

الإثبات

لنتأمّل المجموعة

$$\begin{aligned}A^* &=\{|a-a'|:(a,a')\in A^2\}\\ &=\{0\}\cup\{a-a':(a,a')\in A^2,a>a'\}\end{aligned}$$

فنرى وضوحاً أنّ

$$\operatorname{card}(A^*)\le 1+C_k^2=1+\frac{k(k-1)}{2}$$

- لنختر b_1 أصغر عنصرٍ من $\mathcal{S}$، أي $b_1=\min\mathcal{S}$، ثُمّ لنعرّف الأعداد $(b_r)_{2\le r\le m}$ تدريجيّاً بالصيغة التالية :

$$b_r=\min\Big(\mathcal{S}\backslash\big(\bigcup_{1\le k<r}(b_k+A^*)\big)\Big)\quad:\quad 2\le r\le m$$

حتّى يكون هذا التعريف سليماً علينا أن نثبتَ أنّ المجموعة $\mathcal{S}\backslash\big(\bigcup_{1\le k<r}(b_k+A^*)\big)$ ليست خالية، مما يتيح تعريف b_r انطلاقاً من $(b_1,b_2,\ldots,b_{r-1})$، وذلك في حالة $2\le r\le m$.

ولكن لدينا وضوحاً

$$\operatorname{card}\Big(\bigcup_{1\le k<r}(b_k+A^*)\Big)\le\sum_{k=1}^{r-1}\operatorname{card}(b_k+A^*)\le(r-1)\operatorname{card}(A^*)$$
$$\le(m-1)\operatorname{card}(A^*)\le(m-1)\big(1+C_k^2\big)$$

إذن

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{S}\backslash\Big(\bigcup_{1\le k<r}(b_k+A^*)\Big)\right)\ge\operatorname{card}(\mathcal{S})-\operatorname{card}\Big(\bigcup_{1\le k<r}(b_k+A^*)\Big)$$
$$\ge n-(m-1)\big(1+C_k^2\big)>0$$

وهذا ما يضمن سلامة تعريف الأعداد $(b_r)_{2\le r\le m}$.

▫ لنرمز، في حالة $1\le r\le m$، بالرمز $\mathcal{T}_r$ إلى المجموعة $\bigcup_{1\le k\le r}(b_k+A^*)$، عندئذ نرى من الواضح أنّ $\mathcal{T}_{r-1}\subset\mathcal{T}_r$ ومن ثَمّ $(\mathcal{S}\backslash\mathcal{T}_r)\subset(\mathcal{S}\backslash\mathcal{T}_{r-1})$ مما يقتضي أنّ $b_{r+1}\ge b_r$. ولكن لمّا كان 0 عنصراً من A^* استنتجنا أنّ b_r ينتمي إلى $\mathcal{T}_r$، فإذا كان $b_{r+1}=b_r$ وصلنا إلى التناقض $b_r\in(\mathcal{S}\backslash\mathcal{T}_r)\cap\mathcal{T}_r$. إذن لا بُدّ أن يكون $b_{r+1}>b_r$ فالمتتالية $(b_r)_{1\le r\le m}$ متتالية متزايدة تماماً. وإذا عرّفنا $B=\{b_r:1\le r\le m\}$ كان $\operatorname{card}\big(B\big)=m$.

▫ ليكن i و j عددين طبيعيّين يُحقّقان $1\le i<j\le m$. ولنفترض على سبيل الجدل وجود عددٍ b ينتمي إلى كلٍّ من b_i+A و b_j+A. عندئذ يوجد في A عددان a و a' يُحقّقان $b=b_j+a'=b_i+a$. نستنتج من المتراجحة $b_j-b_i=a-a'>0$، أنّ

$$b_j=b_i+\underbrace{a-a'}_{\in A^*}\in b_i+A^*\in\mathcal{T}_{j-1}$$

وهذا يتناقض مع تعريف b_j، يُثبتُ هذا التناقض أنّ المجموعات $(b+A)_{b\in B}$ منفصلة مثنى مثنى، وبذا يتمّ إثبات الخاصّة المرجوّة.

في حالة المسألة المطروحة، لدينا $n=10^6$ و $k=101$ و $m=100$. ومن الواضح أنّ

$$n=10^6>(m-1)\left(1+\frac{k(k-1)}{2}\right)=99(1+50\times101)=500049$$

في الحقيقة، يمكن إيجاد مجموعة B مؤلّفة من 197 عنصراً بأسلوبٍ تكون فيه المجموعات $(b+A)_{b\in B}$ مجموعات منفصلة مثنى مثنى. ■

② **أوجد جميع أزواج الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً (a,b) التي يكون عندها العددُ**
$$\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$$
عدداً طبيعيّاً.

لنرمز أوّلاً بالرمز $\mathcal{S}$ إلى مجموعة الأزواج (a,b) من $\mathbb{N}^{*2}$ التي تجعل المقدار
$$\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$$
عدداً طبيعيّاً، (بالضرورة موجبٌ تماماً لأنّ $a>0$).

- لنلاحظ أوّلاً أنّ $(a,1)$ ينتمي إلى $\mathcal{S}$ إذا وفقط إذا كان $2 \mid a$.

نتأمّل فيما يلي عنصراً (a,b) من $\mathcal{S}$ يُحقّق $b>1$. ونعرّف العدد k من $\mathbb{N}^*$ بالصيغة
$$k=\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1} \qquad (1)$$

- لّما كان $(2a-b)b^2+1\geq 1$ استنتجنا أنّ $2a\geq b$.
- إذا كان $a\leq b<2a$ كان $(2a-b)b^2+1\geq a^2+1$، وهذا يقتضي أنّ
$$k=\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}\leq\frac{a^2}{a^2+1}<1$$
وهذا خُلفٌ واضحٌ. إذن لقد أثبتنا أنّ
$$((a,b)\in\mathcal{S})\wedge(b>1)\Rightarrow(b=2a)\vee(b<a) \qquad (2)$$
- في حالة $b<a$ نستنتج من (1) أنّ
$$(2kb^2-a)a=k(b^3-1)>0$$
فإذا عرّفنا $a'=2kb^2-a$ استنتجنا من المساواة السابقة أنّ $aa'=k(b^3-1)>0$ وأنّ $(2kb^2-a')a'=k(b^3-1)$. هذا يقتضي أنّ $a'\in\mathbb{N}^*$ وأنّ الزوج (a',b) ينتمي إلى $\mathcal{S}$.

ليكن $\alpha^+=\max(a,a')$ و $\alpha^-=\min(a,a')$. نستنتج من كون
$$\alpha^-+\alpha^+=2kb^2$$
أنّ $\alpha^+\geq kb^2$، وهذا يقتضي أنّ $kb^2\alpha^-\leq\alpha^+\alpha^-=k(b^3-1)$ إذن
$$b^2\alpha^-\leq b^3-1<b^3$$
أو $\alpha^-<b$، ولكن نعلم أنّ $a<b$، فلا بُدّ أن يكون $\alpha^-=a'$ و $\alpha^+=a$.

ولكن نستنتج من $a' < b$ ومن (2) أنّ $2a' = b$.

إذن نستنتج من كون $a' = 2kb^2 - a$ و $aa' = k\left(b^3 - 1\right)$ أنّ

$$a = 8ka'^2 - a' \quad \text{و} \quad aa' = 8ka'^3 - k$$

وهذا يقتضي أنّ $k = a'^2$، إذن $(a,b) = \left(8a'^4 - a', 2a'\right)$.

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّه إذا كان (a,b) عنصراً من $\mathcal{S}$ يُحقّق $1 < b < a$ وُجِدَ عددٌ طبيعي موجبٌ تماماً ℓ يُحقّق $(a,b) = \left(8\ell^4 - \ell, 2\ell\right)$.

فإذا عُدنا إلى (2) استنتجنا أنّ

$$\mathcal{S} \subset \left\{(2\ell,1) : \ell \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{(\ell, 2\ell) : \ell \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{\left(8\ell^4 - \ell, 2\ell\right) : \ell \in \mathbb{N}^*\right\}$$

وبالعكس، نتيقّن بالتعويض المباشر أنّ جميع عناصر المجموعة السابقة هي حلولٌ للمسألة المطروحة.

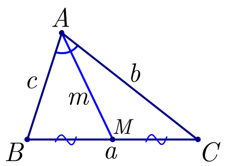
ومنه

$$\mathcal{S} = \left\{(2\ell,1) : \ell \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{(\ell, 2\ell) : \ell \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{\left(8\ell^4 - \ell, 2\ell\right) : \ell \in \mathbb{N}^*\right\}$$

وبذا يتمّ الإثبات.

③ نتأمّل مضلّعاً سداسيّاً محدّباً يُحقّق الخاصّة التالية : المسافة بين منتصفَي كلِّ ضلعين متقابلين في المضلّع تساوي مجموع طوليهما مضروباً بالعدد $\frac{\sqrt{3}}{2}$. أثبت أنّ زوايا هذا المضلّع متساوية.

سنستفيد من الخاصّة التالية.



تمهيد : ليكن ABC مثلّثاً فيه $\widehat{A} \geq \frac{\pi}{3}$. ولتكن النقطة M منتصف $[BC]$. عندئذ تتحقّق المتراجحة $AM \leq \frac{\sqrt{3}}{2} BC$، وتقع المساواة إذا وفقط إذا كان المثلّث ABC مثلّثاً متساوي الأضلاع.

الإثبات

لنرمز كالعادة a و b و c إلى أطوال الأضلاع $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$، ولنرمز m إلى طول المتوسّط $[AM]$. لدينا من جهة أولى

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

ولكن $-2bc = (b-c)^2 - \left(b^2 + c^2\right)$ إذن

$$a^2 = \left(b^2 + c^2\right)\left(1 - \cos\widehat{A}\right) + (b-c)^2 \cos\widehat{A}$$

ونستنتج من متطابقة متوازي الأضلاع أنّ $4m^2+a^2=2\left(b^2+c^2\right)$ إذن

$$2a^2=\left(4m^2+a^2\right)\left(1-\cos\widehat{A}\right)+2(b-c)^2\cos\widehat{A}$$

أو

$$\begin{aligned}4m^2&=\left(\frac{1+\cos\widehat{A}}{1-\cos\widehat{A}}\right)a^2-(b-c)^2\frac{2\cos\widehat{A}}{1-\cos\widehat{A}}\\&=\left(\frac{1+\cos\widehat{A}}{1-\cos\widehat{A}}\right)a^2+(b-c)^2\left(1-\frac{1+\cos\widehat{A}}{1-\cos\widehat{A}}\right)\\&=\left(a^2-(b-c)^2\right)\cot^2\left(\tfrac{1}{2}\widehat{A}\right)+(b-c)^2\end{aligned}$$

ولكن $a\geq|b-c|$ لأنّ a و b و c هي أطوال أضلاع مثلّثٍ. والتطبيق $\theta\mapsto\cot^2(\theta)$ متناقصٌ تماماً على المجال $]0,\frac{\pi}{2}]$. إذن في حالة $\widehat{A}\geq\frac{\pi}{3}$ لدينا $\frac{\pi}{2}\geq\frac{1}{2}\widehat{A}\geq\frac{\pi}{6}$ ومن ثَمّ $\cot^2\left(\frac{1}{2}\widehat{A}\right)\leq\cot^2\left(\frac{\pi}{6}\right)=3$ مع مساواة إذا وفقط إذا كان $\widehat{A}=\frac{\pi}{3}$. نستنتج أنّ

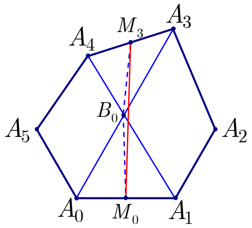
$$4m^2\leq 3a^2-2(b-c)^2\leq 3a^2$$

مع مساواة إذا وفقط إذا كان $b=c$ و $\widehat{A}=\frac{\pi}{3}$. وهذا يُنجز إثبات التمهيد.

لنأتِ إلى مسألتنا، ولنتأمّل المضلّع السداسي $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ الذي يُحقّق الخاصّة المبيّنة في النص. ولنرمز d_0 و d_1 و d_2 إلى الأقطار (A_0A_3) و (A_1A_4) و (A_2A_5) بالترتيب. لمّا كان

$$\left(\widehat{d_0,d_1}\right)+\left(\widehat{d_1,d_2}\right)+\left(\widehat{d_2,d_0}\right)=0 \bmod \pi$$

استنتجنا أنّ واحدة من الزوايا $\left(\widehat{d_0,d_1}\right)$ أو $\left(\widehat{d_1,d_2}\right)$ أو $\left(\widehat{d_2,d_0}\right)$ أكبر أو تساوي $\frac{\pi}{3}$.



إذن يمكن، دون الإقلال من عموميّة الإثبات، أن نفترض أنّ $\left(\widehat{d_0,d_1}\right)\geq\frac{\pi}{3}$. لتكن B_0 نقطة تقاطع المستقيمين d_0 و d_1، وليكن M_0 و M_3 منتصفَي الضلعين $[A_0A_1]$ و $[A_3A_4]$. بتطبيق التمهيد على المثلّثين $B_0A_0A_1$ و $B_0A_3A_4$ حيث تتحقّق في كلٍّ منهما المتراجحة $\widehat{B_0}\geq\frac{\pi}{3}$، نجد

$$B_0M_3\leq\frac{\sqrt{3}}{2}A_3A_4 \quad \text{و} \quad B_0M_0\leq\frac{\sqrt{3}}{2}A_0A_1$$

ولكن استناداً إلى الفرْض لدينا

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(A_0A_1+A_3A_4\right)=M_0M_3\leq B_0M_0+B_0M_3$$

فلا بُدّ أن يكون

$$B_0M_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}A_0A_1 \text{ و } B_0M_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}A_3A_4 \text{ و } M_0M_3 = B_0M_0 + B_0M_3$$

وهذا يقتضي أنّ المثلّثين $B_0A_0A_1$ و $B_0A_3A_4$ متساويَي الأضلاع، وأنّ النقطة B_0 تقع على المستقيم (M_0M_3)، أي أنّ

$$(A_0A_1) \parallel (A_3A_4) \text{ و } \widehat{A_0A_1A_4} = \widehat{A_1A_0A_3} = \widehat{A_0A_3A_4} = \widehat{A_1A_4A_3} = \frac{\pi}{3}$$

ونستنتج بوجه خاصٍّ أنّ $\frac{\pi}{3} = \widehat{B_0} = (\widehat{d_0, d_1})$. إذن لا بُدّ أن يكون

$$(\widehat{d_1, d_2}) + (\widehat{d_2, d_0}) = \frac{2\pi}{3} \bmod \pi$$

وهذا يقتضي أنّ واحدة من الزاويتين $(\widehat{d_1, d_2})$ أو $(\widehat{d_2, d_0})$ أكبر أو تساوي $\frac{\pi}{3}$. ويمكن، دون الإقلال من عموميّة الإثبات، أن نفترض أنّ $\frac{\pi}{3} \geq (\widehat{d_1, d_2})$. عندئذ بأسلوب مماثلٍ لما سبق نستنتج أنّ $\frac{\pi}{3} = (\widehat{d_1, d_2})$ وأنّ

$$(A_1A_2) \parallel (A_4A_5) \text{ و } \widehat{A_1A_2A_5} = \widehat{A_2A_1A_4} = \widehat{A_1A_4A_5} = \widehat{A_2A_5A_4} = \frac{\pi}{3}$$

وهذا بدوره يقتضي أنّ $\frac{\pi}{3} = (\widehat{d_2, d_0})$ ومن ثَمّ

$$(A_2A_3) \parallel (A_5A_0) \text{ و } \widehat{A_2A_3A_0} = \widehat{A_3A_2A_5} = \widehat{A_2A_5A_0} = \widehat{A_3A_0A_5} = \frac{\pi}{3}$$

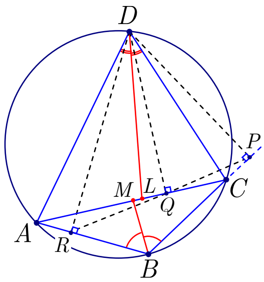
وما سبق يبرهن على أنّ جميع زوايا المضلّع تساوي $\frac{2\pi}{3}$. وبذا يتمّ الإثبات. ■

④ **نتأمّل رباعيّاً دائريّاً $ABCD$. لتكن P و Q و R المساقط القائمة للنقطة D على المستقيمات (BC) و (CA) و (AB) بالترتيب. أثبت أنّ $PQ = QR$ إذا وفقط إذا انتمت نقطة تقاطع منصّفي الزاويتين $\widehat{ABC}$ و $\widehat{ADC}$ إلى المستقيم (AC).**

نطابق بين المستوي، وحقل الأعداد العقديّة. يمكننا دون الإخلال بالعموميّة أن نفترض أنّ الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC هي الدائرة المثلّثيّة، وأنّ الأعداد العقديّة a و b و c و d تمثّل النقاط A و B و C و D. **ملاحظة** : لا نفترض أنّ D واقعة على الدائرة المثلّثيّة.

ليكن p العدد العقدي الذي يمثّل النقطة P. عندئذ يوجد عددان حقيقيّان t و s يُحقّقان

$$p = b + s(c - b) = d + \mathrm{i}\,t(c - b)$$



ومنه نستنتج أنّ $\frac{d-b}{c-b} = s - \mathrm{i}t$، ومن ثَمّ

$$s + \mathrm{i}t = \overline{\left(\frac{d-b}{c-b}\right)} = cb\cdot\frac{\bar b - \bar d}{c-b}$$

وعليه $\mathrm{i}t(c-b) = \frac{1}{2}\left(c+b-d-cb\bar d\right)$. وأخيراً

$$p = \frac{1}{2}\left(c+b+d-cb\bar d\right)$$

وبالمماثَلة، إذا رمزنا q و r إلى العددين العقديين اللذين يمثّلان Q و R نجد

$$r = \frac{1}{2}\left(b+a+d-ab\bar d\right) \quad \text{و} \quad q = \frac{1}{2}\left(a+c+d-ac\bar d\right)$$

وعليه نرى أنّ

$$\begin{aligned} PQ &= |q-p| = \frac{1}{2}|a-b|\left|1-c\bar d\right| = \frac{1}{2}|a-b|\left|\bar c-\bar d\right| \\ &= \frac{1}{2}|a-b||c-d| = \frac{1}{2}AB\cdot CD \\ RQ &= |r-p| = \frac{1}{2}|b-c|\cdot\left|1-a\bar d\right| = \frac{1}{2}|b-c|\cdot\left|\bar a-\bar d\right| \\ &= \frac{1}{2}|b-c|\cdot|a-d| = \frac{1}{2}BC\cdot AD \end{aligned}$$

وهكذا نرى أنّ

$$PQ = QR \Leftrightarrow AB\cdot CD = BC\cdot AD \Leftrightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}$$

لنتأمّل من جهة ثانية النقطة M نقطة تقاطع منصّف الزاوية $\widehat{ABC}$ مع المستقيم (AC)، والنقطة L نقطة تقاطع منصّف الزاوية $\widehat{ADC}$ مع المستقيم (AC) نفسه. نعلم أنّ M تقسم الضلع $[AC]$ بنسبة طولَي الضلعين $[AB]$ و $[AC]$، إذن تتعيّن M على القطعة المستقيمة $[AC]$ بالمساواة $\frac{MA}{MC} = \frac{BA}{BC}$. وبالأسلوب نفسه تتعيّن L على القطعة المستقيمة $[AC]$ بالمساواة $\frac{LA}{LC} = \frac{DA}{DC}$. نستنتج إذن أنّ

$$PQ = QR \Leftrightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{LA}{LC} \Leftrightarrow M = L$$

وعليه يكون $PQ = QR$ إذا وفقط إذا تلاقى منصفا الزاويتين $\widehat{ABC}$ و $\widehat{ADC}$ في نقطة من (AC). وبذا يتمّ الإثبات. ■

⑤ ليكن n عدداً طبيعيّاً موجباً تماماً. ولتكن $(x_k)_{1\le k\le n}$ جملة متزايدة من الأعداد الحقيقيّة.

❶ أثبت أنّ

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2\le\frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2$$

❷ أثبت أنّ المساواة في المتراجحة السابقة تقع إذا وفقط إذا كانت الحدود $(x_k)_{1\le k\le n}$ حدود متتالية حسابيّة.

لنكتب $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$، ولنعرّف $y_i=x_i-\bar{x}$ في حالة $1\le i\le n$. فيكون

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|=\sum_{i,j=1}^{n}|y_i-y_j|&=2\sum_{1\le i<j\le n}(y_j-y_i)\\&=2\sum_{1\le i<j\le n}y_j-2\sum_{1\le i<j\le n}y_i\\&=2\sum_{j=2}^{n}(j-1)y_j-2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)y_i\\&=2\sum_{k=1}^{n}(2k-1-n)y_k\end{aligned}$$

إذن

$$\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|=2\sum_{k=1}^{n}(2k-1-n)y_k \qquad (1)$$

ومن جهة ثانية، لدينا

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2=\sum_{i,j=1}^{n}(y_i-y_j)^2&=\sum_{i,j=1}^{n}y_i^2+\sum_{i,j=1}^{n}y_j^2-2\sum_{i,j=1}^{n}y_iy_j\\&=2n\cdot\sum_{k=1}^{n}y_k^2-2\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)^2}_{0}\end{aligned}$$

إذْ استفدنا من كون $\sum_{k=1}^{n}y_k=n\bar{x}-n\bar{x}=0$. إذن

$$\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2=2n\cdot\sum_{k=1}^{n}y_k^2 \qquad (2)$$

ولكن، استناداً إلى متراجحة كوشي-شوارتز لدينا

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1-n)y_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1-n)^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right) \qquad (3)$$

مع مساواة، إذا وفقط إذا وُجِدَ عددٌ حقيقي λ يُحقّق

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad y_k = \lambda(2k-1-n) \qquad (4)$$

ولكن

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1-n)^2 &= 4\sum_{k=1}^{n}k^2 - 4(n+1)\sum_{k=1}^{n}k + (n+1)^2\sum_{k=1}^{n}1\\ &= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} - 2n(n+1)^2 + n(n+1)^2\\ &= \left(\frac{n(n+1)}{3}\right)(2(2n+1)-3(n+1))\\ &= \frac{n(n^2-1)}{3}\end{aligned}$$

فإذا عوّضنا (1) و (2) في (3) واستفدنا من الحساب السابق استنتجنا أنّ

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3}\cdot\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2$$

وهي المتراجحة المطلوبة.

وبناءً على (4)، تقع المساواة في هذه المتراجحة، إذا وُجِدَ عددٌ حقيقي λ يُحقّق

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad x_k = 2\lambda\left(k-\frac{n+1}{2}\right) + \overline{x}$$

وهذا يقتضي أنّ المتتالية المتزايدة $(x_k)_{1\le k\le n}$ متتالية حسابيّة.

وبالعكس، إذا كوّنت حدود المتتالية المتزايدة $(x_k)_{1\le k\le n}$ متتالية حسابيّة. وُجِدَ عددان حقيقيّان a و b يُحقّقان $x_k = ak+b$ في حالة $1\le k\le n$، مع $a\ge 0$. وعندئذ يكون لدينا $\overline{x} = a\frac{n+1}{2}+b$، ومن ثَمّ $x_k = a\left(k-\frac{n+1}{2}\right)+\overline{x}$ في حالة k من $\mathbb{N}_n$. فنكون قد أثبتنا أنّ كون $(x_k)_{1\le k\le n}$ متتالية حسابيّة هو الشرط اللازم والكافي لوقوع المساواة في المتراجحة المطلوبة. وبذا يتمّ الإثبات. ◼

⑥ **ليكن p عدداً أوّليّاً. أثبت وجود عددٍ أوّلي q يُحقّق**

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad q \nmid (n^p - p)$$

لنتأمّل العددَ الطبيعي λ_p المعرّف بالصيغة

$$\lambda_p = \frac{p^p - 1}{p-1} = 1 + p + \cdots + p^{p-1}$$

▫ نلاحظ، من جهة أولى، أنّ $\lambda_p = 1 + p \bmod p^2$، إذن لا يمكن أن تساوي جميعُ القواسمّ الأوّليّة للعدد λ_p العددَ 1 بالقياس p^2، (وإلاّ ساوى جداء ضربها λ_p العدد 1 بالقياس p^2). وهكذا نستنتج وجود قاسمٍ أوّلي q للعدد λ_p يُحقّق $q \neq 1 \bmod p^2$.

▫ سنثبتُ أنّ العددَ q يُحقّق الخاصّة المرجوّة. لنفترض على سبيل الجدل وجود عددٍ صحيح n يُحقّق $q \mid (n^p - p)$. أي $n^p = p \bmod q$.

عندئذ، لّما كان $q \mid \lambda_p$ و $\lambda_p \mid (p^p - 1)$ نستنتج أنّ $n^{p^2} = p^p \bmod q = 1 \bmod q$.

لتكن r رتبة العدد n في $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. أي $r = \min\{k > 0 : n^k = 1 \bmod q\}$ عندئذ يكون r قاسماً للعدد $q - 1$ لأن عدد عناصر الزمرة الضربيّة $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ يساوي $q - 1$. ويكون r قاسماّ للعدد p^2 لأنّ $n^{p^2} = 1 \bmod q$.

- فإذا كان $r = p^2$ استنتجا أنّ $p^2 \mid (q-1)$، وهذا خُلفٌ لأنّ $q \neq 1 \bmod p^2$.
- وإذا كان $r \in \{1, p\}$. استنتجا أنّ $n^p = 1 \bmod q$، ومنه $p = 1 \bmod q$.

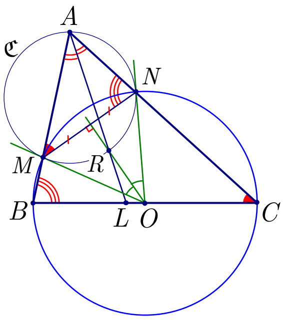
وعندئذ نستنتج من المساواة التي تعرّف λ_p أنّ

$$\lambda_p = \sum_{k=0}^{p-1} p^k = \sum_{k=0}^{p-1} (1 \bmod q) = p \bmod q$$

ولكن $q \mid \lambda_p$، إذن $q \mid p$ وهذا خُلفٌ أيضاً لأنّ p عددٌ أوّلي.

نستنتج من التناقض السابق عدم وجود عددٍ صحيح n يُحقّق $q \mid (n^p - p)$. وهذا يبرهن صحّة الخاصّة المطلوبة. ◩

① **ليكن ABC مثلّثاً حادّ الزوايا فيه $AB \neq AC$. نفترض أنّ الدائرة التي قطرها $[BC]$ تقطع الضلعين $[AB]$ و$[AC]$ في M و N بالترتيب. نسمّي O منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$، ونسمّي R نقطة تقاطع منصفَي الزاويتين $\widehat{BAC}$ و $\widehat{MON}$. أثبت أنّ الدائرتين المارتين برؤوس المثلّثين BMR و CNR بالترتيب، تتقاطعان في نقطة واقعة على الضلع $[BC]$.**



▪ لنلاحظ أوّلاً أنّ A تقع خارج الدائرة التي قطرها $[BC]$، لأنّ المثلّث ABC حادّ الزوايا.

▪ كما نستنتج من كون الرباعي $BCNM$ رباعيّاً دائريّاً أنّ $\widehat{NMA} = \widehat{C}$ و $\widehat{MNA} = \widehat{B}$. والشرط $AB \neq AC$ يقتضي أنّ $\widehat{C} \neq \widehat{B}$ ومن ثَمّ $AM \neq AN$.

▪ لّما كان المثلّث MON مثلّثاً متساوي الساقين استنتجنا أنّ منصّف الزاوية $\widehat{MON}$ هو نفسه محور القطعة المستقيمة $[MN]$. فالنقطة R هي نقطة تقاطع محور الضلع $[MN]$ ومنصّف الزاوية $\widehat{MAN}$ في المثلّث MAN . إذْ يتقاطع هذان المستقيمان بسبب كون $AM \neq AN$.

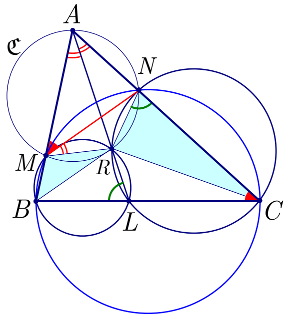
▪ لتكن $\mathfrak{C}$ الدائرة المارّة برؤوس المثلّث AMN . يمرّ محور القطعة المستقيمة $[MN]$ بمنتصف القوس $\widehat{MN}$ الذي يُقابل الرأس A من الدائرة $\mathfrak{C}$. وكذلك يمر منصّف الزاوية $\widehat{MAN}$ بمنتصف القوس $\widehat{MN}$ نفسه. إذن النقطة R هي النقطة من الدائرة $\mathfrak{C}$ الواقعة في منتصف القوس $\widehat{MN}$ الذي يُقابل الرأس A .

▪ بملاحظة أنّ $\widehat{NOC} = \pi - 2\widehat{C}$ و $\widehat{MOB} = \pi - 2\widehat{B}$ نستنتج أنّ

$$\widehat{MON} = \pi - \left(\pi - 2\widehat{C}\right) - \left(\pi - 2\widehat{B}\right) = 2\widehat{B} + 2\widehat{C} - \pi = \pi - 2\widehat{A}$$

إذن $\widehat{MNO} = \widehat{NMO} = \widehat{A}$.

و على الخصوص، يبرهن هذا أنّ المستقيمين (ON) و (OM) يمسّان الدائرة $\mathfrak{C}$. والنقطة R تقع داخل المثلّث MON فهي إذن تقع داخل المثلّث ABC . لنسمِّ L نقطة تقاطع منصّف الزاوية $\widehat{BAC}$ مع الضلع المقابل $[BC]$. فنستنتج مما سبق أنّ R تقع داخل القطعة المستقيمة $[AL]$.



▪ من الرباعي الدائري $AMRN$، نستنتج أنّ

$$\widehat{RNC} = \widehat{RMA} = \widehat{RMN} + \widehat{NMA}$$
$$= \tfrac{1}{2}\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{BLR}$$
$$\widehat{RMB} = \widehat{RNA} = \widehat{RNM} + \widehat{MNA}$$
$$= \tfrac{1}{2}\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{CLR}$$

وهذا يبرهن أنّ الرباعيين $LRNC$ و $LRMB$ رباعيّان دائريان، فالدائرة المارّة برؤوس المثلّث RNC والدائرة المارّة برؤوس المثلّث RMB تشتركان بالنقطة L من $[BC]$. وهذا يبرهن صحّة الخاصّة المطلوبة. وبذا يتمّ الإثبات.

② **أوجد جميع كثيرات الحدود الحقيقيّة P من $\mathbb{R}[X]$ التي تُحقّق**

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

وذلك مهما كانت الأعداد الحقيقيّة a و b و c التي تُحقّق $ab+bc+ca=0$.

لنتأمّل كثير حدود P يُحقّق الخاصّة المنصوص عنها.

▪ باختيار $a=b=0$، تتحقّق المساواة $ab+bc+ca=0$ أيّاً كانت قيمة c، ومن ثَمّ

$$\forall c \in \mathbb{R},\quad P(0) + P(-c) = P(c)$$

فإذا اخترنا $c=0$ استنتجنا أنّ $P(0)=0$، ثُمّ إذا عُدنا إلى المساواة السابقة استنتجنا أنّ $\forall c \in \mathbb{R}, P(-c) = P(c)$، فكثير الحدود P زوجي وينعدم عند 0. إذن يأخذ P الصيغة التالية

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{2k}$$

▪ وهنا نلاحظ أنّه إذا وضعنا

$$c = -x\alpha(1-\alpha) \text{ و } b = x(1-\alpha) \text{ و } a = x\alpha$$

تحقّقت المساواة $ab+bc+ca=0$. وكان من ثَمّ

$$P(x(2\alpha-1)) + P\big(x(\alpha^2-1)\big) + P\big(x(\alpha^2-2\alpha)\big) = 2P\big(x(1-\alpha+\alpha^2)\big)$$

وذلك أيّاً كانت قيمة α و x من $\mathbb{R}$.

وبمقارنة أمثال x^{2n} في طرفَي المساواة السابقة نستنتج

$$(1)\quad (2\alpha-1)^{2n}+\left(\alpha^2-1\right)^{2n}+\left(\alpha^2-2\alpha\right)^{2n}=2\left(1-\alpha+\alpha^2\right)^{2n}$$

وذلك مهما كانت قيمة α.

فيما يلي سنكتب $[Q]\{\alpha^2\}$ للدلالة على أمثال α^2 في كثير حدودٍ Q. لنفترض أنّ $n>1$، عندئذ يكون لدينا

$$\left[(2\alpha-1)^{2n}\right]\{\alpha^2\}=4n(2n-1)$$

$$\left[\left(\alpha^2-1\right)^{2n}\right]\{\alpha^2\}=-2n$$

$$\left[\left(\alpha^2-2\alpha\right)^{2n}\right]\{\alpha^2\}=0$$

$$\left[\left(1-\alpha+\alpha^2\right)^{2n}\right]\{\alpha^2\}=2n+n(2n-1)$$

وعليه، نستنتج من (1)، بمقارنة أمثال α^2، أنّ

$$4n(2n-1)-2n=2(2n+n(2n-1))$$

وهذا يُكافئ $n=2$. وهكذا نرى أنّ $P=a_1X^2+a_2X^4$.

- وبالعكس، لنبرهن أنّ كلاً من كثيرَي الحدود X^2 و X^4 يُحقّق الخاصّة المرجوّة.
  - حالة $P(X)=X^2$. في الحقيقة،

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right)$$

$$2(a+b+c)^2=2\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\right)$$

ومن ثَمّ

$$2(a+b+c)^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2=6(ab+bc+ac)$$

فإذا كان $ab+bc+ca=0$ كان

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a+b+c)^2$$

وهذا ما يُثبتُ الخاصّة المرجوّة في حالة $P(X)=X^2$.

  - حالة $P(X)=X^4$. لنضع كالعادة

$$\sigma_1=a+b+c \quad \text{و} \quad \sigma_2=ab+bc+ca \quad \text{و} \quad \sigma_3=abc$$

عندئذ

$$a^2+b^2+c^2=\sigma_1^2-2\sigma_2$$

وكذلك

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &= \sigma_1\left(a^2+b^2+c^2\right)-\sigma_2(a+b+c)+3\sigma_3 \\ &= \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3 \\ a^4+b^4+c^4 &= \sigma_1\left(a^3+b^3+c^3\right)-\sigma_2\left(a^2+b^2+c^2\right)+\sigma_3\sigma_1 \\ &= \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2 \end{aligned}$$

وعليه إذا وضعنا $\Delta=(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4$ كان

$$\begin{aligned} \Delta = {} & 2a^4+2b^4+2c^4-4a^3(b+c)-4b^3(c+a)-4c^3(a+b) \\ & +6\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned} \Delta &= 2a^4+2b^4+2c^4-4a^3(\sigma_1-a)-4b^3(\sigma_1-b)-4c^3(\sigma_1-c) \\ &\quad +6(ab+bc+ca)^2-12abc(a+b+c) \\ &= 6\left(a^4+b^4+c^4\right)-4\sigma_1\left(a^3+b^3+c^3\right)+6\sigma_2^2-12\sigma_1\sigma_3 \\ &= 2\sigma_1^4+6\sigma_2\left(3\sigma_2-2\sigma_1^2\right) \end{aligned}$$

وهكذا نرى أنّه تحت الشرط $\sigma_2=ab+bc+ca=0$ يكون $\Delta=2\sigma_1^4$ وهي الخاصّة المطلوبة.

- إذن لقد أثبتنا أنّ مجموعة كثيرات الحدود P التي تحقّق

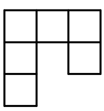
$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

أيّاً كان (a,b,c) من $\mathbb{R}^3$، مع $ab+bc+ca=0$. هي

$$\left\{\alpha X^2+\beta X^4:(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

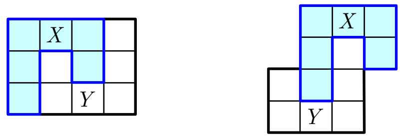
وهي النتيجة المطلوبة.

③ نسمّي «خطّافاً» كلّ شكل مكوّن من ستة مربّعاتٍ واحدةٍ مماثل للشكل المجاور أو ينتج عن هذا الشكل بتطبيق دورانات أو تناظرات. يُطلب تعيين جميع المستطيلات التي أبعادها $n\times m$ ويمكن تغطيتها تغطية كاملة بخطّافات غير متقاطعة، ولا يتجاوز أيٌّ منها محيط المستطيل إلى خارجه.



التحليل.

■ عند أيِّ رَصْفٍ لمستطيل في المستوي بخطّافات، نلاحظ أنّه، في حالة خطّاف X ، هناك خطّافٌ وحيدٌ Y يغطّي المربّع الداخلي في X ، وذلك يكون بواسطة أحد مربّعَيْ الطرفين من Y . وعندئذ يُغطّي X ، بواسطة أحد مربّعَي طرفيه، المربّع الداخلي في Y . وعليه، هناك فقط طريقتان لوضع Y إلى جانب X دون أن يتقاطع الخطّافان أو تبقى ثغرة بينهما. في إحدى هاتين الطريقتين يؤلّف اجتماع هذين الخطّافين مستطيلاً T بُعداه 4×3 ، وفي الثانية يؤلّف اجتماعهما شكلاً ثُمانيّاً O أطوال أضلاعه $3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2$. كما هو مبيّن بالشكل التالي :



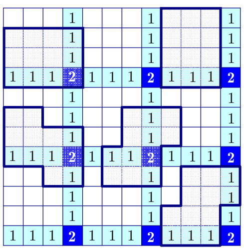
T $\qquad$ O

■ لنتأمّل مستطيلاً R بُعداه $m \times n$ ، ولنفترض أنّه بالإمكان تغطيته تغطية كاملة بخطّافات غير متقاطعة، ولا يتجاوز أيٌّ منها محيطه. هذا يعني أنّه بالإمكان تغطية R تغطيةً كاملة بقطع غير متقاطعة من النمط T أو O دون أن يتجاوز أيٌّ منها محيطه. عندئذ، لمّا كان كلٌّ من T و O مكوّناً من اثني عشر مربّع واحدةٍ استنتجنا أنّ 12 يقسم mn ، وخصوصاً $3 \mid n$ أو $3 \mid m$.

■ لنفترض على سبيل الجدل أنّ $4 \nmid n$ و $4 \nmid m$ ، عندئذ يكون n و m زوجيّان لأنّ $4 \mid nm$. لنكتب المستطيل R اجتماع مربّعاتٍ واحدةٍ كما يلي :

$$R = \bigcup_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_m} C_{ij}$$

مع $C_{ij} = [i-1, i] \times [j-1, j]$ ، ولنعرّف في حالة عددٍ طبيعي k العدد $\chi(k)$ بأنّه يساوي 1 إذا كان $4 \mid k$ ويساوي 0 إذا كان $4 \nmid k$. وأخيراً لنقرن بكلِّ مربّع C_{ij} العدد $\lambda_{ij} = \chi(i) + \chi(j)$. فيكون $\lambda_{ij} = 2$ إذا وفقط إذا كان $4 \mid i$ و $4 \mid j$ ، ويكون $\lambda_{ij} = 1$ إذا كان 4 يقسم i أو j دون أن يقسمهما معاً.



عندئذ نجد بملاحظة الأشكال المختلفة ودون عناء أنّ

$$\sum_{C_{ij}\subset O} \lambda_{ij} \in \{5, 7\} \text{ و } \sum_{C_{ij}\subset T} \lambda_{ij} \in \{3, 7\}$$

في حين يكون لدينا

$$\sum_{C_{ij}\subset R} \lambda_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\chi(i) + \chi(j)) = n\sum_{i=1}^{m}\chi(i) + m\sum_{j=1}^{n}\chi(j) \in 2\mathbb{N}$$

إذن لا بُدّ أن يكون عددُ القطع من النمط T أو O التي تغطّي R زوجيّاً، وهذا يقتضي أنّ العدد 24 يقسم nm، ومن ثَمّ $8 \mid nm$ فلا بُدّ أن يقسم العدد 4 أحد العددين n أو m، وهذا خُلفٌ. يُثبتُ هذا التناقض أنّ $4 \mid n$ أو $4 \mid m$.

- من جهة أخرى، من الواضح أنّ أيّاً من العددين n أو m لا يساوي 1 أو 2 أو 5.
- لتكن إذن $\mathcal{S}$ مجموعة الثنائيّات من $\mathbb{N}^{*2}$ التي تُحقّق ما يلي

$$(n \notin \{1,2,5\}) \wedge (m \notin \{1,2,5\}) \wedge (3 \mid mn) \wedge ((4 \mid n) \vee (4 \mid m))$$

فتكون قد أثبتنا أنّه إذا أمكن تغطية مستطيل $m \times n$ تغطية كاملة بخطّافات غير متقاطعة، ولا يتجاوز أيٌّ منها محيطه. كانت (m,n) عنصراً من المجموعة $\mathcal{S}$.

التركيب.

لتكن (m,n) من $\mathcal{S}$. ولنبرهن أنّه بالإمكان تغطيّة مستطيل R بعداه $m \times n$ بقطع من النمط T تغطية كاملة دون تقاطعات ودون تجاوز محيط المستطيل.

- في حالة $(m,n) = (3k, 4k')$ أو $(m,n) = (4k, 3k')$ النتيجة واضحة، برصف kk' مستطيلاً من النمط T.

- في حالة $(m,n) = (12k, n)$ مع $\gcd(12,n) = 1$، و $n \notin \{1,2,5\}$. بإجراء قسمة إقليديّة للعدد n على 3 نجد $n = 3q + r$ مع $r \in \{1,2\}$ لأنّ $3 \nmid n$، كما إنّ $q \geq 2$.

    - فإذا كان $r = 1$ كتبنا $n = 4 + (q-1) \times 3$، ونتج من ذلك أنّ المستطيل R يُكتب بشكل اجتماع مستطيلين $(3(4k)) \times 4$ و $(4(3k)) \times (3(q-1))$ وكلٌّ منهما من النوع السابق، الذي تمّت معالجته.

    - وإذا كان $r = 2$ كتبنا $n = 2 \times 4 + (q-2) \times 3$. ونتج من ذلك أنّ المستطيل R يُكتب بشكل اجتماع مستطيلين $(3(4k)) \times 8$ و $(4(3k)) \times (3(q-2))$ وكلٌّ منهما من النوع السابق، الذي تمّت معالجته.
- ونُعالج بالمثل حالة $(m,n) = (m, 12k)$ مع $\gcd(m,12) = 1$ و $m \notin \{1,2,5\}$.

فالمجموعة المطلوبة هي المجموعة $\mathcal{S}$ المعرّفة أعلاه. و بذا يتمّ الإثبات. ■

④ **ليكن n عدداً طبيعيّاً أكبر أو يساوي 3 . ولتكن $(t_k)_{1\le k\le n}$ أعداداً حقيقيّة موجبة تُحقّق المتراجحة**

$$n^2+1>(t_1+t_2+\cdots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right)$$

أثبت أنّه أيّاً كان (i,j,k) من $\mathbb{N}^3$ تُحقّق $1\le i<j<k\le n$ كوّنت الأعداد t_i و t_j و t_k أطوال أضلاع مثلّث.

لنبدأ بإثبات الخاصّة التالية.

خاصّة : ليكن x و y عددين حقيقيّين موجبين تماماً يُحقّقان $(x-\frac{1}{x})^2+(y-\frac{1}{y})^2<1$ عندئذ لا بُدّ أن يكون $xy<2$.

الإثبات

في الحقيقة، لنضع $\Delta=(x-\frac{1}{x})^2+(y-\frac{1}{y})^2-1$ ، عندئذ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\Delta&=x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-5\\&=(x-y)^2+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2+2xy+\frac{2}{xy}-5\\&=(x-y)^2+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2+\left(2-\frac{1}{xy}\right)(xy-2)\\&=(x-y)^2+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2+\frac{2}{xy}\left(xy-\frac{1}{2}\right)(xy-2)\end{aligned}$$

فالشرط $\Delta<0$ يقتضي أنّ $(xy-2)(xy-\frac{1}{2})<0$ وهذا بدوره يقتضي أنّ xy ينتمي إلى المجال $]\frac{1}{2},2[$ ، وعلى الخصوص $xy<2$.

لنأتِ إلى المسألة المطروحة ولنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n t_i\right)\left(\sum_{j=1}^n\frac{1}{t_j}\right)=\sum_{1\le i,j\le n}\frac{t_i}{t_j}&=n+\sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\right)\\&=n+n(n-1)+\sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}-2\right)\\&=n^2+\sum_{1\le i<j\le n}\left(\sqrt{\frac{t_i}{t_j}}-\sqrt{\frac{t_j}{t_i}}\right)^2\end{aligned}$$

إذن تُكافىء المتراجحة المعطاة المتراجحة التالية

$$\sum_{1\le i<j\le n}\left(\sqrt{\frac{t_i}{t_j}}-\sqrt{\frac{t_j}{t_i}}\right)^2<1$$

لتكن (i,j,k) من $\mathbb{N}^3$ تُحقّق $1\le i<j<k\le n$ عندئذ نستنتج من المتراجحة السابقة أنّ

$$\left(\sqrt{\frac{t_i}{t_j}}-\sqrt{\frac{t_j}{t_i}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{t_i}{t_k}}-\sqrt{\frac{t_k}{t_i}}\right)^2<1$$

و
$$\left(\sqrt{\frac{t_i}{t_j}}-\sqrt{\frac{t_j}{t_i}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{t_j}{t_k}}-\sqrt{\frac{t_k}{t_j}}\right)^2<1$$

و
$$\left(\sqrt{\frac{t_i}{t_k}}-\sqrt{\frac{t_k}{t_i}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{t_j}{t_k}}-\sqrt{\frac{t_k}{t_j}}\right)^2<1$$

وهذا يقتضي بالاعتماد على الخاصّة التي أثبتناها في البداية، وبالترتيب، أنّ

$$\sqrt{\frac{t_i}{t_j}}\sqrt{\frac{t_i}{t_k}}<2 \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{t_j}{t_i}}\sqrt{\frac{t_j}{t_k}}<2 \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{t_k}{t_i}}\sqrt{\frac{t_k}{t_j}}<2$$

أو

$$t_i<2\sqrt{t_jt_k}\le t_j+t_k \quad \text{و} \quad t_j<2\sqrt{t_it_k}\le t_i+t_k \quad \text{و} \quad t_k<2\sqrt{t_it_j}\le t_i+t_j$$

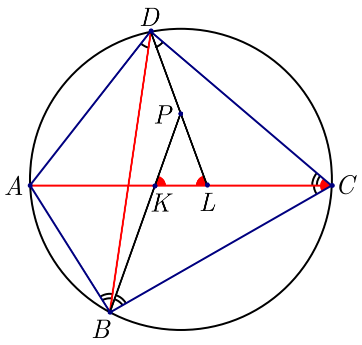
فالأعداد (t_i,t_j,t_k) تمثّل أطوال أضلاع مثلّث. وبذا يتمّ الإثبات. ■

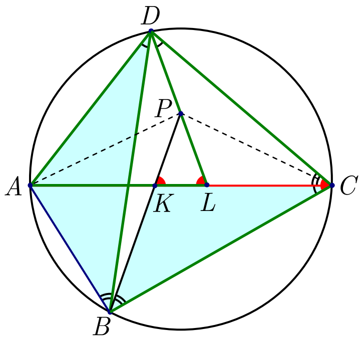
⑤ **نتأمّل رباعيّاً محدّباً $ABCD$. نفترض أنّ القطر $[BD]$ لا ينصّف أيّاً من الزاويتين $\widehat{ABC}$ أو $\widehat{CDA}$. كما نتأمّل نقطة P داخل $ABCD$ تُحقّق**

$$\widehat{PBC}=\widehat{DBA} \quad \text{و} \quad \widehat{PDC}=\widehat{BDA}$$

أثبت أنّ الشرط اللازم والكافي ليكون الرباعي $ABCD$ رباعيّاً دائريّاً هو أن يكون $AP=PC$.

يؤدّي الرأسان B و D دوراً متناظراً، وكذلك الأمر بالنسبة إلى الرأسين A و C. إذن، يمكننا دون الإقلال من عموميّة الإثبات، أن نفترض أنّ النقطة P الواقعة داخل الرباعي $ABCD$ هي في الواقع داخل كلٍّ من المثلّثين ACD و BCD، على أن نعيد تسميّة رؤوس الرباعي إذا تطلّب الأمر.





❶ لنفترض أنّ $ABCD$ رباعي دائري. ولنسمِّ L نقطة تقاطع (DP) مع (AC)، وكذلك لنسمِّ K نقطة تقاطع (BP) مع (AC).

■ عندئذ نستنتج من كون $ABCD$ رباعيّاً دائريّاً، ومن الفرْض أنّ : $\widehat{LDC}=\widehat{ADB}=\widehat{KCB}$.
وكذلك أنّ $\widehat{LCD}=\widehat{DBA}=\widehat{KBC}$.
إذن المثلّثان DLC و CKB متشابهان، وهذا يقتضي

$$\widehat{PKL}=\widehat{PLK} \text{ ومن ثَمّ } PL=PK \qquad (1)$$

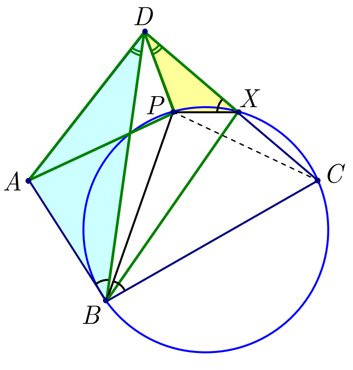
■ نستنتج من تشابه المثلّثين BKC و BAD أنّ

$$\frac{KC}{BC}=\frac{AD}{BD}$$

ومن تشابه المثلّثين ALD و BCD نجد

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AL}{BC}$$

نستنتج من المساواتين السابقتين أنّ $AL = KC$، وهذه النتيجة مع (1) تبرهن على تطابق المثلّثين PKC و PLA، وهذا يقتضي أنّ $PA = PC$.



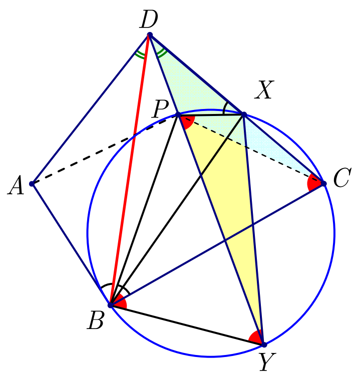
❷ لنفترض الآن أنّ $PA = PC$. نرسم الدائرة التي تمرّ برؤوس المثلّث BCP. فتقطع هذه الدائرة المستقيم (DC) ثانية في X، والمستقيم (DP) ثانية في Y.

■ لمّا كان $BCXP$ رباعيّاً دائريّاً استنتجنا أنّ

$$\widehat{DXP}=\widehat{PBC}=\widehat{DBA}$$

ومن جهة ثانية لدينا $\widehat{ADB}=\widehat{PDX}$. إذن المثلّثان DPX و DAB مثلّثان متشابهان. وهذا يبرهن بوجه خاصّ أنّ $\frac{DB}{DA}=\frac{DX}{DP}$، ولدينا من جهة أخرى $\widehat{BDX}=\widehat{ADP}$، مما يقتضي تشابه المثلّثين ADP و BDX. وهذا بدوره يقتضي أنّ $\frac{BX}{AP}=\frac{DB}{DA}$. إذن

$$\frac{DX}{DP}=\frac{BX}{AP} \qquad (2)$$



▪ وكذلك نستنتج من تشابه المثلّثين DYX و DPC أنّ $\frac{XY}{PC} = \frac{DX}{DP}$. فإذا استفدنا من (2) استنتجنا أنّ

$$\frac{XY}{PC} = \frac{BX}{AP}$$

ولكن $AP = PC$، إذن $XY = XB$.

▪ نستنتج مما سبق أنّ

$$\widehat{XPY} = \widehat{XBY} = \widehat{XYB} = \widehat{XCB} = \widehat{DCB}$$

كما نستنتج من تشابه المثلّثين DPX و DAB أنّ $\widehat{DPX} = \widehat{DAB}$. إذن

$$\widehat{DCB} + \widehat{DAB} = \widehat{XPY} + \widehat{DPX} = \pi$$

فالرباعي $ABCD$ رباعي دائري. وبذا يتمّ الإثبات.

⑥ **نقول عن عدد طبيعي موجب تماماً إنّه «متناوبٌ» إذا وفقط إذا كانت كلُّ خانتين متتاليتين في كتابته العشريّة مكوّنتين من عددٍ فردي وآخر زوجي. أوجد المجموعة $\mathcal{A}$ المكوّنة من جميع الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً التي لها مُضاعف متناوبٌ.**

سنبرهن أنّ n ينتمي إلى $\mathcal{A}$ إذا وفقط إذا كان n لا يقبل القسمة على 20 أي

$$n \in \mathcal{A} \Leftrightarrow 20 \nmid n$$

في الحقيقة، إذا قَبِل عددٌ n من $\mathbb{N}^*$ القسمة على 20 كان كذلك كلُّ واحدٍ من مضاعفاته، ولكنّ خانتي الآحاد والعشرات في مُضاعفات العدد 20 عددان زوجيّان، فلا يمكن أن تكون هذه الأعداد أعداداً متناوبة. إذن $20 \mid n \Rightarrow n \notin \mathcal{A}$.

لإثبات العكس، سنستفيد من الخاصّتين التاليتين.

خاصّة 1. توجد متتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ من عناصر المجموعة $\{0,1,\ldots,9\}$ تُحقّق، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، الخواص التالية.

❶ $a_n = (n+1) \bmod 2$

❷ $\nu_2\left((a_{2n-1}\ldots a_1)_{10}\right) = 2n-1$

❸ $\nu_2\left((a_{2n}a_{2n-1}\ldots a_1)_{10}\right) = 2n+1$

إذْ رمزنا كالعادة $\nu_2(m)$ إلى أكبر قوّة للعدد 2 تقسم m.

الإثبات

في الحقيقة، سنُنشئ هذه المتتالية بالتدريج على العدد n.

- نضع بداية $a_1 = 2$ و $a_2 = 7$.
- لنفترض أنّنا أنشأنا $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$ في حالة $n \geq 1$. عندئذ نضع $a_{2n+1} = 4$.

فيتحقّق وضوحاً الشرط ❶. واستناداً إلى فرْض التدريج لدينا

$$(a_{2n}a_{2n-1}\ldots, a_1)_{10} = 2^{2n+1}\lambda_{2n} \quad \text{مع} \quad \lambda_{2n} = 1 \bmod 2$$

وعليه يكون

$$\begin{aligned}(a_{2n+1}a_{2n}a_{2n-1}\ldots, a_1)_{10} &= 4 \times 10^{2n} + 2^{2n+1}\lambda_{2n} \\ &= 2^{2n+1}(2 \times 5^{2n} + \lambda_{2n}) = 2^{2n+1}\lambda_{2n+1}\end{aligned}$$

مع $\lambda_{2n+1} = 2 \times 5^{2n} + \lambda_{2n} = 1 \bmod 2$. وهذا يُثبتُ الخاصّة ❷.

نبحث الآن عن عددٍ a_{2n+2} من المجموعة $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ يُحقّق الشرط

$$(a_{2n+2}a_{2n+1}a_{2n}a_{2n-1}\ldots, a_1)_{10} = 2^{2n+3}\lambda_{2n+2} \quad \text{مع} \quad \lambda_{2n+2} = 1 \bmod 2$$

ولكن

$$\begin{aligned}(a_{2n+2}a_{2n+1}a_{2n}a_{2n-1}\ldots, a_1)_{10} &= a_{2n+2}10^{2n+1} + 2^{2n+1}\lambda_{2n+1} \\ &= 2^{2n+1}(5^{2n+1}a_{2n+2} + \lambda_{2n+1})\end{aligned}$$

يتحقّق الشرط المطلوب إذا أمكن اختيار a_{2n+2} من المجموعة $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ يُحقّق

$$5^{2n+1}a_{2n+2} + \lambda_{2n+1} = 4\lambda_{2n+2} \quad \text{مع} \quad \lambda_{2n+2} = 1 \bmod 2$$

أي إذا أمكن اختيار a_{2n+2} تُحقّق

$$5^{2n+1}a_{2n+2} + \lambda_{2n+1} = 4 \bmod 8$$

ولأنّ $\gcd(5, 8) = 1$ فالشرط السابق يُكافئ

$$(25)^{n+1}a_{2n+2} + 5\lambda_{2n+1} = 20 \bmod 8 = 4 \bmod 8$$

ولكن $25 = 1 \bmod 8$، إذن يُكافئ الشرط السابق ما يلي

$$a_{2n+2} = (4 + 3\lambda_{2n+1}) \bmod 8$$

يكفي إذن أن نختار باقي قسمة العدد الفردي $4 + 3\lambda_{2n+1}$ على 8، لنحصل على العدد a_{2n+2} من المجموعة $\{1, 3, 5, 7\}$ الذي يُحقّق الخاصّة ❸. وهكذا نكون قد أنشأنا المتتالية $(a_n)_{n \geq 1}$ التي تُحقِّق الخواص الثلاث المرجوّة. □

خاصّة 2. توجد متتالية $(b_n)_{n\geq 1}$ من عناصر المجموعة $\{0,1,\ldots,9\}$ تُحقّق، في حالة n من $\mathbb{N}^*$، الخاصّتين التاليتين.

❶ $b_n = (n+1) \bmod 2$

❷ $2\times 5^n \mid (b_n b_{n-1}\cdots b_1)_{10}$

الإثبات

كما في السابق، سنُنشئ هذه المتتالية بالتدريج على العدد n.

- نضع بداية $b_1 = 0$ و $b_2 = 5$.
- لنفترض أنّنا أنشأنا $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ في حالة $n \geq 1$. ولنفترض أنّ

$$\ell = \nu_5\left((b_n b_{n-1}\cdots b_1)_{10}\right)$$

أي أنّ $(b_n b_{n-1}\cdots b_1)_{10} = 5^\ell \mu_n$ مع $5 \nmid \mu_n$. استناداً إلى فرض التدريج لدينا $n \geq \ell$.

عندئذ علينا أن نختار b_{n+1} ليحقّق الشرطين

$$5^{n+1} \mid \left(b_{n+1}10^n + 5^\ell \mu_n\right) \text{ و } b_{n+1} = n \bmod 2$$

أو

$$b_{n+1}2^n + 5^{\ell-n}\mu_n = 0 \bmod 5 \text{ و } b_{n+1} = n \bmod 2$$

ولأنّ $2\times 3 = 1 \bmod 5$ فإنّ هذا يُكافئ

$$b_{n+1} = -3^n \times 5^{\ell-n}\mu_n \bmod 5 \text{ و } b_{n+1} = n \bmod 2$$

وعليه إذا اخترنا

$$b_{n+1} = \left(5n + 4\times 3^n \times 5^{\ell-n}\mu_n\right) \bmod 10$$

وهو عددٌ من المجموعة $\{0,1,\ldots,9\}$، تحقّقت الخاصّتان المطلوبتان. وتمّ إنشاء المتتالية $(b_n)_{n\geq 1}$ المطلوبة. □

نستخلص مما أثبتناه آنفاً النتائج التالية.

- نستنتج من الخاصّة 1. أنّ لكلّ عددٍ من النمط 2^α مُضاعفٌ متناوبٌ يُكتب بعددٍ زوجي من الخانات.
- ونستنتج من الخاصّة 2. أنّ لكلّ عددٍ من النمط $2\times 5^\beta$ مُضاعفٌ متناوبٌ يُكتب بعددٍ زوجي من الخانات.

▫ لنتأمّل عدداً ما n لا يقبل القسمة على 20. عندئذ يُكتب n بالشكل $n = 2^\alpha 5^\beta k$ مع $\gcd(k,10) = 1$. لمّا كان $20 \nmid n$ استنتجنا أنّ

$$2^\alpha 5^\beta \in \{2^\alpha, 5^\beta, 2 \times 5^\beta\}$$

ومن ثَمّ يوجد مُضاعفٌ متناوبٌ للعدد $2^\alpha 5^\beta$ يكتب بعدد زوجي $2m$ من الخانات، وليكن هذا المُضاعَف $M = (c_{2m} \cdots c_2 c_1)_{10}$.

لنفترض أنّ $k > 1$، ولنلاحظ أنّ $\gcd(10^{2m}, k(10^{2m}-1)) = 1$ إذن يوجد $q > 1$ يُحقّق

$$10^{2mq} = 1 \bmod (k(10^{2m}-1))$$

(q هو رتبة 10^{2m} في الزمرة الضربيّة $(\mathbb{Z}/(k(10^{2m}-1))\mathbb{Z})^\times$). إذن

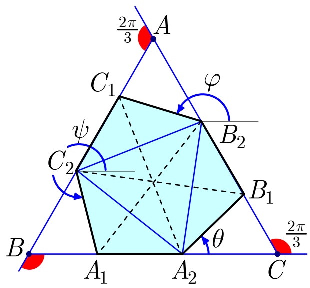
$$k \mid (1 + 10^{2m} + \cdots + 10^{2m(q-1)})$$

وهذا يقتضي أنّ n يقسم العدد المتناوب $M(1 + 10^{2m} + \cdots + 10^{2m(q-1)})$ الذي كتابته العشريّة

$$\underbrace{(\underbrace{c_{2m} \cdots c_2 c_1}_{M}\ \underbrace{c_{2m} \cdots c_2 c_1}_{M}\ \underset{\cdots}{\cdots}\ \underbrace{c_{2m} \cdots c_2 c_1}_{M})_{10}}_{\text{مكرر } q \text{ مرّة}}$$

وبذا نكون قد أثبتنا أنّ $n \nmid 20$ يقتضي $n \in \mathcal{A}$، وهذا يُنجز البرهان ■

① **نتأمّل ستّ نقاط على أضلاع مثلّث متساوي الأضلاع ABC. النقطتان A_1 و A_2 على $[BC]$، والنقطتان B_1 و B_2 على $[CA]$، والنقطتان C_1 و C_2 على $[AB]$. ونفترض أنّ هذه النقاط تؤلّف رؤوس مضلّع سداسي محدّب $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ أطوال أضلاعه متساوية. أثبت أنّ المستقيمات (A_1B_2) و (B_1C_2) و (C_1A_2) تتلاقى في نقطة واحدة.**



نُطابق بين المستوي وحقل الأعداد العقديّة، ونفترض أنّ المبدأ هو النقطة A_1 التي يمثّلها العدد 0، وأنّ العدد 1 يمثّل النقطة A_2. عندئذ يمثّل العدد $e^{i\theta}$ الشعاع $\overrightarrow{A_2B_1}$، ويمثّل العدد $j = e^{2\pi i/3}$ الشعاع $\overrightarrow{B_1B_2}$، و يمثّل العدد $e^{i\varphi}$ الشعاع $\overrightarrow{B_2C_1}$، و يمثّل العدد $j^2 = e^{4\pi i/3}$ الشعاع $\overrightarrow{C_1C_2}$، وأخيراً يمثّل العدد $e^{i\psi}$ الشعاع $\overrightarrow{C_2A_1}$.

بملاحظ أنّ $\widehat{CA_2B_1} \leq \frac{2\pi}{3}$ و $\widehat{AB_2C_1} \leq \frac{2\pi}{3}$ و $\widehat{BC_2A_1} \leq \frac{2\pi}{3}$ نستنتج أنّ

$$0 < \theta \leq \frac{2\pi}{3} \text{ و } \frac{4\pi}{3} < \varphi \leq \frac{4\pi}{3} \text{ و } \frac{4\pi}{3} < \psi \leq 2\pi \qquad (1)$$

كما نستنتج من المساواة

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2C_1} + \overrightarrow{C_1C_2} + +\overrightarrow{C_2A_1} = \vec{0}$$

أنّ $1 + e^{i\theta} + j + e^{i\varphi} + j^2 + e^{i\psi} = 0$، ولكن $1 + j + j^2 = 0$، إذن

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} + e^{i\psi} = 0$$

بأخذ المرافق في العلاقة السابقة، ثُمّ بضرب الطرفين بالمقدار $e^{i\theta}e^{i\varphi}e^{i\psi}$، نجد

$$e^{i\varphi}e^{i\psi} + e^{i\theta}\left(e^{i\varphi} + e^{i\psi}\right) = 0$$

أو $e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{2i\theta}$. فالعددان $e^{i\varphi}$ و $e^{i\psi}$ هما جذرا المعادلة

$$X^2 + e^{i\theta}X + e^{2i\theta} = 0$$

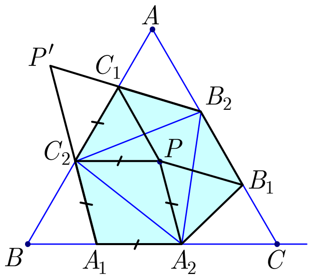
أو $\left(X - je^{i\theta}\right)\left(X - j^2 e^{i\theta}\right) = 0$. فإذا استفدنا من (1) استنتجنا أنّ

$$e^{i\varphi} = j e^{i\theta} \text{ و } e^{i\psi} = j^2 e^{i\theta}$$

نستنتج بوجه خاص أنّ

$$\begin{aligned} A_2B_2 &= \left|e^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{j}\right| \\ B_2C_2 &= \left|e^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{j}^2\right| = \left|\mathrm{j}\, e^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{j}^2\right| = \left|e^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{j}\right| \\ C_2A_2 &= \left|e^{\mathrm{i}\psi} + 1\right| = \left|\mathrm{j}^2\, e^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{j}^3\right| = \left|e^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{j}\right| \end{aligned}$$

فالمثلّث $A_2B_2C_2$ مثلثٌ متساوي الأضلاع. والمستقيمات (A_1B_2) و (B_1C_2) و (C_1A_2) هي محاور أضلاع هذا المثلّث فلا بُدّ أن تتلاقى في نقطة واحدة. ويتمّ الإثبات.



ملاحظة : يمكن أيضاً إعطاء إثبات هندسي لهذه المسألة.

لتكن P النقطة التي تجعل من $PC_2A_1A_2$ معيّناً. عندئذ، لأنّ $(C_2P) \parallel (BC)$ نستنتج من ذلك $\widehat{C_1C_2P} = \dfrac{\pi}{3}$. فالمثلّث C_1C_2P مثلّث متساوي الأضلاع. وبوجه خاص نستنتج أنّ $(PC_1) \parallel (B_1B_2)$ وأنّ $PC_1 = B_1B_2$. فالرباعي $C_1PB_1B_2$ معيّنٌ أيضاً. إذن $\widehat{A_2PB_1} = \dfrac{\pi}{3}$ لأنّ المثلّث A_2PB_1 متساوي الأضلاع. لتكن P' نقطة تقاطع المستقيمين (A_1C_2) و (B_2C_1)، عندئذ نرى أنّ

$$\widehat{C_2P'C_1} = \widehat{A_2PB_1} = \frac{\pi}{3}$$

وذلك بسبب توازي ضلعَي هاتين الزاويتين. وينتج من ذلك أنّ المثلّثين BA_1C_2 و $P'C_1C_2$ طبوقان، وكذلك يكون المثلّثان $P'C_1C_2$ و AC_1B_2. إذن

$$\widehat{C_1AB_2} = \widehat{A_1BC_2} = \frac{\pi}{3} \quad \text{و} \quad AC_2 = BA_2 \quad \text{و} \quad AB_2 = BC_2$$

فالمثلّثان C_2BA_2 و B_2AC_2 طبوقان، وهذا يبرهن على أنّ $A_2C_2 = B_2C_2$. ونبرهن بالمثل على أنّ $B_2C_2 = B_2A_2$، فيكون المثلّث $A_2B_2C_2$ متساوي الأضلاع.

② **نتأمّل متتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ مكوّنة من أعداد صحيحة، تحقّق الخواص التالية.**

❶ **المجموعتان $\{a_k : k \in \mathbb{N}^*\} \cap \mathbb{N}$ و $\{-a_k : k \in \mathbb{N}^*\} \cap \mathbb{N}$ غير منتهيتين.**

❷ **مهما تكن n من $\mathbb{N}^*$، فإنّ مجموعة بواقي قسمة الأعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ على n تحوي n عنصراً مختلفاً.**

أثبت أنّ كل عددٍ صحيح يظهر مرّة، ومرّة واحدة فقط في المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$.

نرغب بإثبات أنّ التطبيقَ $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}, k \mapsto a_k$ تقابلٌ. لنذكّر بالرمزين :

$$\mathcal{Z}_n = \{0,1,\ldots,n-1\} \quad \text{و} \quad \mathbb{N}_n = \{1,2,\ldots,n\}$$

ولنتأمّل

$$\psi_n : \mathbb{N}_n \to \mathcal{Z}_n,\ \psi_n(k) = a_k \bmod n$$

استناداً إلى الفرْض، لدينا $\operatorname{card}(\psi_n(\mathbb{N}_n)) \geq n$ ، ولكن من جهة ثانية لدينا

$$n = \operatorname{card}(\mathbb{N}_n) \geq \operatorname{card}(\psi_n(\mathbb{N}_n))$$

ولكن $\psi_n(\mathbb{N}_n) \subset \mathcal{Z}_n$ ، وعدد عناصر المجموعة $\mathcal{Z}_n$ يساوي n. إذن $\psi_n(\mathbb{N}_n) = \mathcal{Z}_n$ والتطبيق ψ_n تقابلٌ. ولكن $\psi_n = Q_n \circ \varphi_{|\mathbb{N}_n}$ ، وقد رمزنا Q_n إلى الغمر القانوني :

$$Q_n : \mathbb{Z} \to \mathcal{Z}_n, Q_n(x) = x \bmod n$$

فالتطبيق $\varphi_{|\mathbb{N}_n}$ تطبيقٌ متباينٌ وهذا ما يبرهن على أنّ عدد عناصر المجموعة $A_n = \varphi(\mathbb{N}_n)$ ، أو $A_n = \{a_k : k \in \mathbb{N}_n\}$ ، يساوي n.

▫ ليكن j و k عددين من $\mathbb{N}^*$ ، يُحقّقان $\varphi(k) = \varphi(j)$ أو $a_k = a_j$. عندئذ نختار $n = \max(j,k)$ ، فنستنتج من كون التطبيق $\varphi_{|\mathbb{N}_n}$ تطبيقاً متبايناً، أنّ المساواة $a_k = a_j$ تقتضي $k = j$. وهذا يبرهن على أنّ التطبيقَ φ نفسه متباينٌ.

▫ ليكن m من $\mathbb{Z}$. عندئذ نستنتج من ❶ أنّه يوجد عددان j_0 و k_0 من $\mathbb{N}^*$ ، يُحقّقان المتراجحة $a_{k_0} < m < a_{j_0}$. عندئذ نختار $n = \max(j_0,k_0)$ ، ونعرّف العددين

$$\beta_n = \max A_n \quad \text{و} \quad \alpha_n = \min A_n$$

إذا كان (i,j) عنصراً من $\mathbb{N}_n^2$ وأسمينا m العدد $|a_i - a_j|$ وجب أن يكون $m < n$ لأنّه لو كان $m \geq n$ استنتجنا من المساواة $|a_i - a_j| = m$ أنّ $\psi_m(i) = \psi_m(j)$ مع i و j من $\mathbb{N}_m$ ، إذن لا بُدَّ أن يكون $i = j$ ، ومن ثَمّ $m = 0$ وهذا خُلفٌ. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $|a_i - a_j| < n$ أيّاً كان العنصر (i,j) من المجموعة $\mathbb{N}_n^2$. وبوجه خاصّ لدينا $\beta_n - a_n \leq n-1$ ، إذن $A_n \subset ([\alpha_n, \alpha_n + n - 1] \cap \mathbb{Z})$. ولكن

$$n = \operatorname{card}(A_n) \leq ([\alpha_n, \alpha_n + n - 1] \cap \mathbb{Z}) = n$$

فلا بُدّ أن يكون $A_n = [\alpha_n, \alpha_n + n - 1] \cap \mathbb{Z}$ ، أو $A_n = [\alpha_n, \beta_n] \cap \mathbb{Z}$. ولكن استناداً إلى اختيارنا للعدد n لدينا $\alpha_n \leq a_{k_0} < m < a_{j_0} \leq \beta_n$ ، إذن $m \in A_n$.

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ التطبيقَ φ غامرٌ، ومن ثَمّ أنّه تقابلٌ. وهي النتيجة المرجوّة. ■

③ **نتأمّل ثلاثة أعداد حقيقيّة موجبة** x **و** y **و** z **تُحقّق** $xyz \geq 1$. **أثبت صحّة المتراجحة**

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0$$

لنلاحظ أوّلاً أنّه استناداً إلى متراجحة كوشي–شوارتز لدينا

$$\begin{aligned}
\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 &= \left(x^{5/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + y \cdot y + z \cdot z\right)^2 \\
&\leq \left(x^5 + y^2 + z^2\right)\left(\frac{1}{x} + y^2 + z^2\right) \\
&\leq \left(x^5 + y^2 + z^2\right)\left(yz + y^2 + z^2\right) \qquad \frac{1}{x} \leq yz \\
&\leq \frac{3}{2}\left(x^5 + y^2 + z^2\right)\left(y^2 + z^2\right) \qquad yz \leq \frac{y^2 + z^2}{2}
\end{aligned}$$

وعلى هذا نستنتج أنّ

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} \leq \frac{3}{2}\left(\frac{y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

ونجد بالمثل أنّ

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^5 + z^2} \leq \frac{3}{2}\left(\frac{x^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

و

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \leq \frac{3}{2}\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

وبجمع المتراجحات الثلاث السابقة نجد

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \leq 3$$

وهذا يُكافئ

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0$$

وهي المتراجحة المطلوبة.

④ **نتأمّل المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرّفة بالصيغة**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$$

ولتكن $\mathcal{A}$ مجموعة الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً والأوّلية مع جميع حدود المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ أي

$$\mathcal{A} = \left\{ m \in \mathbb{N}^* : \forall n \geq 1, \ \gcd(m, a_n) = 1 \right\}$$

عيّن المجموعة $\mathcal{A}$.

سنبرهن على أنّ $\mathcal{A} = \{1\}$.

- في الحقيقة، من الواضح أنّ $1 \in \mathcal{A}$.
- وبالعكس، ليكن p عدداً أوّليّاً. ولنفترض أنّ $p > 3$. عندئذ استناداً إلى مبرهنة Fermat لدينا

$$2^{p-1} = 1 \bmod p \quad \text{و} \quad 3^{p-1} = 1 \bmod p \quad \text{و} \quad 6^{p-1} = 1 \bmod p$$

ومن ثَمّ

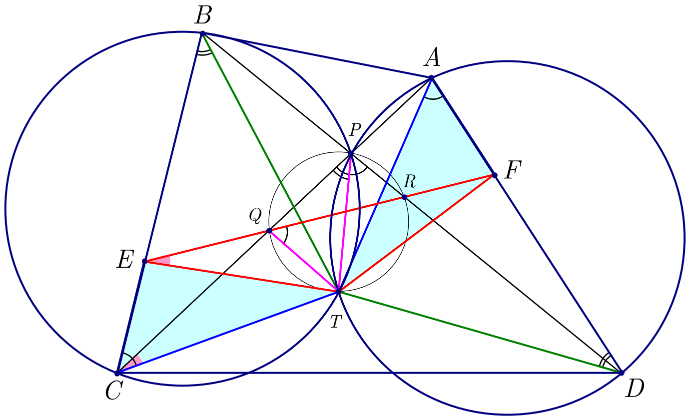
$$3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} = 3 + 2 + 1 \bmod p = 6 \bmod p$$

إذن $6a_{p-2} = 0 \bmod p$، وعندها ينتج من كون $\gcd(p, 6) = 1$، أنّ $p \mid a_{p-2}$. ونلاحظ من جهة ثانية أنّ $2 \mid a_1$ و $3 \mid a_2$. إذن ينبغي أن يكون أيّ عددٍ من $\mathcal{A}$ أوّليّاً مع جميع الأعداد الأوليّة فهو من ثَمّ يساوي 1. ومنه $\mathcal{A} = \{1\}$، وهي النتيجة المرجوّة.

⑤ **ليكن $ABCD$ رُباعيّاً محدّباً ضلعاه $[BC]$ و $[AD]$ متساويا الطول وغير متوازيين. لتكن E نقطة من داخل القطعة المستقيمة $[BC]$ ولتكن F من داخل القطعة المستقيمة $[AD]$ تُحقّقان $BE = DF$. نسمّي P نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و (BD)، ونسمّي Q نقطة تقاطع المستقيمين (EF) و (BD)، وأخيراً نسمّي R نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و (EF).**

أثبت أنّه عندما تتحوّل النقطتان E و F على $[BC]$ و $[AD]$ فإنّ جميع الدوائر المارّة برؤوس المثلّث PQR تشترك بنقطة أخرى غير النقطة P.

لنتأمّل الدائرتين المارّتين برؤوس المثلّثين BCP و DAP. تتقاطع هاتان الدائرتان في P و T. سنبرهن أنّه عندما تتحوّل النقطتان E و F على $[BC]$ و $[AD]$ فإنّ جميع الدوائر المارّة برؤوس المثلّث PQR تشترك بالنقطتين P و T. ولتحقيق ذلك سنثبت أنّ الرباعي $PQTR$ رباعي دائري.



- نستنتج من كون الرباعيّان $DAPT$ و $BCTP$ دائريّين أنّ

$$\widehat{DAT} = \widehat{DPT} = \widehat{BCT}$$

وكذلك أنّ

$$\widehat{ADT} = \widehat{CPT} = \widehat{CBT}$$

ولمّا كان $AD = BC$ استنتجنا تطابق المثّلثين DAT و BCT.

- ثُمّ نستنتج من كون

$$AF = CE \text{ و } AT = CT \text{ و } \widehat{FAT} = \widehat{ECT}$$

أنّ المثلّثين FAT و ECT طبوقان.

- إذن كلٌّ من المثلّثين ATC و FTE مثلّثٌ متساوي الساقين، ولدينا

$$\widehat{ATC} = \widehat{ATE} + \widehat{ETC} = \widehat{ATE} + \widehat{FTA} = \widehat{FTE}$$

فالمثلّثان ATC و FTE متشابهان، وبوجه خاصٍّ $\widehat{TCQ} = \widehat{TEQ}$، فالرباعي $TCEQ$ رباعي دائري.

- نستنتج إذن أنّ $\widehat{RQT} = \widehat{BCT} = \widehat{DPT} = \widehat{RPT}$، والمساواة $\widehat{RQT} = \widehat{RPT}$ تقتضي أنّ الرباعي $PQTR$ دائري. وبذا يتمّ الإثبات. ■

⑥ في مسابقة للرياضيّات، طُرِحَتْ ست مسائل على المتسابقين. نعلم أنّ كلَّ زوج من المسائل قد جرى حلّهما من قِبَلِ ما يزيد تماماً على خُمسَي عدد المتسابقين، وأنّ أيّاً من المتسابقين لم يحل جميع المسائل الست المطروحة. أثبت وجود متسابِقَيْن اثنين على الأقل حلَّ كلٌّ منهما خمس مسائل.

لنفترض أنّ عدد المتسابقين يساوي n. ولنعرّف a_i بأنّه عدد المتسابقين الذين حلّوا تماماً i مسألة. فيكون

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = n \tag{1}$$

لتكن $\mathcal{P}^{(2)}$ مجموعة أزواج المسائل، ولتكن $\mathcal{C}$ مجموعة المتسابقين، ولنعرّف المجموعة الجزئيّة $\mathcal{N}$ من $\mathcal{C} \times \mathcal{P}^{(2)}$ كما يلي : ينتمي العنصر $(c, \{p, p'\})$ إلى $\mathcal{N}$ إذا وفقط إذ حلّ المتسابق c المسألتين p و p'. ثُمّ نضع $N = \operatorname{card}(\mathcal{N})$.

استناداً إلى الفرْض، مهما يكن الزوج π من $\mathcal{P}^{(2)}$ يكن

$$\operatorname{card}(\{c : (c, \pi) \in \mathcal{N}\}) \geq \frac{2n+1}{5}$$

إذن، من جهة أولى لدينا

$$N = \sum_{\pi \in \mathcal{P}^{(2)}} \operatorname{card}(\{c : (c, \pi) \in \mathcal{N}\}) \geq \operatorname{card}(\mathcal{P}^{(2)}) \times \frac{2n+1}{5}$$

أو $N \geq 6n + 3$.

ومن جهة ثانية، إذ حلّ متسابقٌ c تماماً i مسألة، كان

$$\operatorname{card}\left(\{\pi \in \mathcal{P}^{(2)} : (c, \pi) \in \mathcal{N}\}\right) = C_i^2$$

إذن

$$N = \sum_{c \in \mathcal{C}} \operatorname{card}(\{\pi : (c, \pi) \in \mathcal{N}\}) = \sum_{i=0}^{5} C_i^2 a_i$$

أو $N = a_2 + 3a_3 + 6a_4 + 10a_5$. وهكذا نكون قد أثبتنا المتراجحة

$$6n + 3 \leq a_2 + 3a_3 + 6a_4 + 10a_5 \tag{2}$$

هذا يبرهن أنّ $a_5 \geq 1$، لأنّه في حالة $a_5 = 0$ لدينا، بالاستفادة من (1)، المتراجحة

$$a_2 + 3a_3 + 6a_4 + 10a_5 \leq 6n$$

وهذا يتناقض مع (2).

لنفترض على سبيل الجدل أنّ $a_5 = 1$ ، عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned} N &= a_2 + 3a_3 + 6a_4 + 10 \\ &= 6(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 1) + 4 - 6a_0 - 6a_1 - 5a_2 - 3a_3 \\ &= 6n + 4 - (6a_0 + 6a_1 + 5a_2 + 3a_3) \end{aligned}$$

و المتراجحة (2) تكافئ $6a_0 + 6a_1 + 5a_2 + 3a_3 \leq 1$ أو

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

إذن $N = 6n + 4$ ، وهناك متسابقٌ واحدٌ فقط w (نسمّيه الفائز) تمكّن من حلّ خمس مسائل، في حين حلّ كلٌّ واحدٍ من بقيّة المتسابقين أربع مسائل. ونستنتج من المساواة

$$6n + 4 = \sum_{\pi \in \mathcal{P}^{(2)}} \operatorname{card}(\{c : (c, \pi) \in \mathcal{N}\})$$

أنّ

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}^{(2)}} \left(\operatorname{card}(\{c : (c, \pi) \in \mathcal{N}\}) - \frac{2n+1}{5} \right) = 1$$

فإذا عرّفنا $\lambda = \left\lceil \frac{2n+1}{5} \right\rceil$ استنتجنا أنّ

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}^{(2)}} \underbrace{(\operatorname{card}(\{c : (c, \pi) \in \mathcal{N}\}) - \lambda)}_{\geq 0} + 3\underbrace{(5\lambda - (2n+1))}_{\geq 0} = 1$$

ولا يمكن أن تتحقّق هذه المساواة، إلا إذا كان $2n + 1 = 5\lambda$ ، وكان هناك زوج من المسائل $\pi_0 = \{p_0, p_0'\}$ يُحقّق

$$\operatorname{card}(\{c : (c, \pi) \in \mathcal{N}\}) = \begin{cases} \lambda & : \pi \neq \pi_0 \\ \lambda + 1 & : \pi = \pi_0 \end{cases}$$

وذلك في حالة π من $\mathcal{P}^{(2)}$.

لنرمز بالرمز q_0 إلى المسألة الوحيدة التي لم يتمكّن المتسابق الفائز w من حلّها. ولنعرّف في حالة مسألة p المجموعة

$$\mathcal{N}_p = \{(c, \pi) \in \mathcal{N} : p \in \pi\}$$

ثُم لنضع γ_p دلالة على عدد المتسابقين الذين حلّوا المسألة p . عندئذ

$$\operatorname{card}(\mathcal{N}_p) = \begin{cases} 3\gamma_p + 1 & : p \neq q_0 \\ 3\gamma_{q_0} & : p = q_0 \end{cases}$$

لأنّه في حالة المسألة q_0، كلُّ متسابق c حلّ هذه المسألة حلّ معها ثلاث مسائل أخرى فيكون

$$\operatorname{card}(\{(c,\pi)\in\mathcal{N} : q_0\in\pi\}) = 3$$

أمّا في حالة مسألة p مختلفة عن q_0، فأيضاً كلُّ متسابق c حلّ هذه المسألة، غير المتسابق الفائز، حلّ معها ثلاث مسائل أخرى، إذن

$$\operatorname{card}(\{(c,\pi)\in\mathcal{N} : p\in\pi\}) = 3$$

أمّا المتسابق الفائز w فقد حلّ معها أربع مسائل أخرى، إذن

$$\operatorname{card}(\{(w,\pi)\in\mathcal{N} : p\in\pi\}) = 4$$

ومن جهة أخرى،

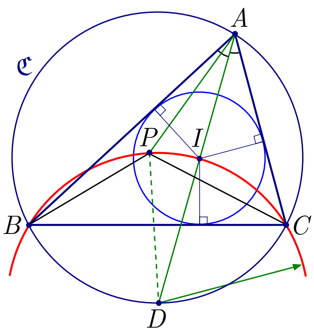
$$\operatorname{card}(\mathcal{N}_p) = \sum_{p'\neq p}\operatorname{card}(\{c : (c,\{p,p'\})\in\mathcal{N}\})$$

إذن

$$\operatorname{card}(\mathcal{N}_p) = \begin{cases} 5\lambda & : \quad p\notin\pi_0 \\ 5\lambda+1 & : \quad p\in\pi_0 \end{cases}$$

فمن جهة أولى، نستنتج من $\operatorname{card}(\mathcal{N}_{q_0}) = 0 \bmod 3$ أنّ $\lambda \bmod 3\in\{0,1\}$، ومن جهة ثانية، باختيار مسألة p من خارج المجموعة $\pi_0\cup\{q_0\}$ نجد $5\lambda = 3\gamma_p+1$ وهذا يقتضي أنّ $\lambda \bmod 3 = 2$، وهذا خُلفٌ. إذن لا يمكن أن يساوي a_5 العدد 1، فهو إذن أكبر أو يساوي 2. وبذا يتمّ الإثبات.

① **نتأمّل مثلّثاً ABC . لتكن النقطة I مركز الدائرة الماسّة لأضلاع المثلّث ABC داخلاً. ولتكن P نقطة من داخل المثلّث ABC تُحقّق $\widehat{PBA}+\widehat{PCA}=\widehat{PBC}+\widehat{PCB}$. أثبت أنّ $AP\geq AI$ وتقع المساواة إذا وفقط إذا كان $P=I$.**



لتكن $\mathfrak{C}$ الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC . ولتكن D النقطة التي يقطع فيها المستقيم (IA) ، منصّف الزاوية $\widehat{BAC}$ ، ثانيةً الدائرة $\mathfrak{C}$. سنرمز فيما يلي $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ إلى زوايا المثلّث ABC .

لتكن P نقطة من داخل المثلّث ABC تُحقق العلاقة $(*)$ التالية : $\widehat{PBA}+\widehat{PCA}=\widehat{PBC}+\widehat{PCB}$. عندئذ بملاحظة أنّ $\widehat{PBA}=\widehat{B}-\widehat{PBC}$ و $\widehat{PCA}=\widehat{C}-\widehat{PCB}$ ، نستنتج أنّ العلاقة $(*)$ تُكافئ $2\left(\widehat{PBC}+\widehat{PCB}\right)=\widehat{B}+\widehat{C}=\pi-\widehat{A}$ أو

$$\widehat{BPC}=\pi-\left(\widehat{PBC}+\widehat{PCB}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\widehat{A}}{2}$$

إذن تُحقق النقطة P من داخل المثلّث ABC العلاقة $(*)$ إذا وفقط إذا كانت القطعة المستقيمة $[BC]$ تُرى من P بزاوية قدرها $\frac{1}{2}\left(\pi+\widehat{A}\right)$. ولكن

$$\widehat{BDC}=\pi-\left(\widehat{DCB}+\widehat{DBC}\right)=\pi-\left(\widehat{DAB}+\widehat{DAC}\right)=\pi-\widehat{A}$$

فإذا كانت $\mathfrak{C}'$ الدائرة التي مركزها D وتمر بالنقطة B ،(وهي تمرّ إذن بالنقط C أيضاً) كانت مجموعة النقاط التي ترى منها القطعة المستقيمة $[BC]$ بزاوية قدرها $\frac{1}{2}\left(\pi+\widehat{A}\right)$ ، هي القوس $\overset{\frown}{BC}$ من $\mathfrak{C}'$ الواقع داخل $\mathfrak{C}$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ النقطة P من داخل المثلّث ABC تُحقّق العلاقة $(*)$ إذا وفقط إذا انتمت P إلى $\overset{\frown}{BC}$.

نلاحظ من جهة ثانية أنّ I تُحقّق وضوحاً العلاقة $(*)$ فهي إذن نقطة تقاطع المستقيم (AD) مع القوس $\overset{\frown}{BC}$. فإذا استفدنا من متراجحة المثلّث مطبّقة على APD أمكن أن نكتب

$$AP-AI=AP+PD-AI-ID=AP+PD-AD\geq 0$$

وتقع المساواة إذا وفقط إذا انتمت P إلى $[AD]$ ، أي إذا وفقط إذا كان $P=I$. ■

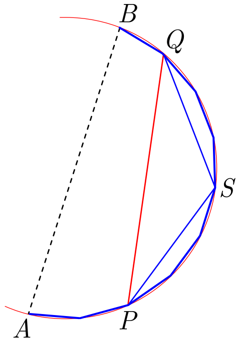
② **نتأمّل مضلّعاً منتظماً $\mathcal{P}$ ذا 2006 ضلعاً. نَصِفُ قطراً من أقطار $\mathcal{P}$ بأنّه « جيدٌ » إذا قسم طرفاه محيط المضلّع $\mathcal{P}$ إلى جزأين يحوي كلٌّ منهما عدداً فرديّاً من أضلاع P . كما نصف أيضاً كلّ ضلع من $\mathcal{P}$ بأنّه « جيدٌ » .**
نفترض أنّ المضلّع $\mathcal{P}$ قد جُزّئ إلى مثلّثات بوساطة 2003 قطراً من أقطاره، وذلك دون أن يتقاطع أي اثنين من هذه الأقطار داخل $\mathcal{P}$. أوجد أكبر عدد ممكن للمثلّثات المتساوية الساقين التي يملك كلٌّ واحدٍ منها ضلعين جيّدين والذي يمكن أن نحصل عليه في مثل هذا التوضّع.

لنَصِف مثلّثاً متساوي الساقين بأنّه « **جيدٌ** » إذا كان اثنان من أضلاعه جيِّدين. ولنفترض أنّنا أمام تجزئة للمضلّع بأقطار عددها 2003 .

تمهيد : ليكن $[AB]$ أحد الأقطار التي تُجزّئ المضلّع، وليكن $\mathcal{L}$ الجزء الأقصر من محيط $\mathcal{P}$ الذي طرفاه A و B . ولنفترض أنّ $\mathcal{L}$ مكوّنٌ من n ضلعاً. عندئذ يكون عدد المثلّثات المتساوية الساقين الجيّدة والتي رؤوسها من $\mathcal{L}$ أصغر أو يساوي $\frac{n}{2}$.

الإثبات

- النتيجة واضحة في حالة $n = 2$.
- ليكن n عدداً يُحقّق $2 < n \leq 1003$ ، ولنفترض صحّة النتيجة في حالة أيّ $\mathcal{L}$ عدد أضلاعه أقلّ تماماً من n . لنتأمّل الآن حالة $\mathcal{L}$ طرفاه النقطتان A و B ولنفترض أنّه مكوّنٌ من n ضلعاً من أضلاع $\mathcal{P}$. عندئذ نتأمّل أطول قطر $[PQ]$ يكون ضلعاً في مثلّث متساوي الساقين جيّد PSQ رؤوسه من $\mathcal{L}$ ، (بالطبع إذا لم يكن هناك مثل هذه المثلّثات لما كان هناك ما يجب إثباته).



كلُّ مثلّث رؤوسه واقعة على $\mathcal{L}$ هو مثلّث منفرج الزاوية أو قائمٌ، إذن لا بُدّ أن يكون S هو رأس المثلّث المتساوي الساقين PSQ ، أي $SP = SQ$ ، يمكننا إذن أن نفترض أنّ النقاط الخمس A و P و S و Q و B ، بهذا الترتيب، تُجزّئ $\mathcal{L}$ إلى أربعة أجزاء $\mathcal{L}_{AP}$ و $\mathcal{L}_{PS}$ و $\mathcal{L}_{SQ}$ و $\mathcal{L}_{QB}$ مع إمكان كون أحد الجزأين $\mathcal{L}_{AP}$ أو $\mathcal{L}_{QB}$ أو كليهما مكوناً من نقطة واحدة.

وبالطبع، أي مثلّث متساوي الساقين وجيد رؤوسه من $\mathcal{L}$ ، لا يمكن أن يكون له رؤوس على $\mathcal{L}_{AP}$ و $\mathcal{L}_{QB}$ في آن معاً إذْ يتعارض ذلك مع تعريف $[PQ]$. وإذا تذكّرنا أن الأقطار المرسومة لا تتقاطع داخل المضلّع، استنتجنا أنّ كلّ مثلّث متساوي الساقين وجيد رؤوسه من $\mathcal{L}$ هو مثلّث متساوي الساقين وجيد رؤوسه الثلاثة واقعة على واحد وواحد فقط من الأجزاء أجزاء $\mathcal{L}_{AP}$ و $\mathcal{L}_{PS}$ و $\mathcal{L}_{SQ}$ و $\mathcal{L}_{QB}$. وعليه، بتطبيق فرْض التدريج على هذه الأجزاء ثُمّ جمع المتراجحات التي نحصل عليها نستنتج أنّ عدد المثلّثات المتساوية الساقين والجيدة التي تقع رؤوسها على $\mathcal{L}$ ، باستثناء PSQ أصغر أو يساوي $\frac{n}{2}$. في الحقيقة، لمّا كان عدد أضلاع كلٍّ من $\mathcal{L}_{PS}$ و $\mathcal{L}_{SQ}$ فردياً، كانت المتراجحة في حالة هذين الجزأين تامّة، وهذا يجعلنا نكسب واحداً عند جمع المتراجحات الأربع، ويجعل الحدّ الأعلى $\frac{n}{2}$ يشمل المثلّث PSQ . وهذا يُثبتُ التمهيد.

نأتي الآن إلى حالة المسألة المطروحة، ونتأمّل أطول الأقطار $[XY]$ في التوضّع المعطى. ثُمّ نعرّف $\mathcal{L}_{XY}$ الجزء الأقصر الذي طرفاه X و Y من محيط P. ثُمّ ليكن XYZ مثلّثاً من التجزئة المعطاة و Z غير واقعة على $\mathcal{L}_{XY}$. (وبالطبع إذا لم يكن هناك مثل هذه المثلّثات لوقعت رؤوس جميع مثلّثات التجزئة على $\mathcal{L}_{XY}$ ، ولكان عدد المثلّثات المتساوية الساقين والجيدة أصغر من نصف عدد أضلاع $\mathcal{L}_{XY}$ وهو من ثَمّ أقلّ من 1003). المثلّث XYZ مثلّث حاد الزوايا أو قائمٌ، وإلاّ كان أحد القطرين $[XZ]$ أو $[YZ]$ أطول تماماً من $[XY]$.

بتطبيق التمهيد على الأجزاء $\mathcal{L}_{XY}$ و $\mathcal{L}_{XZ}$ و $\mathcal{L}_{YZ}$ نستنتج أنّ عدد المثلّثات المتساوية الساقين والجيدة أصغر أو يساوي 2006/2 وذلك باستثناء حالة كون المثلّث XYZ نفسه مثلّثاً متساوي الساقين وجيداً. ولكن إذا كان XYZ مثلّثاً متساوي الساقين وجيّداً كان عدد أجزاء كلٍّ من $\mathcal{L}_{XZ}$ و $\mathcal{L}_{YZ}$ فردياً، وكانت المتراجحة في حالة هذين الجزأين تامّة، وهذا يجعلنا نكسب واحداً عند جمع المتراجحات الثلاث، ويجعل الحدّ الأعلى 1003 يشمل المثلّث XYZ ، في هذه الحالة أيضاً.

وبالعكس، إذا رمزنا بالرموز $(A_k)_{1\le k\le 2006}$ إلى الرؤوس المتتالية للمضلّع P ، وجزّأناه باستخدام الأقطار $([A_{2k-1}A_{2k+1}])_{1\le k\le 1003}$ و $([A_1A_{2k+1}])_{2\le k\le 1001}$ وعددها 2003 كان عدد المثلّثات المتساوية الساقين والجيدة وهي $(A_{2k-1}A_{2k}A_{2k+1})_{1\le k\le 1003}$ مساوياً 1003 فهو الحد الأعلى المطلوب. ◼

③ **عيّن أصغر عددٍ حقيقي M يُحقّق المتراجحة**

$$\left|ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right)\right|\le M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

أيّاً كانت الأعداد الحقيقيّة a و b و c.

لنعرّف

$$f(a,b,c)=ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right)$$

ولنضع $S=a+b+c$، عندئذ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} f(a,b,c)&=ab(a-b)(S-c)+bc(b-c)(S-a)+ca(c-a)(S-b)\\ &=S\Big(ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)\Big)\\ &=S\Big(ab(a-b)+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2\Big)\\ &=S\Big(ab(a-b)+\left(b^2-a^2\right)c+c^2(a-b)\Big)\\ &=S(a-b)\left(ab-(b+a)c+c^2\right)\\ &=S(a-b)(b-c)(a-c)\end{aligned}$$

ومن ثَمّ نرى أنّ $(a,b,c)\mapsto|f(a,b,c)|$ تابع متناظرٌ، ومتجانسٌ من المرتبة الرابعة، إذن نهدف إلى تعيين

$$M=\sup\left\{|f(a,b,c)|:a^2+b^2+c^2=1,c\le b\le a\right\}$$

لُندخل المتحوّلين الجديدين $x=a-c$ و $y=b-c$، عندئذ

$$c\le b\le a\Leftrightarrow 0\le y\le x$$

كما إنّ $x-y=a-b$، وهذا يقتضي أنّ

$$x^2+y^2+(x-y)^2+S^2=3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

وأخيراً نرى أنّ $|f(a,b,c)|=|Sxy(x-y)|$. وعليه

$$M=\sup\left\{|S|xy(x-y):x^2+y^2+(x-y)^2+S^2=3,0\le y\le x\right\}$$

ولكن

$$x^2+y^2+(x-y)^2+S^2=3\Leftrightarrow 2x^2+S^2-3=2y(x-y)$$

إذن M هي الحدّ الأعلى للمقدار $\frac{1}{2}|S|x\left(2x^2+S^2-3\right)$ علماً أنّ

$$0 \leq y \leq x \quad \text{و} \quad 2x^2+S^2-3 = 2y\left(x-y\right)$$

ولكن $y \mapsto 2y\left(x-y\right)$ يبلغ قيمته الكبرى على المجال $[0,x]$ عند $y=\frac{1}{2}x$، إذن لدينا دوماً $2x^2+S^2-3 \leq \dfrac{x^2}{2}$ أو $S^2 \leq 3-\frac{3}{2}x^2$. وهكذا نرى أنّ $x \leq \sqrt{2}$ وأنّ

$$\frac{1}{2}|S|x\left(2x^2+S^2-3\right) \leq \frac{1}{4}x^3\cdot\sqrt{3-\frac{3}{2}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}x^3\sqrt{2-x^2}$$

وتحدث المساواة في هذه المتراجحة إذا كان $y=\frac{1}{2}x$ و $|S|=\sqrt{3-\frac{3}{2}x^2}$.

كما نستنتج من دراسة التابع $x \mapsto x^6\left(2-x^2\right)$ أنّه يبلغ حدّه الأعلى على $[0,\sqrt{2}]$ عند $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$، إذن

$$\frac{1}{2}|S|x\left(2x^2+S^2-3\right) \leq \frac{9\sqrt{2}}{32}$$

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $M \leq \frac{9\sqrt{2}}{32}$.

وبالعكس، إذا اخترنا $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ و $y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ و $S=\frac{\sqrt{3}}{2}$ وجدنا

$$0 \leq y \leq x \quad \text{و} \quad x^2+y^2+(x-y)^2+S^2=3 \quad \text{و} \quad |S|xy\left(x-y\right)=\frac{9\sqrt{2}}{32}$$

وهذا يُثبتُ أنّ $M=\frac{9\sqrt{2}}{32}$. وهي النتيجة المرجوّة.

ملاحظة : لقد أثبتنا أيضاً أنّ المساواة تقع إذا كان الشعاع (a,b,c) متناسباً مع الشعاع $\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{2},1,1-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ أو مع أيِّ شعاعٍ مركّباته ناتجة من إجراء تبديل على مركّبات هذا الشعاع.

④ **أوجد جميع ثنائيّات الأعداد الصحيحة (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ التي تُحقّق المعادلة**

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2$$

ليكن (x,y) حلاً للمعادلة المعطاة في $\mathbb{Z}^2$. عندئذ يكون $(x,-y)$ حلاً أيضاً، فلا مانع من افتراض العدد y موجباً.

- إذا كان $x<-1$ كان $1<1+2^x+2^{2x+1} \leq 1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}<2$ ومنه التناقض $1<y^2<2$. إذن لا بُدّ أن يكون $x \geq -1$.
- إذا كان $x=-1$ كان $y^2=1+2^x+2^{2x+1}=2$ وهذا خُلفٌ أيضاً.

▫ وإذا كان $x=0$ كان $y^2=1+2^x+2^{2x+1}=4$، ومنه $y=2$، فنحصل على الحلّين $(0,2)$ و $(0,-2)$.

▫ لنفترض أنّ $x>0$. عندئذ يكون y عدداً فردياً، ونستنتج من المتراجحة الواضحة

$$2^{2x}<1+2^x+2^{2x+1}<2^{2x+2}$$

أنّ $2^x<y<2^{x+1}$. وعليه فإنّ $z=y-2^x$ هو عددٌ فردي من المجال $]0,2^x[$. أي يوجد عددٌ t طبيعي من $[1,2^{x-1}-1]$ يُحقّق $y=2^x+2t+1$. وبالتعويض في المعادلة نجد $4=1+2^x+2^{2x+1}=(2^x+2t+1)^2$، أو

$$4t(t+2^x+1)=2^x(2^x-1)$$

إذن 4 يقسم 2^x، فلا بُدّ أن يكون $x\geq 2$. أمّا حالة $x=2$ فتقضي أنّ $t(t+5)=3$ وهذا مستحيل. نستنتج إذن أنّ

$$x\geq 3 \quad \text{و} \quad t(t+2^x+1)=2^{x-2}(2^x-1) \qquad (1)$$

- ولكن إذا كان t عدداً زوجيّاً كان $t+2^x+1$ عدداً فرديّاً يقسم $2^{x-2}(2^x-1)$ فلا بُدّ أن يقسم 2^x-1 وهذا مستحيلٌ لأنّ $t+2^x+1>2^x-1$.
- إذن ينبغي أن يكون t عدداً فرديّاً، وهو من ثَمّ أوّلي مع العدد 2^{x-2} الذي يقسم جداء الضرب $t(t+2^x+1)$، فالعدد 2^{x-2} يقسم $t+1+2^x$، ومن ثَمّ هو يقسم العدد $t+1$. إذن $t+1=\lambda 2^{x-2}$. ولكن نعلم من جهة أخرى أنّ العدد t ينتمي إلى المجال $[1,2^{x-1}-1]$، إذن $\lambda\in\{1,2\}$. ومنه

$$t=2^{x-2}-1 \quad \text{أو} \quad t=2^{x-1}-1$$

ولكن، في حالة $t=2^{x-1}-1$، تقضي المساواة (1) أن يكون

$$6\left(2^{x-1}-1\right)=2^x-1$$

وهذا مستحيلٌ لأنّ 2^x-1 عددٌ فردي. إذن بقيت حالة $t=2^{x-2}-1$، التي تقضي أنّ $5\left(2^{x-2}-1\right)=2^x-1$، وهذا يُكافئ $2^{x-2}=4$ أو $x=4$. وعندئذ نجد $t=3$ و $y=2^x+2t+1=23$. فنصل إلى الحلّين $(4,23)$ و $(4,-23)$.

▫ وبالعكس، نتيقّن مباشرة أنّ ثنائيات المجموعة $\{(0,2),(0,-2),(4,23),(4,-23)\}$ هي حلولٌ للمعادلة المعطاة، فهي إذن مجموعة الحلول المطلوبة. ■

⑤ نتأمّل كثير حدود $P(X)$ أمثاله أعداد صحيحة ودرجته n أكبر تماماً من 1. ونتأمّل عدداً طبيعيّاً موجباً تماماً k. نعرّف $Q(X)=\underbrace{P\circ P\circ\cdots\circ P}_{k\text{ مرّة}}(X)$، أي كثير الحدود الناتج من تركيب P مع نفسه k مرّة. أثبت أنّ عدد الحلول في $\mathbb{Z}$ للمعادلة $Q(x)=x$ يساوي n على الأكثر.

▫ لنعرّف كثيرات الحدود $P^{[j]}$ تدريجيّاً بالعلاقات

$$P^{[1]}=P \quad \text{و} \quad P^{[j]}=P\circ P^{[j-1]} \text{ في حالة } j\geq 2$$

فيكون $Q=P^{[k]}$. ثُمّ لنعرّف

$$\mathrm{Fix}(j)=\left\{x\in\mathbb{Z}: P^{[j]}(x)=x\right\}$$

المطلوب هو إثبات أنّ $\mathrm{card}(\mathrm{Fix}(k))\leq n$.

▫ حالة $k=1$، ليس هناك ما يجب إثباته لأنّ درجة $P(X)-X$ تساوي n.

▫ حالة $k=2$، ليس هناك ما يجب إثباته في حالة $\mathrm{Fix}(1)=\mathrm{Fix}(2)$، لنفترض إذن أنّ $\mathrm{Fix}(1)\subsetneq\mathrm{Fix}(2)$. ولنختر عنصراً a من $\mathrm{Fix}(2)$ لا ينتمي $\mathrm{Fix}(1)$. فيكون

$$b=P(a)\neq a \quad \text{و} \quad P(b)=a$$

ثُمّ ليكن t عنصراً ما من $\mathrm{Fix}(2)\backslash\{a,b\}$. ولنعرّف $s=P(t)$ فيكون $t=P(s)$. باستخدام الخاصّة المعروفة التي تنصّ على أنّ $X-Y$ يقسم $P(X)-P(Y)$، نستنتج وجود كثير حدود $\Lambda(X,Y)$ من $\mathbb{Z}[X,Y]$ يُحقّق

$$P(X)-P(Y)=\Lambda(X,Y)(X-Y) \qquad (1)$$

وعندها يكون

$$\begin{aligned} t-a &= P(s)-P(b)=\Lambda(s,b)(s-b)\\ &= \Lambda(s,b)(P(t)-P(a))=\Lambda(s,b)\Lambda(t,a)(t-a)\end{aligned}$$

ولأنّ $t\neq a$ نرى أنّ $\Lambda(s,b)\Lambda(t,a)=1$، ولكنّ العددين $\Lambda(s,b)$ و $\Lambda(t,a)$ عددان صحيحان، كلٌّ منهما ينتمي إلى $\{-1,1\}$ ومن ثَمّ يوجد ε من $\{-1,1\}$ يُحقّق $t-a=\varepsilon(s-b)$. ونجد بالمماثلة ε' من $\{-1,1\}$ يُحقّق $t-b=\varepsilon'(s-a)$. فإذا كان $\varepsilon=\varepsilon'=+1$ استنتجنا بالطرح أنّ $b-a=a-b$ ومن ثَمّ $a=b$ وهذا يناقض الفرْض. إذن $\varepsilon=-1$ أو $\varepsilon'=-1$ وفي كِلا الحالتين نجد $t+s=a+b$، أو $P(t)+t-a-b=0$.

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ

$$\mathrm{Fix}(2) \subset \{x \in \mathbb{Z} : P(x) + x - a - b = 0\}$$

وهذا يبرهن على أنّ

$$\mathrm{card}(\mathrm{Fix}(2)) \leq \deg(P(X) + X - a - b) = n$$

وبذا يكتمل الإثبات في حالة $k = 2$.

▫ نأتي الآن إلى حالة $k \geq 3$.

نلاحظ أوّلاً أنّ $\mathrm{Fix}(1) \subset \mathrm{Fix}(k)$، فإذا كان $\mathrm{Fix}(1) = \mathrm{Fix}(k)$ تمّ المطلوب لأنّ $\mathrm{card}(\mathrm{Fix}(1)) \leq n$.

▫ لنفترض إذن أنّ $\mathrm{Fix}(1) \subsetneq \mathrm{Fix}(k)$، وليكن x_0 عنصراً من $\mathrm{Fix}(k)$ لا ينتمي إلى $\mathrm{Fix}(1)$. فهو إذن يُحقّق

$$P^{[k]}(x_0) = x_0 \text{ و } P(x_0) \neq x_0$$

لنعرّف متتالية الأعداد الصحيحة $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ تدريجيّاً بوضع $x_j = P\big(x_{j-1}\big)$ في حالة j من المجموعة $\mathbb{N}^*$. نرى مباشرة أنّ هذه المتتالية متتالية دوريّة إذْ إنّ

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad x_{j+k} = x_j$$

باستخدام الخاصّة المعروفة التي تنصّ على أنّ كثير الحدود $P(X) - X$ يقسم كثير الحدود $P(P(X)) - P(X)$، نستنتج وجود كثير حدود $\lambda(X)$ من $\mathbb{Z}[X]$ يُحقّق

$$P(P(X)) - P(X) = \lambda(X)(P(X) - X)$$

وعليه يكون

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad x_{j+2} - x_{j+1} = \lambda\big(x_j\big)\big(x_{j+1} - x_j\big)$$

نستنتج من ذلك أنّ

$$x_1 - x_0 = x_{k+1} - x_k = \lambda(x_{k-1})\lambda(x_{k-2})\cdots\lambda(x_0)(x_1 - x_0)$$

ولأنّ $x_1 - x_0 = P(x_0) - x_0 \neq 0$، نجد

$$\lambda(x_{k-1})\lambda(x_{k-2})\cdots\lambda(x_0) = 1$$

ولكنّ الأعداد $(\lambda(x_{k-1}), \lambda(x_{k-2}), \ldots, \lambda(x_0))$ أعدادٌ صحيحة، مما يبرهن على أنّها تنتمي إلى المجموعة $\{-1,1\}$.

وهكذا نرى أنّ

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \left|x_{j+1} - x_j\right| = \left|x_1 - x_0\right|$$

لنفترض أنّ $x_m = \min(x_1, \ldots, x_k)$، عندئذ نستنتج مما سبق أنّ

$$x_{m-1} - x_m = x_{m+1} - x_m > 0$$

ومن ثَمّ $x_{m-1} = x_{m+1} \neq x_m$ وهذا يقتضي أنّ $\forall j \geq 0, \quad x_{m+j-1} = x_{m+j+1}$، أو $\forall j \geq m, x_{j-1} = x_{j+1}$، وإذا استفدنا من دوريّة المتتالية $(x_j)_{j\geq 0}$ استنتجنا من ذلك أنّ $\forall j \geq 0, x_{j+2} = x_j$، ومن ثَمّ

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad x_{2j} = x_0, x_{2j+1} = x_1$$

وهذا يبرهن على أنّ $x_0 \in \mathrm{Fix}(2)$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $\mathrm{Fix}(k) \subset \mathrm{Fix}(2)$. فإذا استفدنا من النقطة السابقة استنتجنا من جديد أنّ $\mathrm{card}(\mathrm{Fix}(k)) \leq n$، وهي النتيجة المرجوّة. ■

⑥ **نقرن بكلّ ضلعٍ b من أضلاع مضلّع محدّب P العدد A_b الذي يمثّل أكبر مساحة لمثلّث، أحد أضلاعه b، ومحتوى في P. أثبت أنّ مجموع المساحات A_b عندما تتحوّل b على أضلاع P أكبر من ضعفي مساحة P.**

لنبدأ بالتمهيد التالي.

تمهيد : نتأمّل مضلّعاً محدّباً بالمعنى العام Q مكوّناً من $2n$ ضلعاً، مساحته S. عندئذ يوجد في هذا المضلّع ضلعٌ $[AB]$، ورأسٌ C، تكون عندهما مساحة المثلّث ABC أكبر أو تساوي $\dfrac{S}{n}$.

الإثبات

لنسمِّ $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ رؤوس Q، مرتّبة بالاتجاه المباشر، مع الاصطلاح المعتاد $A_k = A_{k \bmod 2n}$ في حالة k من $\mathbb{N}$. ثُمّ لنعرّف الأقطار $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ بالصيغة $d_k = (A_k A_{k+n})$، ولنضع M_k نقطة تقاطع القطرين المتتاليين d_k و d_{k+1} وذلك في حالة k من $\mathbb{N}$. نلاحظ أنّ

$$M_k = M_{k \bmod n} \text{ و } d_k = d_{k \bmod n}$$

وأخيراً لنعرّف المثلّث $\Delta_k = A_k A_{k+1} M_k$ في حالة k من $\mathbb{N}$.

لنبرهن على أنّ المضلّع Q محتوى في اجتماع المثلّثات $(\Delta_k)_{0\le k<2n}$.

لتكن N نقطة من المضلّع Q. إذا انتمت N إلى أحد الأقطار $(d_k)_{0\le k<n}$ أو إلى أحد أضلاع Q انتمت وضوحاً إلى $\bigcup_{k=0}^{2n-1}\Delta_k$. لنفترض إذن أنّ N تقع داخل المضلّع Q ولا تنتمي إلى أيٍّ من الأقطار $(d_k)_{0\le k<n}$.

نعرّف $\overrightarrow{u_k}$ الشعاع الناتج من دوران $\overrightarrow{A_kA_{k+n}}$ بالاتجاه الموجب بزاوية قدرها $\frac{\pi}{2}$. ثُمّ نعرّف أنصاف المستويات

$$\mathcal{P}_k^- = \left\{M : \overrightarrow{A_kM}\cdot\overrightarrow{u_k} < 0\right\} \text{ و } \mathcal{P}_k^+ = \left\{M : \overrightarrow{A_kM}\cdot\overrightarrow{u_k} > 0\right\}$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{u_k} = -\overrightarrow{u_{k+n}}$ ومن ثَمّ

$$\overrightarrow{A_{k+n}M}\cdot\overrightarrow{u_{k+n}} = -\left(\overrightarrow{A_kM} - \overrightarrow{A_kA_{k+n}}\right)\cdot\overrightarrow{u_k} = -\overrightarrow{A_kM}\cdot\overrightarrow{u_k} \qquad (1)$$

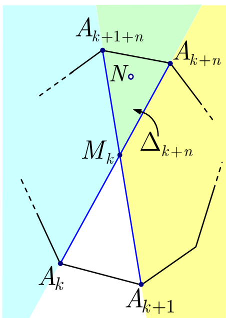
فإذا كان

$$\forall k\in\{0,\ldots,n-1\},\quad \left(\overrightarrow{A_kN}\cdot\overrightarrow{u_k}\right)\left(\overrightarrow{A_{k+1}N}\cdot\overrightarrow{u_{k+1}}\right) > 0$$

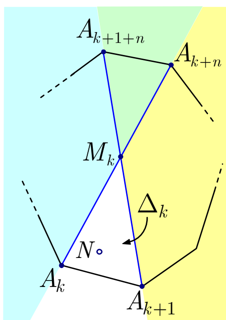
نتج من ذلك أنّ للمقدارين $\overrightarrow{A_0N}\cdot\overrightarrow{u_0}$ و $\overrightarrow{A_nN}\cdot\overrightarrow{u_n}$ الإشارة نفسها وهذا يناقض (1)، وبالطبع لا يمكن لأيٍّ من هذه المقادير أن يكون معدوماً لأنّ N لا تقع على أيٍّ من الأقطار $(d_k)_{0\le k<n}$. إذن يوجد عددٌ k_0 من المجموعة $\{0,\ldots,n-1\}$ يُحقّق

$$\left(\overrightarrow{A_{k_0}N}\cdot\overrightarrow{u_{k_0}}\right)\left(\overrightarrow{A_{k_0+1}N}\cdot\overrightarrow{u_{k_0+1}}\right) < 0$$

- فإمّا أن تنتمي N إلى $\mathcal{P}_{k_0}^- \cap \mathcal{P}_{k_0+1}^+$، وهذا يعني أنّ N تنتمي إلى المثلّث Δ_{k_0}.
- أو تنتمي N إلى $\mathcal{P}_{k_0}^+ \cap \mathcal{P}_{k_0+1}^-$، وهذا يعني أنّ N تنتمي إلى المثلّث Δ_{k_0+n}.



$N\in\mathcal{P}_k^+\cap\mathcal{P}_{k+1}^-$



$N\in\mathcal{P}_k^-\cap\mathcal{P}_{k+1}^+$

وهكذا نكون قد أثبتنا صحّة الاحتواء

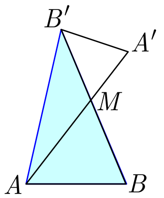
$$Q\subset\bigcup_{k=0}^{n-1}\left(\Delta_k\cup\Delta_{k+n}\right) \qquad (2)$$

نستنتج من (2) أنّه يوجد عددٌ k' من $\{0,\ldots,n-1\}$ يُحقّق

$$\frac{S}{n}=\frac{\mathcal{A}(Q)}{n}\le\mathcal{A}(\Delta_{k'})+\mathcal{A}(\Delta_{k'+n})$$

وقد استخدمنا الرمز $\mathcal{A}(R)$ للدلالة على مساحة المضلّع R.

لنكتب A و B و A' و B' و M دلالة على النقاط $A_{k'}$ و $A_{k'+1}$ و $A_{k'+n}$ و $A_{k'+1+n}$ و $M_{k'}$ بالترتيب.



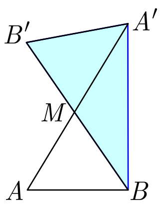
- فإذا كان $MA\ge MA'$ كان

$$\mathcal{A}(\Delta_{k'+n})=\mathcal{A}(B'MA')\le\mathcal{A}(B'AM)$$

ومن ثَمّ

$$\mathcal{A}(\Delta_{k'+n})+\mathcal{A}(\Delta_{k'})\le\mathcal{A}(B'AM)+\mathcal{A}(AMB)=\mathcal{A}(B'AB)$$

ويكون المثلّث $B'AB$ هو المثلّث المطلوب في التمهيد.



- وإذا كان $MA<MA'$ كان

$$\mathcal{A}(\Delta_{k'})=\mathcal{A}(MAB)\le\mathcal{A}(A'MB)$$

ومن ثَمّ

$$\mathcal{A}(\Delta_{k'+n})+\mathcal{A}(\Delta_{k'})\le\mathcal{A}(B'MA')+\mathcal{A}(A'MB)=\mathcal{A}(A'B'B)$$

ويكون المثلّث $A'B'B$ هو المثلّث المطلوب، وهكذا يكتمل إثبات التمهيد.

ليكن P مضلّعاً محدّباً مساحته S، وله m ضلعاً نرمز إليها $(b_k)_{1\le k\le m}$. ولتكن $\mathcal{A}_{b_k}$ مساحة أكبر مثلّث محتوى في P وأحد أضلاعه هو b_k. ولنفترض على سبيل الجدل أنّ

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\mathcal{A}_{b_k}}{S}<2 \tag{$\mathbb{H}$}$$

عندئذ توجد أعدادٌ عاديّة $(r_k)_{1\le k\le m}$ تُحقّق

$$\forall k\in\{1,\ldots,m\},\quad \frac{\mathcal{A}_{b_k}}{S}<r_k \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{m}r_k=2$$

فإذا كان n مُضاعفاً مشتركاً لمقامات الأعداد $(r_k)_{1\le k\le m}$، وكتبنا $r_k=\frac{\ell_k}{n}$ في حالة k من المجموعة $\{1,\ldots,m\}$، كان لدينا $\sum_{k=1}^{m}\ell_k=2n$. وعندئذ نجزّئ الضلع b_k من P إلى ℓ_k قطعة مستقيمة متساوية الطول. فنحصل بذلك على مضلّع Q مساحته S، وله $2n$ ضلعاً، (قد يساوي قياس بعض زواياه π، ولكن لا ضير في ذلك).

اعتماداً على نتيجة التمهيد، يوجد ضلعٌ $[AB]$ في Q، ورأسٌ C من رؤوس Q، يُحقّقان أنّ مساحة المثلّث $\Delta = ABC$ أكبر أو تساوي $\frac{S}{n}$.

فإذا كان الضلع $[AB]$ جزءاً من الضلع b_j في P حقّقت مساحة المثلّث $\mathcal{T}$ الذي أحد أضلاعه b_j ورأسه الثالث C، ما يلي :

$$\mathcal{A}(\mathcal{T}) = \ell_j \cdot \mathcal{A}(\Delta) \geq \frac{\ell_j}{n} S = r_j S > \mathcal{A}_{b_j}$$

وهذا يناقض تعريف $\mathcal{A}_{b_j}$. والافتراض $\mathbb{H}$ افتراضٌ خطأ، ولا بُدَّ أن يكون

$$\sum_{k=1}^{m} \mathcal{A}_{b_k} \geq 2S$$

وهي النتيجة المطلوب إثباتها.

ملاحظة : لقد استفدنا من الخاصّة التالية : إذا حقّقت أعدادٌ $(x_1, \ldots, x_m)$ المتراجحة التالية

$$\sum_{k=1}^{m} x_k < q$$

و q عددٌ عادي. عندئذ توجد أعدادٌ عاديّة $(r_1, \ldots, r_m)$ تُحقّق

$$\forall k \in \{1, \ldots, m\}, \quad x_k < r_k \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{m} r_k = q$$

وهي خاصّة بسيطة يجري إثباتها بالتدريج على العدد m.

① **نُعطى أعداداً حقيقيّة** a_1 **و** a_2 **و ... و** a_n **. ونعرّف في حالة** i **(حيث** $1 \leq i \leq n$**) المقدار**

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

ونضع $d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$.

(a) **أثبت أنّه أيّاً كانت الأعداد الحقيقيّة** x_1 **و ... و** x_n **التي تحقّق** $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ **فإنّ**

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2} \qquad (*)$$

(b) **أثبت وجود أعداد حقيقيّة** x_1 **و ... و** x_n **تُحقّق** $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$**، وتُحقّق المساواة في** $(*)$.

(a) لنفترض على سبيل الجدل أنّ النتيجة غير صحيحة. عندئذ توجد أعداد حقيقيّة x_1 و ... و x_n تحقّق $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ ويكون في حالتها

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} < \frac{d}{2}$$

أي

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \quad x_i - \frac{d}{2} < a_i < x_i + \frac{d}{2}$$

لتكن i_0 من $\mathbb{N}_n$ تُحقّق $d = d_{i_0}$. عندئذ في حالة $1 \leq j \leq i_0$ يكون لدينا

$$a_j < x_j + \frac{d}{2} \leq x_{i_0} + \frac{d}{2}$$

ومن ثَمّ $\max\{a_j : 1 \leq j \leq i_0\} < x_{i_0} + \frac{d}{2}$، وفي حالة $i_0 \leq j \leq n$ يكون لدينا

$$a_j > x_j - \frac{d}{2} \leq x_{i_0} - \frac{d}{2}$$

ومن ثَمّ $\min\{a_j : i_0 \leq j \leq n\} > x_{i_0} - \frac{d}{2}$. إذن

$$d_{i_0} = \max_{1 \leq j \leq i_0}(a_j) - \min_{i_0 \leq j \leq n}(a_j) < x_{i_0} + \frac{d}{2} - \left(x_{i_0} - \frac{d}{2}\right) = d$$

وهذا يناقض تعريف i_0 . إذن لا بُدّ أن تكون الخاصة (a) صحيحة.

(b) لنضع بالتعريف :

$$x_i = \max_{1\le j\le i}(a_j) - \frac{d}{2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

من الواضح أنّ $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$. ولدينا في حالة $1 \le i \le n$ ما يلي :

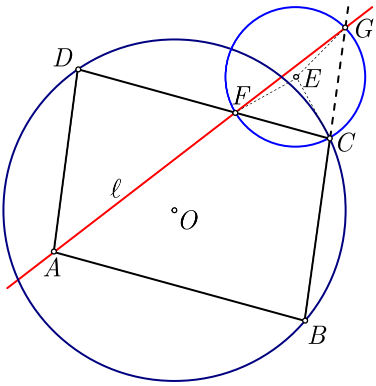
$$x_i - a_i \ge x_i - \max_{1\le j\le i}(a_j) = -\frac{d}{2}$$

وكذلك

$$x_i - a_i \le x_i - \min_{i\le j\le n}(a_j) = d_i - \frac{d}{2} \le d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$$

إذن $\max_{1\le i\le n}(|x_i - a_i|) \le \frac{d}{2}$, وتنتج المتراجحة المُعاكسة من (a). فيكون لدينا في هذه الحالة $\max_{1\le i\le n}(|x_i - a_i|) = \frac{d}{2}$. وهذا يُثبتُ الخاصّة المطلوبة.

② **نتأمّل في المستوي خمس نقاط** A **و** B **و** C **و** D **و** E **. نفترض أنّ** $ABCD$ **متوازي أضلاع، وأنّ** $BCED$ **رباعي دائري. ليكن** ℓ **مستقيماً مارّاً بالنقطة** A **، لنفترض أنّ** ℓ **يقطع داخل القطعة المستقيمة** $[DC]$ **في** F **ويقطع المستقيم** (BC) **في** G **. نفترض أيضاً أنّ** $EF = EG = EC$ **. أثبت أنّ** ℓ **ينصّف الزاوية** $\widehat{DAB}$ **.**



سنبرهن بدلاً من ذلك الخاصّة التالية :

نفترض أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع، ونعرّف F و G كما في نص المسألة، وأخيراً نعرّف E بأنّها مركز الدائرة المارّة برؤوس المثلّث GFC. عندئذ يكون الرباعي $BCED$ دائريّاً إذا وفقط إذا كان ℓ منصّف الزاوية $\widehat{DAB}$.

نطابق المستوي مع مجموعة الأعداد العقديّة، ونفترض أنّ الدائرة المارّة برؤوس المثلّث BCD هي الدائرة المثلّثيّة. نرمز إلى الأعداد العقديّة التي تمثّل النقاط A و B و C و D و E و F و G بالرموز α و β و γ و δ و η و φ و ψ بالترتيب. كما نسمّي t النسبة $\frac{DF}{DC}$ وهي عددٌ من المجال $]0,1[$.

فيكون لدينا بناءً على مبرهنة تالس

$$\frac{DF}{DG}=\frac{AF}{AG}=\frac{BC}{BG}=t$$

أي

$$\frac{\delta-\varphi}{\delta-\gamma}=\frac{\beta-\gamma}{\beta-\psi}=t \qquad (1)$$

نستنتج من كون $|\delta|=|\gamma|=1$ و $\frac{\delta-\varphi}{\delta-\gamma}=\overline{\left(\frac{\delta-\varphi}{\delta-\gamma}\right)}$ أنّ $\delta-\varphi=\gamma\delta\overline{\varphi}-\gamma$

ومن ثَمّ

$$\overline{\varphi-\gamma}=-\frac{\varphi-\gamma}{\delta\gamma} \qquad (2)$$

وبالمماثلة، نستنتج من كون $|\beta|=|\gamma|=1$ و $\frac{\beta-\gamma}{\beta-\psi}=\overline{\left(\frac{\beta-\gamma}{\beta-\psi}\right)}$ أنّ

$$\overline{\psi-\gamma}=-\frac{\psi-\gamma}{\beta\gamma} \qquad (3)$$

أمّا النقطة E فتتعيّن من $EF=EC=EG$. ولكن

$$\begin{aligned}|\eta-\varphi|^2&=|(\eta-\gamma)-(\varphi-\gamma)|^2\\&=|\eta-\gamma|^2+|\varphi-\gamma|^2-2\,\mathrm{Re}\big((\eta-\gamma)\overline{(\varphi-\gamma)}\big)\end{aligned}$$

و كذلك

$$\begin{aligned}|\eta-\psi|^2&=|(\eta-\gamma)-(\psi-\gamma)|^2\\&=|\eta-\gamma|^2+|\psi-\gamma|^2-2\,\mathrm{Re}\big((\eta-\gamma)\overline{(\psi-\gamma)}\big)\end{aligned}$$

إذن تُكافئ المساواة

$$|\eta-\varphi|=|\eta-\gamma|=|\eta-\psi|$$

ما يلي

$$|\varphi-\gamma|^2-2\,\mathrm{Re}\big((\eta-\gamma)\overline{(\varphi-\gamma)}\big)=0$$

و

$$|\psi-\gamma|^2-2\,\mathrm{Re}\big((\eta-\gamma)\overline{(\psi-\gamma)}\big)=0$$

أو

$$2\operatorname{Re}\left(\frac{\eta-\gamma}{\psi-\gamma}\right)=1 \quad \text{و} \quad 2\operatorname{Re}\left(\frac{\eta-\gamma}{\varphi-\gamma}\right)=1$$

نستنتج إذن بالاستفادة من (2) أنّ

$$1=\frac{\eta-\gamma}{\varphi-\gamma}+\frac{\overline{\eta-\gamma}}{\overline{\varphi-\gamma}}=\frac{\eta-\gamma-\delta\gamma(\overline{\eta-\gamma})}{\varphi-\gamma}$$

ومن ثَمّ $\eta=\varphi+\delta\gamma(\overline{\eta-\gamma})$. كما نستنتج بالمثل وبالاستفادة من الخاصّة (3) أنّ $\eta=\psi+\beta\gamma(\overline{\eta-\gamma})$. إذن

$$\eta=\frac{\delta\psi-\beta\varphi}{\delta-\beta} \tag{4}$$

يمكن كتابة η بالصيغة المُكافئة التالية بعد أن نستفيد من (1) :

$$\eta=\frac{\delta(\psi-\beta)-\beta(\varphi-\delta)}{\delta-\beta}=\frac{t\beta(\delta-\gamma)-\frac{1}{t}\delta(\beta-\gamma)}{(\delta-\gamma)-(\beta-\gamma)}$$

إذن

$$|\eta|^2=\frac{t^2|\delta-\gamma|^2+\frac{1}{t^2}|\beta-\gamma|^2-2\operatorname{Re}\Big(\beta\overline{\delta}(\delta-\gamma)\overline{(\beta-\gamma)}\Big)}{|\delta-\gamma|^2+|\beta-\gamma|^2-2\operatorname{Re}\Big((\beta-\gamma)\overline{(\delta-\gamma)}\Big)}$$

ولكن

$$\beta\overline{\delta}(\delta-\gamma)\overline{(\beta-\gamma)}=(\gamma-\beta)\overline{(\gamma-\delta)}$$

إذن

$$\begin{aligned}|\eta|^2-1&=\frac{t^2|\delta-\gamma|^2+\frac{1}{t^2}|\beta-\gamma|^2-|\delta-\gamma|^2-|\beta-\gamma|^2}{|\delta-\beta|^2}\\&=\frac{t^2-1}{t^2|\delta-\beta|^2}\Big(t^2|\delta-\gamma|^2-|\beta-\gamma|^2\Big)\\&=\frac{t^2-1}{t^2|\delta-\beta|^2}\Big(|\delta-\varphi|^2-|\beta-\gamma|^2\Big)\end{aligned}$$

فنكون قد أثبتنا أنّ

$$|\eta|=1\Leftrightarrow|\delta-\varphi|=|\delta-\alpha|$$

لأن $\delta-\alpha=\beta-\gamma$.

هندسياً، هذا يُكافئ قولنا إنّ النقطة E تقع على الدائرة المارّة برؤوس المثلّث BCD إذا وفقط إذا كان $DF = DA$. وهذا يكافئ أنّ

$$\widehat{DAF} = \frac{1}{2}\left(\pi - \widehat{ADC}\right) = \frac{1}{2}\widehat{DAB}$$

أي أنّ المستقيم ℓ هو منصّف الزاوية $\widehat{DAB}$. ◼

③ **في مسابقة للرياضيّات، بعضُ المتسابقين أصدقاء. بالطبع علاقة الصداقة دوماً متبادلة. نسمّي مجموعةً من المتسابقين « عُصْبَة » إذا كان أيُّ اثنين من عناصرها صديقين. (بوجه خاص، كلُّ مجموعة من المتسابقين عدد عناصرها أصغر تماماً من اثنين تُكوِّن عُصبة.) نسمي « حجم العصبة » عدد عناصرها.**

نفترض في هذه المسابقة، أنّ أكبر حجم لعُصبة هو عددٌ زوجي. أثبت أنّه يمكن توزيع المتسابقين في غرفتين بحيث يكون أكبر حجمٍ لعُصبة محتواة في الغرفة الأولى مساوياً أكبر حجمٍ لعُصبة محتواة في الغرفة الثانية.

لنرمز R_1 و R_2 إلى الغرفتين. سنرمز بالرمز $M(R_i)$ إلى أكبر حجمٍ لعُصبة في الغرفة R_i .

- في البدء نضع في الغرفة R_1 عناصر عصبةٍ حجمها أعظمي، وفقط هؤلاء، أمّا بقية المتسابقين فنضعهم في الغرفة R_2 .
- ثُمّ نطبّق المرحلة الأولى التالية :

طالما كان $M(R_1) > M(R_2)$ اختر متسابقاً من R_1 وانقله إلى R_2 .

لاحظ أنّ $M(R_1) = \text{card}(R_1)$ ، إذن عند نقل متسابقٍ من R_1 إلى R_2 ، العدد $M(R_1)$ ينقص واحداً أمّا العدد $M(R_2)$ فإمّا أن يبقى على حاله أو أن يزيد واحداً، وعليه فإن الفرق $M(R_1) - M(R_2)$ ينقص بالضرورة بمقدار 1 أو 2 . نستنتج إذن أنّ المرحلة الأولى ستتوقّف بعد عددٍ منتهٍ من الخطوات.

بعد انتهاء المرحلة الأولى نصل إلى إحدى الحالتين التاليتين :

1. إمّا أن يكون $M(R_1) = M(R_2)$ فنكون قد حقّقنا المطلوب.
2. أو أن يكون $M(R_1) = M(R_2) - 1$ ، فننتقل إلى المعالجة اللاحقة.

▫ لنفترض أنّ $M(R_1) = p$، فيكون $M(R_2) = p+1$. ولنرمز بالرمز A_0 إلى مجموعة المتسابقين الموجودين في الغرفة R_1، وهم يكوّنون بمجموعهم عُصبة أي إنّ $\operatorname{card}(A_0) = p$. وكذلك لنرمز بالرمز A إلى مجموعة المتسابقين الذين جرى نقلهم من الغرفة R_1 إلى R_2 أثناء تنفيذ المرحلة الأولى. إذن تكوّن مجموعة المتسابقين $A \cup A_0$ العُصبة ذات الحجم الأعظمي التي بدأنا بها. ولمّا كان $\operatorname{card}(A \cup A_0)$ عدداً زوجيّاً، استناداً إلى الفرْض، استنتجنا أنّ $\operatorname{card}(A) \equiv p \bmod 2$، ومن ثَمّ لا يمكن أن تكون A عُصبةً ذات حجم أعظمي في R_2، لأنّ $M(R_2) = p+1$.

▫ في حالة وجود عُصبة ذات حجم أعظمي C في R_2 تُحقّق $A \not\subset C$، عندئذ يوجد في A متسابقٌ a لا ينتمي إلى العصبة C، وعندها تؤدي إعادة هذا المتسابق إلى R_1 إلى جعل $M(R_1) = p+1$ في حين يبقى $M(R_2) = \operatorname{crad}(C) = p+1$، ويتحقّق بذلك المطلوب.

▫ لنفترض إذن أنّ A محتواة في جميع العُصبات الأعظميّة C_1 و C_2 و … و C_n في R_2. ولنضع $K_i = C_i \backslash A$ في حالة i من $\{1,\ldots,n\}$. نعلم استناداً إلى نقطة سابقة أنّ أيّاً من المجموعات $(K_i)_{1\le i\le n}$ ليست خالية.

▫ نصل الآن إلى النقطة الحاسمة. نبدأ بنقل متسابقين من R_2 إلى R_1 وفق الآليّة التالية : نختار كيفيّاً متسابقاً x_1 من K_1 وننقله إلى R_1. إنّ نقل x_1 إلى R_1 يُفقد العصبة C_1 صفتها الأعظميّة، فإذا كان ذلك يُفقد، في الوقت نفسه، بقيّة العُصبات C_2 و … و C_n هذه الصفة، (وهذا يُكافئ $x_1 \in \bigcap_{i=1}^{n} K_i$)، أصبح لدينا $M(R_1) = M(R_2) = p$، وتحقّق المطلوب. (تنجم حقيقة أنّ المتسابق x_1 لا يؤلّف عصبة مع A_0 من كون العصبة $A_0 \cup A$ ذات حجم أعظمي.) وإلاّ توجد عُصبة، ولتكن C_2، لا ينتمي إليها المتسابق x_1. إذن يوجد متسابقٌ x_2 ينتمي إلى K_2 دون أن يكون صديقاً مع x_1. ننقل إذن x_2 إلى R_1. إنّ نقل x_2 إلى R_1 يُفقد العصبة C_2 صفتها الأعظميّة، فإذا أفقد ذلك بقيّة العُصبات C_3 و … و C_n هذه الصفة، توقّفنا. وإلاّ توجد عُصبة، ولتكن C_3، لا ينتمي إليها المتسابق x_2، فنختار كما في السابق متسابقاً x_3 من K_3 لا يكون صديقاً مع x_2. وننقله إلى R_1، ونتابع بهذا الأسلوب.

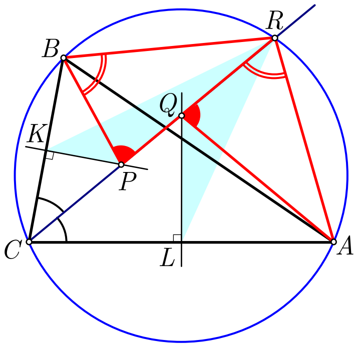
▫ عند كلّ نقلة من النقلات السابقة، إمّا أن يبقى $M(R_1)$ مساوياً p أو أن يصبح $p+1$. فإذا أصبح مساوياً $p+1$ قبل النقلة الأخيرة، أي قبل أن يجري تدمير جميع العُصبات الأعظميّة ذات $p+1$ عنصراً في R_2. وصلنا إلى حالة يكون فيها $M(R_1) = M(R_2)$ وتحقّق المطلوب. وكذلك الحال إذا بقي $M(R_1) = p$ بعد أن أجرينا النقلة الأخيرة، فعندها يصبح لدينا $M(R_1) = M(R_2) = p$ ، ويتحقّق المطلوب.

إذن بقي علينا معالجة الحالة التالية : قبل النقلة الأخيرة التي قضتْ على آخر العُصبات الأعظميّة ذات $p+1$ عنصراً في R_2 ، لم يكن هناك عصبةٌ ذات $p+1$ عنصراً في R_1 ، ولكنها ظهرت في R_1 بعد هذه النقلة. وهذا ما سنحلّله في الفقرة التالية.

▫ لنتذكّر كيف أجرينا هذه النقلات. لقد نقلنا المتسابقين $x_1, x_2, \ldots, x_\ell$ تباعاً من R_1 إلى R_2 بحيث لا يكون x_i و x_{i+1} صديقين، في حالة $1 \le i < \ell$، وعلى وجه الخصوص $x_{\ell-1}$ و x_ℓ ليسا صديقين. وفي الحالة التي ندرسها، ينتمي x_ℓ إلى عُصبة X عدد عناصرها $p+1$ في $R_1 = A_0 \cup \{x_1, \ldots, x_\ell\}$ ، ولأنّ $x_{\ell-1}$ و x_ℓ ليسا صديقين فلا يمكن أن يكون $x_{\ell-1}$ عضواً في العصبة X.

في الحقيقة، لقد جرى تدمير العُصبة $C_{\ell-1}$ في المرحلة ما قبل الأخيرة، مما يعني أنّ المتسابقين $x_1, x_2, \ldots, x_{\ell-2}$ لا ينتمون إلى $C_{\ell-1}$، وكذلك فإنّ $x_\ell \notin C_{\ell-1}$ لأنّ $x_{\ell-1}$ و x_ℓ ليسا صديقين، وعليه فإنّ إرجاع $x_{\ell-1}$ إلى R_2 يُعيد تكوين العُصبة $C_{\ell-1} = A \cup K_{\ell-1}$ ذات $p+1$ عنصراً في R_2 ، ويتحقّق بذلك التوازن المطلوب. ويتمّ الإثبات. ■

④ في مثلّث ABC ، يقطع منصّف الزاوية $\widehat{BCA}$ الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC ثانية في R ، ويقطع محور القطعة المستقيمة $[BC]$ في P ويقطع أيضاً محور القطعة المستقيمة $[AC]$ في Q. نسمّي K منتصف $[BC]$ ، ونسمّي L منتصف $[AC]$. أثبت أنّ للمثلّثين RPK و RQL المساحة نفسها.



سنكتب $\mathcal{A}(XYZ)$ دلالة على مساحة مثلّث XYZ.

لمّا كان

$$\widehat{RQL} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{C}}{2} = \widehat{RPK}$$

استنتجنا أنّ

$$\frac{\mathcal{A}(RQL)}{\mathcal{A}(RPK)} = \frac{RQ}{RP} \cdot \frac{QL}{PK}$$

من تشابه المثلّثين القائمين QLC و PKC نستنتج أنّ

$$\frac{QL}{PK} = \frac{QC}{PC} = \frac{QA}{PB}$$

إذْ استفدنا من كون (QL) محور $[CA]$، و (PK) محور $[BC]$. وعليه نرى أنّ

$$\frac{\mathcal{A}(RQL)}{\mathcal{A}(RPK)} = \frac{RQ}{RP} \cdot \frac{QA}{PB}$$

المثلّثان RQA و BPR متشابهان لأنّ

$$\widehat{ARQ} = \widehat{ABC} = \widehat{RBC} - \widehat{RBA} = \widehat{RBP} + \cancel{\widehat{PBC}} - \cancel{\widehat{RCA}} = \widehat{RBP}$$

و

$$\widehat{RQA} = 2\widehat{QCA} = \widehat{BCA} = 2\widehat{BCP} = \widehat{BPR}$$

ونسبة تشابههما تساوي 1 لأنّ $RA = RB$، إذن

$$1 = \frac{\mathcal{A}(RQA)}{\mathcal{A}(RPB)} = \frac{RQ}{RP} \cdot \frac{QA}{PB}$$

ومنه نستنتج أنّ $\dfrac{\mathcal{A}(RQL)}{\mathcal{A}(RPK)} = 1$، وهي النتيجة المطلوبة.

⑤ **ليكن a و b عددين طبيعيّين موجبين تماماً. أثبت أنّه إذا قسم العددُ $4ab-1$ العددَ $\left(4a^2-1\right)^2$ فلا بُدّ أن يكون $a=b$.**

لنلاحظ أنّ

$$4a^2 - 1 = 4a(a-b) + 4ab - 1 \equiv 4a(a-b) \bmod (4ab-1)$$

ومن ثَمّ

$$\left(4a^2-1\right)^2 \equiv (4a)^2(a-b)^2 \bmod (4ab-1)$$

إذن $(4ab-1)\mid\left(4a^2-1\right)^2$ إذا وفقط إذا كان $(4ab-1)\mid(4a)^2(b-a)^2$،
ولكنّ العددين $(4a)^2$ و $(4ab-1)$ أوّليان فيما بينهما، لأنّ

$$(4a)^2\,b^2-(4ab-1)(4ab+1)=1$$

إذن $(4ab-1)\mid(4a)^2(b-a)^2$ إذا وفقط إذا كان $(4ab-1)\mid(b-a)^2$. نرغب بإثبات الخاصّة التالية :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\quad\left((4ab-1)\mid(a-b)^2\right)\Rightarrow a=b$$

ولتحقيق ذلك يكفي أن نبرهن على أنّ المجموعة

$$\mathbb{S}=\left\{(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*:b<a,\,(4ab-1)\mid(a-b)^2\right\}$$

خالية.

▫ لنفترض على سبيل الجدل أنّ $\mathbb{S}\neq\varnothing$، ولنختر عنصراً $(\alpha,\beta)\in\mathbb{S}$ يحقّق

$$\alpha+\beta=\min\{a+b:(a,b)\in\mathbb{S}\}$$

ولنعرّف العدد الطبيعي الموجب تماماً n بالعلاقة

$$(\alpha-\beta)^2=n(4\alpha\beta-1)$$

تُكتب هذه العلاقة بالشكل $\alpha^2-2\beta(1+2n)\alpha+\beta^2+n=0$، أي إنّ α هي جذرٌ لكثير الحدود

$$P(X)=X^2-2\beta(1+2n)X+\beta^2+n$$

ليكن α' الجذر الآخر لهذه المعادلة، عندئذ يكون لدينا

$$\alpha'=2\beta(1+2n)-\alpha=\frac{\beta^2+n}{\alpha}$$

وهذا يقتضي أنّ $\alpha'\in\mathbb{N}^*$. ولكن

$$P(\beta)=-n\left(4\beta^2-1\right)<0$$

إذن تقع β بين الجذرين α و α' لكثير الحدود P. ونستنتج من كون $\beta<\alpha$ أنّ $\alpha'<\beta$. وعليه نرى أنّ $\left(\beta,\alpha'\right)\in\mathbb{S}$ وهذا يناقض أسلوب اختيارنا للعنصر (α,β) من $\mathbb{S}$ لأنّ $\beta+\alpha'<\alpha+\beta$. هذا التناقض يُثبتُ أنّ $\mathbb{S}=\varnothing$، ويبرهن صحّة المطلوب. ■

⑥ ليكن n عدداً طبيعيّاً موجباً تماماً. نتأمّل المجموعة

$$S = \{(x,y,z) \in \{0,1,\ldots,n\}^3 : x+y+z > 0\}$$

وننظر إليها كمجموعة مكونة من $(n+1)^3 - 1$ نقطة في الفضاء الثلاثي الأبعاد. أوجد أصغر عددٍ من المستويات اجتماعها يحوي S، ولا تنتمي إليه النقطة $(0,0,0)$.

لنعرّف في حالة $1 \leq k \leq n$ المستويات $\mathcal{P}_k$ و $\mathcal{Q}_k$ و $\mathcal{R}_k$ بالمعادلات :

$$\mathcal{R}_k : x = k \quad \text{و} \quad \mathcal{Q}_k : y = k \quad \text{و} \quad \mathcal{P}_k : x = k$$

من الواضح أنّ المجموعة S محتواة في اجتماع المستويات : $\bigcup_{(k,\ell,m)\in\mathbb{N}_n^3} (\mathcal{P}_k \cup \mathcal{P}_\ell \cup \mathcal{P}_m)$ ، والتي عددها $3n$، وهذا الاجتماع لا تنتمي إليه النقطة $(0,0,0)$.

إذن إذا أسمينا ℓ أصغر عددٍ من المستويات اجتماعها يحوي المجموعة S، ولا تنتمي إليه النقطة $(0,0,0)$، نكون قد أثبتنا أنّ $\ell \leq 3n$.

نريد الآن أن نثبتَ أنّ $\ell = 3n$، لنفترض على سبيل الجدل أنّ $\ell < 3n$، وأنّه توجد مجموعة من المستويات $(\mathcal{S}_r)_{1\leq r\leq \ell}$ معادلاتها هي $\mathcal{S}_r : a_rX + b_rY + c_rZ + d_r = 0$، اجتماعها يحوي S ولا تنتمي إليه النقطة $(0,0,0)$. نتأمّل إذن كثير الحدود

$$P(X,Y,Z) = \prod_{r=1}^{\ell} (a_rX + b_rY + c_rZ + d_r) - \delta\Omega(X)\Omega(Y)\Omega(Z)$$

وقد عرّفنا

$$\delta = \frac{d_1 d_2 \cdots d_\ell}{\Omega^3(0)} \quad \text{و} \quad \Omega(T) = \prod_{i=1}^{n} (T - i)$$

لّما كانت النقطة $(0,0,0)$ لا تنتمي إلى أيٍّ من المستويات $(\mathcal{S}_r)_{1\leq r\leq \ell}$ استنتجنا أنّ $\delta \neq 0$.
كما نستنتج من تعريف δ أنّ $P(i,j,k) = 0$ أيّاً كانت قيمة (i,j,k) من المجموعة $\{0,1,\ldots,n\}^3$.

لنتأمّل بنية كثير الحدود P، ولنبدأ بتعريف المجموعات

$$\mathcal{I}_X = \{0,1,\ldots,n-1\} \times \{0,1,\ldots,3n\} \times \{0,1,\ldots,3n\}$$
$$\mathcal{I}_Y = \{0,1,\ldots,3n\} \times \{0,1,\ldots,n-1\} \times \{0,1,\ldots,3n\}$$
$$\mathcal{I}_Z = \{0,1,\ldots,3n\} \times \{0,1,\ldots,3n\} \times \{0,1,\ldots,n-1\}$$

نلاحظ أوّلاً أنّ

$$\prod_{r=1}^{\ell}(a_r X + b_r Y + c_r Z + d_r) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma\leq\ell} \lambda_{\alpha\beta\gamma} X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$$

ولّما كان $\ell < 3n$ استنتجنا من الشرط $\alpha+\beta+\gamma \leq \ell$ أنّه إمّا أن يكون $\alpha < n$ ومن ثَمّ $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathcal{I}_X$، أو أن يكون $\beta < n$ ومن ثَمّ $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathcal{I}_Y$، أو أن يكون $\gamma < n$ وهذا بدوره يقتضي أنّ $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathcal{I}_Z$. إذن يمكن أن نكتب

$$\prod_{r=1}^{\ell}(a_r X + b_r Y + c_r Z + d_r) = \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathcal{I}_X\cup\mathcal{I}_Y\cup\mathcal{I}_Z} \lambda_{\alpha\beta\gamma} X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$$

ومن جهة أخرى، لّما كان $\deg(\Omega(T) - T^n) < n$ استنتجنا أنّ

$$\Omega(X)\Omega(Y)\Omega(Z) = X^n Y^n Z^n + \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathcal{I}_X\cup\mathcal{I}_Y\cup\mathcal{I}_Z} \mu_{\alpha\beta\gamma} X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$$

وعليه نرى أنّ

$$P(X,Y,Z) = -\delta X^n Y^n Z^n + \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathcal{I}_X\cup\mathcal{I}_Y\cup\mathcal{I}_Z} \nu_{\alpha\beta\gamma} X^\alpha Y^\beta Z^\gamma \qquad (1)$$

وهنا تأتي التوطئة المفيدة التالية :

توطئة : في حالة n من $\mathbb{N}^*$، نعرّف الشكل الخطّي φ على $\mathbb{R}[T]$ بالصيغة

$$\varphi(Q) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k Q(k)$$

عندئذ يكون $\varphi(T^n) = (-1)^n n!$ و $\varphi(Q) = 0$ في حالة $\deg Q < n$.

الإثبات

في الحقيقة، ليكن $E_0 = 1$، وفي حالة $j > 0$ لنعرّف

$$E_j = \frac{T(T-1)\cdots(T-j+1)}{j!}$$

عندئذ نرى أنّ $E_j(k) = 0$ في حالة $0 \leq k < j$، و $E_j(k) = C_k^j$ في حالة $j \leq k$، إذن

$$\varphi(E_j) = \sum_{k=j}^{n} C_n^k C_k^j (-1)^k = C_n^j \sum_{k=j}^{n} C_{n-j}^{k-j} (-1)^k$$

$$= C_n^j (-1)^j \sum_{k=0}^{n-j} C_{n-j}^k (-1)^k = C_n^j (-1)^j (1-1)^{n-j}$$

ومنه

$$\varphi(E_j)=\begin{cases}(-1)^n & : \quad j=n\\ 0 & : \quad j<n\end{cases}$$

ولكن $(E_j)_{0\le j\le n}$ تكوّن أساساً لفضاء كثيرات الحدود التي درجاتها أصغر أو تساوي n، إذن في حالة $\deg Q<n$ توجد أعدادٌ $(\alpha_j)_{0\le j<n}$ بحيث يكون $Q=\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j E_j$، ومنه نستنتج أنّ $\varphi(Q)=0$. أمّا في حالة T^n فنلاحظ أنّ $\deg(T^n-n!E_n)<n$، إذن $\varphi(T^n)=n!\varphi(E_n)=(-1)^n n!$. وبذا يتمّ إثبات التوطئة.

لنعرّف إذن على فضاء كثيرات الحدود بثلاثة متحوّلات $\mathbb{R}[X,Y,Z]$ الشكلَ الخطّي Φ بالصيغة :

$$\Phi(Q(X,Y,Z))=\sum_{0\le i,j,k\le n} C_n^iC_n^jC_n^k(-1)^{i+j+k}Q(i,j,k) \qquad (2)$$

عندئذ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\Phi\left(X^\alpha Y^\beta Z^\gamma\right)&=\left(\sum_{i=0}^{n}C_n^i(-1)^i i^\alpha\right)\left(\sum_{j=0}^{n}C_n^j(-1)^j j^\beta\right)\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k k^\gamma\right)\\&=\varphi(T^\alpha)\varphi\left(T^\beta\right)\varphi(T^\gamma)\end{aligned}$$

وبوجه خاصٍّ، في حالة $(\alpha,\beta,\gamma)\in I_X\cup I_Y\cup I_Z$ يكون لدينا $\Phi\left(X^\alpha Y^\beta Z^\gamma\right)=0$ ويكون لدينا أيضاً $\Phi(X^nY^nZ^n)=(-1)^n(n!)^3$. إذن نستنتج من العلاقة (1) أنّ

$$\Phi(P(X,Y,Z))=\delta\Phi(X^nY^nZ^n)=d_1d_2\cdots d_\ell\neq 0$$

ومن جهة أخرى، نستنتج من (2) ومن كون $P(i,j,k)=0$ في حالة كون i و j و k عناصر من المجموعة $\{0,1,\ldots,n\}$ أنّ $\Phi(P(X,Y,Z))=0$. وهذا تناقضٌ واضحٌ.

نستنتج إذن أنّ $\ell=3n$. ويتم بذلك إثبات المطلوب. ■

أولمبياد الرياضيّات التاسع والأربعون

① **نتأمّل مثلّثاً حاد الزوايا ABC ، ولتكن H نقطة تلاقي ارتفاعاته. تقطع الدائرة المارة بالنقطة H ومركزها منتصف $[BC]$ هذا الضلع في النقطتين A_1 و A_2 . وبأسلوب مماثل تقطع الدائرة المارة بالنقطة H ومركزها منتصف $[CA]$ هذا الضلع في النقطتين B_1 و B_2 ، وأخيراً تقطع الدائرة المارة بالنقطة H ومركزها منتصف $[AB]$ هذا الضلع في النقطتين C_1 و C_2 . أثبت أنّ النقاط A_1 و A_2 و B_1 و B_2 و C_1 و C_2 تقع على دائرة واحدة.**

ليكن O مركز الدائرة المارّة $\mathfrak{C}$ برؤوس المثلّث ABC ، ولنرمز بالرمز R إلى نصف قطرها.

- لتكن H' النقطة التي تُحقّق $\overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH'} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right)\\ &= \left\|\overrightarrow{OC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{OB}\right\|^2 = R^2 - R^2 = 0\end{aligned}$$

ونجد بأسلوب مماثل أنّ $\overrightarrow{BH'} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ و $\overrightarrow{CH'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. إذن H' هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث ABC ، أي $H' = H$. إذن

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

- لتكن A' منتصف الضلع $[BC]$ ، عندئذ

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}\right)$$

ومن ثَمّ

$$\overrightarrow{A'H} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA}\right)$$

- بالاستفادة من مبرهنة فيثاغورث، في المثلّثين القائمين $A_1A'O$ و $A_2A'O$ نجد

$$(OA_1)^2 = (OA_2)^2 = OA'^2 + A'H^2 = \frac{OH^2 + OA^2}{2} = \frac{OH^2 + R^2}{2}$$

وبالمماثلة نجد أنّ

$$OC_1 = OC_2 = \sqrt{\frac{OH^2 + R^2}{2}} \quad \text{و} \quad OB_1 = OB_2 = \sqrt{\frac{OH^2 + R^2}{2}}$$

فالنقاط A_1 و A_2 و B_1 و B_2 و C_1 و C_2 تقع على الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها يساوي $\sqrt{\frac{1}{2}\left(OH^2 + R^2\right)}$ ، وهي النتيجة المرجوّة. ■

② (a) **أثبت أنّ**

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

وذلك أيّاً كانت الأعداد حقيقيّة x و y و z التي كلٌّ منها مختلف عن 1 وتُحقّق $xyz=1$.

(b) **أثبت أنّ المساواة في المتراجحة السابقة تقع عند عددٍ لا نهائي من الثلاثيّات (x,y,z) المكوّنة من أعداد عاديّة كلٌّ منها مختلف عن 1 وتُحقّق $xyz=1$.**

ليكن x و y عددين حقيقيّين مختلفين عن 1 وجداؤهما مختلف عن 1. ثُمّ لنضع $p=xy$ و $s=x+y$. عندئذ

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{(1-x)^2}+\frac{y^2}{(1-y)^2}&=\frac{x^2\left(y^2-2y+1\right)+y^2\left(x^2-2x+1\right)}{(xy-x-y+1)^2}\\&=\frac{2p^2-2ps+x^2+y^2}{(p-s+1)^2}\\&=\frac{2p^2-2ps+s^2-2p}{(p-s+1)^2}\\&=\frac{(p-s)^2+p^2-2p}{(p-s+1)^2}\\&=\frac{(p-s+1)^2-2(p-s+1)+1+p^2-2p}{(p-s+1)^2}\\&=1+\frac{2}{s-p+1}+\left(\frac{p-1}{s-p-1}\right)^2\\&=1-\frac{1}{(p-1)^2}+\left(\frac{p-1}{s-p-1}+\frac{1}{p-1}\right)^2\end{aligned}$$

فإذا عرّفنا $z=1/p$ كان $\dfrac{z^2}{(1-z)^2}=\dfrac{1}{(p-1)^2}$، وعليه

$$\frac{x^2}{(1-x)^2}+\frac{y^2}{(1-y)^2}+\frac{z^2}{(1-z)^2}=1+\left(\frac{p-1}{s-p-1}+\frac{1}{p-1}\right)^2\geq 1$$

وهذا يبرهن صحّة (a).

(b) تتحقّق المساواة إذا وفقط إذا حقّق العددان x و y المختلفان عن الواحد، وجداء ضربهما مختلف عن الواحد المساواة التالية :

$$\frac{p-1}{s-p-1}+\frac{1}{p-1}=0$$

حيث $p=xy$ و $s=x+y$، وهذا يُكافئ أنّ $s=3p-p^2$. أي إذا كان x و y هما جذرا معادلة من الدرجة الثانية في المتحوّل T من الصيغة :

$$T^2-\left(3p-p^2\right)T+p=0$$

مع $p\neq 1$. ولكنّ مميِّز هذه المعادلة هو

$$\Delta=\left(3p-p^2\right)^2-4p=p(p-4)(p-1)^2$$

فالشرط اللازم والكافي لنجد x و y في مجموعة الأعداد العاديّة هو أن يكون p عدداً عادياً مختلفاً عن الواحد وأن يكون $p(p-4)$ مربّعَ عددٍ عادي.

إذن تؤول المسألة إلى إيجاد الحلول (p,t) من $\mathbb{Q}^2$ التي تُحقّق $p(p-4)=t^2$. لمّا كان $(4,0)$ حلاً تافهاً لهذه المعادلة بحثنا عن الحلول بصيغة $p=4+\lambda t$ مع $\lambda\in\mathbb{Q}$. نجد بالتعويض أنّ

$$p=\frac{4}{1-\lambda^2} \quad \text{و} \quad t=\frac{4\lambda}{1-\lambda^2}$$

حيث λ عددٌ عادي مختلفٌ عن 1 و -1، وفي هذه الحالة يكون x و y جذري المعادلة

$$T^2+\frac{4\left(1+3\lambda^2\right)}{\left(1-\lambda^2\right)^2}T+\frac{4}{1-\lambda^2}=0$$

ومنه نجد الحلول

$$\{x,y,z\}=\left\{\frac{-2(1-\lambda)}{(1+\lambda)^2},\frac{-2(1+\lambda)}{(1-\lambda)^2},\frac{1-\lambda^2}{4}\right\}$$

وبوجه خاصّ، في حالة $\lambda=2n+1$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$، نجد الحلول

$$\{x_n,y_n,z_n\}=\left\{\frac{n}{(n+1)^2},-\frac{n+1}{n^2},-n(n+1)\right\}$$

وهي تعطي مجموعة لا نهائيّة من ثلاثيّات الأعداد العاديّة، التي تُحقّق المساواة في المتراجحة التي أثبتناها في (a)، بذا ينتهي إثبات (b). ■

③ **أثبت وجود عددٍ لا نهائي من الأعداد الطبيعيّة n التي يوجد في حالة كلٍّ منها قاسمٌ أوّلي للعدد n^2+1 يكون أكبر تماماً من $2n+\sqrt{2n}$.**

لتكن $\mathcal{N}$ مجموعة الأعداد الأوليّة p التي تُحقّق $p \equiv 1 \bmod 4$ و $p > 13$. ثُمّ لنتأمّل في حالة عدد p من $\mathcal{N}$ المجموعة

$$\mathcal{S}_p = \{n \geq 0 : p \mid (n^2+1)\}$$

■ لنثبت أوّلاً أنّ $\mathcal{S}_p \neq \varnothing$. استناداً إلى مبرهنة Wilson نعلم أنّ

$$(p-1)! \equiv -1 \bmod p$$

ومن ثَمّ، لأنّ $p = 4m+1$، نستنتج أنّ

$$\left(\prod_{k=1}^{2m} k\right)^2 \equiv \left(\prod_{k=1}^{2m} k\right)\left(\prod_{k=1}^{2m}(p-k)\right) \equiv \prod_{k=1}^{4m} k \equiv (p-1)! = -1 \bmod p$$

إذن $\left(\frac{p-1}{2}\right)! \in \mathcal{S}_p$.

■ نعرّف إذن $n_p = \min(\mathcal{S}_p)$ وهو عددٌ موجبٌ تماماً. نلاحظ ما يلي :

□ إذا كان $n_p \geq p$ وصلنا إلى تناقض لأنّ $n_p - p \in \mathcal{S}_p$، إذن $n_p < p$.

□ إذا كان $n_p \geq \dfrac{p}{2}$ وصلنا إلى تناقض لأنّ $p - n_p \in \mathcal{S}_p$، إذن $n_p < \dfrac{p}{2}$.

□ لنضع $k_p = p - 2n_p > 0$. من الواضح أنّ

$$k_p^2 + 4 \equiv 4(n_p^2+1) \equiv 0 \bmod p$$

إذن $p \mid (k_p^2+4)$. ولكننا افترضنا أنّ $p > 13$ إذن $k_p^2 + 4 \geq 17$ وهذا يقتضي أنّ $k_p^2 \geq 13$ أي $k_p \geq 4$. ولكنّ k_p عددٌ فردي إذن $k_p > 4$. وعليه

$$k_p^2 + k_p > k_p^2 + 4 \geq p$$

ومنه $k_p^2 > 2n_p$ أو $p > 2n_p + \sqrt{2n_p}$.

■ وأخيراً نلاحظ أنّ التطبيق $p \mapsto n_p$ متباينٌ، لأنّه إذا كان $n_p = n_q = n$ مع $p \neq q$، استنتجنا من كون $\gcd(p,q) = 1$ و $p \mid (n^2+1)$ و $q \mid (n^2+1)$ أنّ pq يقسم n^2+1، وهذا يقتضي أنّ $(2n+\sqrt{2n})^2 < pq \leq n^2+1$ وهو تناقض واضح. إذن المجموعة $\{n_p : p \in \mathcal{N}\}$ مجموعة غير منتهية لأنّ المجموعة $\mathcal{N}$ نفسها غير منتهية. وبذا يتم الإثبات. ■

④ أوجد جميع التوابع $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ التي تُحقّق

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

وذلك أيّاً كانت الأعداد الحقيقيّة الموجبة تماماً w و x و y و z التي تحقّق $wx = yz$.

لنتأمّل تابعاً f يُحقّق المعادلة التابعيّة المعطاة.

- بوضع $w = x = y = z = 1$ نستنتج أنّ $f(1) = 1$.
- بوضع $w = z = 1$ و $x = y$ نستنتج أنّ

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x^2) = (f(x))^2 \qquad (1)$$

- نستنتج إذن أنّه في حالة $(w,x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$ مع $wx = yz$ لدينا

$$\frac{f(w) + f(x)}{f(y) + f(z)} = \frac{w + x}{y + z} \qquad (2)$$

- في حالة x من $\mathbb{R}_+^*$ نعوّض في (2) ما يلي $w = x$ و $z = 1$ و $y = x^2$ فنجد

$$\frac{2f(x)}{1 + f^2(x)} = \frac{2x}{1 + x^2}$$

وهذا يُكافئ $(xf(x) - 1)(f(x) - x) = 0$ إذن

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) \in \{x, 1/x\} \qquad (3)$$

لنتأمّل المجموعتين :

$$A = \{x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\} : f(x) = x\} \quad \text{و} \quad B = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\} : f(x) = \frac{1}{x}\right\}$$

- من الواضح أنّ $A \cup B = \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$، وذلك استناداً إلى (3).
- لنفترض أنّ $A \neq \varnothing$ و $B \neq \varnothing$ عندئذ نجد $a \in A$ و $b \in B$. ونستنتج من (2) مطبّقة على $x = b$ و $w = a$ و $y = z = \sqrt{ab}$ أنّ

$$f(\sqrt{ab}) = \sqrt{ab} + \frac{1 - b^2}{a + b}\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{a^2 - 1}{a + b}\sqrt{\frac{b}{a}}$$

والخاصّة (3) مطبّقة على $\sqrt{ab}$ تقتضي أن يكون $a = 1$ أو $b = 1$، وهذا خُلفٌ واضحٌ. إذن إمّا أن يكون $B = \varnothing$ ومن ثَمّ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = x$، أو أن يكون $A = \varnothing$ ومن ثَمّ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = 1/x$.

وبالعكس، يُحقّق التابعان $x \mapsto x$ و $x \mapsto 1/x$ العلاقة المعطاة، فهما الحلاّن المنشودان. ■

⑤ **ليكن n و k عددين صحيحين موجبين تماماً يُحقّقان $n \geq k$ و $k-n$ عددٌ زوجي. نتأمّل مجموعة مكوّنة من $2n$ من المصابيح المرقمة 1، 2، …، $2n$، والتي يمكن لأيّ منها أن يكون مُضاءً أو مطفأً. في البدء، جميع المصابيح مُطفأة. ونتأمّل متتاليات من الخطوات، عند كلِّ خطوة يجري قَلْبُ وضع أحد المصابيح، (إذا كان مُطفأً أضاءَه وإذا كان مُضاءً أطفأه.)**

ليكن N عدد هذه المتتاليات المكوّنة من k خطوة، التي تؤدي إلى الحالة التي تكون فيها المصابيح ذات الأرقام من 1 إلى n مُضاءة، والمصابيح ذات الأرقام من $n+1$ إلى $2n$ مُطفأة.

وليكن M عدد هذه المتتاليات المكوّنة من k خطوة، التي تؤدي إلى الحالة التي تكون فيها المصابيح ذات الأرقام من 1 إلى n مُضاءة، والمصابيح ذات الأرقام من $n+1$ إلى $2n$ مُطفأة، وحيث لا يُضاء أيٌّ من المصابيح ذات الأرقام من $n+1$ إلى $2n$ في خطوة من هذه الخطوات. أوجد قيمة النسبة $\frac{N}{M}$.

لنبدأ بتثبيت بعض الرموز. يمكن تمثيل المتتاليات المكوّنة من k خطوة بعناصر المجموعة $\mathcal{S} = (\mathbb{N}_{2n})^k$، فإذا قلبنا في الخطوة p (حيث $1 \leq p \leq k$) وضع المصباح ذي الرقم j_p عبرنا عن هذه المتتالية من الخطوات بالرمز $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ من $\mathcal{S}$.

أمّا مجموعة المتتاليات من $\mathcal{S}$ التي تؤدي إلى الحالة التي تكون فيها المصابيح ذات الأرقام من 1 إلى n مُضاءة، والمصابيح ذات الأرقام من $n+1$ إلى $2n$ مُطفأة، فنرمز إليها بالرمز $\mathcal{S}_N$. وعليه تنتمي المتتالية $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ من $\mathcal{S}$ إلى $\mathcal{S}_N$ إذا وفقط إذا كان عدد عناصر المجموعة $\{p : j_p = i\}$ فردياً في حالة $1 \leq i \leq n$، وزوجياً في حالة $n < i \leq 2n$.

وكذلك نرمز إلى مجموعة المتتاليات من $\mathcal{S}$ التي تؤدي إلى الحالة التي تكون فيها المصابيح ذات الأرقام من 1 إلى n مُضاءة، والمصابيح ذات الأرقام من $n+1$ إلى $2n$ مُطفأة، وحيث لا يُضاء أيٌّ من المصابيح ذات الأرقام من $n+1$ إلى $2n$ في خطوة من هذه الخطوات بالرمز $\mathcal{S}_M$. وعليه تنتمي المتتالية $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ من $\mathcal{S}$ إلى $\mathcal{S}_M$ إذا وفقط إذا كان عدد عناصر المجموعة $\{p : j_p = i\}$ فردياً في حالة $1 \leq i \leq n$، وكانت المجموعات $\{p : j_p = i\}$ خالية في حالة $n < i \leq 2n$.

وهكذا نرى أنّ $N = \operatorname{card}(\mathcal{S}_N)$ و $M = \operatorname{card}(\mathcal{S}_M)$.

الطريقة الأولى. لنتأمّل التطبيق

$$\sigma : \mathbb{N}_{2n} \to \mathbb{N}_n : \sigma(j) = \begin{cases} j & : \quad 1 \le j \le n \\ j-n & : \quad n < j \le 2n \end{cases}$$

انطلاقاً من متتالية $s = (j_1, \ldots, j_k)$ متتالية من $\mathcal{S}_N$ نعرّف متتالية $\varphi(s)$ من $\mathcal{S}_M$ بالصيغة $\varphi(s) = (\sigma(j_1), \ldots, \sigma(j_k))$، إذْ عوضاً عن قَلْب وضع مصباح دليله j أكبر تماماً من n نقلب وضع المصباح الذي دليله $j-n$ ، ولمّا كان عدد المرّات التي يجري فيها قلب وضع هذا المصباح زوجيّاً فإنّ هذا لن يؤثّر على الوضع النهائي للمصباح ذي الدليل $j-n$. ونلاحظ أنّه في حالة متتالية s من $\mathcal{S}_M$ يكون $\varphi(s) = s$ ، فالتطبيق $\varphi : \mathcal{S}_N \to \mathcal{S}_M$ تطبيقٌ غامرٌ، وعليه تكوّن المجموعات $\left(\varphi^{-1}(s)\right)_{s\in\mathcal{S}_M}$ تجزئة للمجموعة $\mathcal{S}_N$ ، إذن

$$\operatorname{card}(\mathcal{S}_N) = \sum_{s\in\mathcal{S}_M} \operatorname{card}\left(\varphi^{-1}(s)\right) \tag{1}$$

لنثبّت إذن عنصراً $s = (i_1, \ldots, i_k)$ من $\mathcal{S}_M$. ثُمّ لنعرّف في حالة $1 \le \ell \le n$ المجموعة

$$A_\ell = \left\{p \in \mathbb{N}_k : i_p = \ell\right\}$$

أي إنّ A_ℓ هي مجموعة الخطوات التي يجري فيها قلب وضع المصباح رقم ℓ . نستنتج من كون s عنصراً من $\mathcal{S}_M$ أنّ عدد عناصر كلٍّ واحدة من هذه المجموعات عددٌ فرديٌّ موجبٌ تماماً، كما نستنتج أيضاً أنّ هذه المجموعات تكوّن تجزئة للمجموعة $\mathbb{N}_k$. إذن

$$k = \sum_{\ell=1}^{n} \operatorname{card}(A_\ell)$$

لنرمز في حالة مجموعة منتهية A بالرمز $\mathcal{P}^{\text{even}}(A)$ إلى مجموعة أجزاء A التي عدد عناصر كلٍّ منها زوجي. أي إنّ

$$B \in \mathcal{P}^{\text{even}}(A) \Leftrightarrow (B \subset A) \wedge (2 \mid \operatorname{card}(B))$$

في حالة عنصر $\mathcal{B} = (B_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}_n}$ من $\prod_{\ell=1}^{n} \mathcal{P}^{\text{even}}(A_\ell)$ نعرّف متتالية الخطوات

$$s^{\mathcal{B}} = \left(j_1^{\mathcal{B}}, j_2^{\mathcal{B}}, \ldots, j_k^{\mathcal{B}}\right)$$

بوضع $j_p^{\mathcal{B}} = i_p + n$ في حالة $p \in \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}_n} B_\ell$ ، و $j_p^{\mathcal{B}} = i_p$ في حالة $p \notin \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}_n} B_\ell$.

أي، من بين مجموعة الخطوات A_ℓ التي يجري فيها قلب المصباح ℓ ، نختار مجموعة جزئيّة B_ℓ عدد عناصرها زوجي، وفي خطوات المجموعة B_ℓ نقلب وضع المصباح $\ell + n$ بدلاً من قلْب وضع المصباح ℓ .

من الواضح أنّ $s^{\mathcal{B}} \in \varphi^{-1}(s)$ وأنّ التطبيق $\mathcal{B} \mapsto s^{\mathcal{B}}$ يعرّف تقابلاً منطلقه المجموعة $\prod_{\ell=1}^{n} \mathcal{P}^{\text{even}}(A_\ell)$ ومستقرّه $\varphi^{-1}(s)$، أمّا تقابله العكسي فهو التطبيق

$$s' = (j_1, \ldots, j_k) \mapsto \left(B_\ell^{s'}\right)_{\ell \in \mathbb{N}_n}$$

المعرّف بالصيغة $B_\ell^{s'} = A_\ell \bigcap \{p \in \mathbb{N}_k : j_p = \ell + n\}$. نستنتج إذن أنّ

$$\operatorname{card}\left(\varphi^{-1}(s)\right) = \operatorname{card}\left(\prod_{\ell=1}^{n} \mathcal{P}^{\text{even}}(A_\ell)\right) = \prod_{\ell=1}^{n} \operatorname{card}(\mathcal{P}^{\text{even}}(A_\ell))$$

ولكن، في حالة مجموعة عدد عناصرها فردي A يعرّف التطبيق $B \mapsto A \backslash B$ تقابلاً بين مجموعة أجزاء A التي عدد عناصرها زوجي، وتلك التي عدد عناصرها فردي. إذن يكون لدينا

$$\operatorname{card}(\mathcal{P}^{\text{even}}(A)) = \frac{1}{2}\operatorname{card}(\mathcal{P}(A)) = \frac{1}{2} \times 2^{\operatorname{card}(A)}$$

وعليه نرى أنّ

$$\operatorname{card}\left(\varphi^{-1}(s)\right) = \frac{1}{2^n}\prod_{\ell=1}^{n} 2^{\operatorname{card}(A_\ell)} = \frac{1}{2^n} 2^{\sum_{\ell=1}^{n}\operatorname{card}(A_\ell)} = 2^{k-n}$$

وبالعودة إلى (1) نستنتج أنّ

$$\operatorname{card}(\mathcal{S}_N) = \sum_{s \in \mathcal{S}_M} \operatorname{card}\left(\varphi^{-1}(s)\right) = 2^{k-n}\operatorname{card}(\mathcal{S}_M)$$

أي إنّ $N/M = 2^{k-n}$ وهي النسبة المطلوبة.

الطريقة الثانية. هنا نتأمّل الحلقة $\mathcal{A} = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_{2n}]$، حلقة كثيرات الحدود بالمتحولات $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$، ونعرّف على $\mathcal{A}$ الشكلين الخطيّين ν و μ بالصيغتين التاليتين :

$$\nu\left(G(X_1, \ldots, X_{2n})\right) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in^{2n}} \varepsilon_1\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n G(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \ldots, \varepsilon_{2n})$$

$$\mu\left(G(X_1, \ldots, X_{2n})\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} \varepsilon_1\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n G(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 0, \ldots, 0)$$

ولننظر في عمل هذين الشكلين الخطيين على عناصر الأساس. فنجد مباشرة أنّ

$$\nu(X_1^{\alpha_1} \cdots X_{2n}^{\alpha_{2n}}) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1-(-1)^{\alpha_j}}{2} \prod_{j=n+1}^{2n} \frac{1+(-1)^{\alpha_j}}{2}$$

وعليه فإنّ $\nu(X_1^{\alpha_1} \cdots X_{2n}^{\alpha_{2n}}) = 1$ إذا كانت الأعداد $(\alpha_j)_{1 \le j \le n}$ فرديّة، وكانت الأعداد $(\alpha_j)_{n < j \le 2n}$ زوجيّة، و $\nu(X_1^{\alpha_1} \cdots X_{2n}^{\alpha_{2n}}) = 0$ في بقيّة الحالات.

ونجد بأسلوب مماثل أنّ $\mu\left(X_1^{\alpha_1}\cdots X_{2n}^{\alpha_{2n}}\right)=1$ إذا كانت الأعداد $\left(\alpha_j\right)_{1\le j\le n}$ فرديّة، وكانت الأعداد $\left(\alpha_j\right)_{n<j\le 2n}$ معدومة، و $\mu\left(X_1^{\alpha_1}\cdots X_{2n}^{\alpha_{2n}}\right)=0$ في بقيّة الحالات.

نستنتج من ذلك أنّه في حالة متتالية خطوات $s=(j_1,j_2,\ldots,j_k)$ من $\mathcal{S}$ يكون لدينا

$$\nu\left(X_{j_1}X_{j_2}\cdots X_{j_k}\right)=\begin{cases}1 & : \quad s\in\mathcal{S}_N\\ 0 & : \quad s\notin\mathcal{S}_N\end{cases}$$

و

$$\mu\left(X_{j_1}X_{j_2}\cdots X_{j_k}\right)=\begin{cases}1 & : \quad s\in\mathcal{S}_M\\ 0 & : \quad s\notin\mathcal{S}_M\end{cases}$$

وعليه، إذا عرّفنا

$$F\left(X_1,\ldots,X_{2n}\right)=\sum_{(j_1,\ldots,j_k)\in\mathcal{S}}X_{j_1}X_{j_2}\cdots X_{j_k}$$

كان لدينا

$$\nu\left(F\left(X_1,\ldots,X_{2n}\right)\right)=\operatorname{card}\left(\mathcal{S}_N\right)=N$$
$$\mu\left(F\left(X_1,\ldots,X_{2n}\right)\right)=\operatorname{card}\left(\mathcal{S}_M\right)=M$$

ولكن من الواضح أنّ

$$F\left(X_1,\ldots,X_{2n}\right)=\sum_{j_1=1}^{2n}\sum_{j_2=1}^{2n}\cdots\sum_{j_k=1}^{2n}X_{j_1}X_{j_2}\cdots X_{j_k}=\left(\sum_{j=1}^{2n}X_j\right)^k$$

إذن

$$N=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n})\in\{-1,1\}^{2n}}\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_nF\left(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\varepsilon_{n+1},\ldots,\varepsilon_{2n}\right)$$
$$M=\frac{1}{2^{n}}\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n})\in\{-1,1\}^{n}}\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_nF\left(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,0,\ldots,0\right)$$

لنحسب إذن كلاً من N و M.

- في حالة N نجد

$$\begin{aligned}N&=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n})\in\{-1,1\}^{2n}}\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_nF\left(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\varepsilon_{n+1},\ldots,\varepsilon_{2n}\right)\\&=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n}C_n^p\left(-1\right)^pC_n^q\left(n-2p+n-2q\right)^k\end{aligned}$$

حيث وضعنا

$$p = \operatorname{card}(\{1 \le i \le n : \varepsilon_i = -1\})$$

و

$$q = \operatorname{card}(\{n+1 \le i \le 2n : \varepsilon_i = -1\})$$

إذن

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2^{2n-k}} \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} C_n^p (-1)^p C_n^q (n-p-q)^k \\ &= \frac{1}{2^{2n-k}} \sum_{r=0}^{2n} (n-r)^k \sum_{\substack{p+q=r,\\ 0\le p,q\le n}} (-1)^p C_n^p C_n^q \end{aligned}$$

ولكن $\sum_{p+q=r} (-1)^p C_n^p C_n^q$ يساوي أمثال X^r في كثير الحدود

$$(1-X)^n (1+X)^n = \left(1-X^2\right)^n$$

إذن

$$N = \frac{1}{2^{2n-k}} \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell C_n^\ell (n-2\ell)^k$$

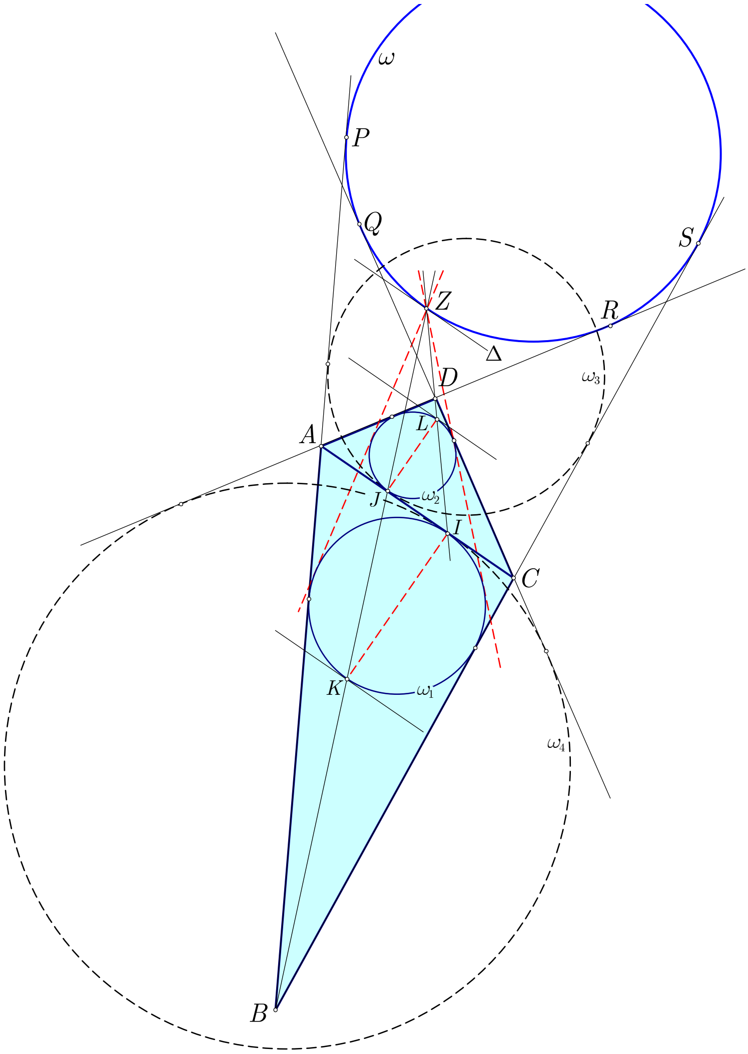
□ في حالة M نجد

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n})\in\{-1,1\}^n} \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n F(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,0,\ldots,0) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=0}^{n} C_n^\ell (-1)^\ell (n-2\ell)^k \end{aligned}$$

وعليه نرى أنّ $\frac{N}{M} = 2^{k-n}$، وهي النتيجة المرجوّة. ■

⑥ ليكن $ABCD$ مضلّعاً رباعيّاً محدّباً فيه $BA \ne BC$. ولتكن ω_1 الدائرة الماسّة داخلاً لأضلاع المثلّث ABC، وكذلك لتكن ω_2 الدائرة الماسّة داخلاً لأضلاع المثلّث ADC. نفترض وجود دائرة ω تمسّ نصف المستقيم $[BA)$ بعد النقطة A، وتمسّ نصف المستقيم $[BC)$ بعد النقطة C، ونفترض أيضاً أنها تمس المستقيمين (AD) و (CD). أثبت أن المماسين المشتركين الخارجيين للدائرتين ω_1 و ω_2 يتقاطعان في نقطة من الدائرة ω.

لنبدأ برسم الشكل الموافق لهذه المسألة.



1. لنبرهن أوّلاً أنّ

$$BA + AD = BC + CD \qquad (1)$$

لتكن P و Q و R و S نقاط تماس الدائرة ω مع المستقيمات (BA) و (CD) و (AD) و (BC) بالترتيب. عندئذ يمكننا أن نكتب

$$BP = BA + AP = BA + AR = BA + AD + DR$$

وعليه $BA + AD = BP - DR$. وبالمماثلة نجد أنّ $BC + CD = BS - DQ$، وأخيراً نصل إلى (1) لأنّ $BS = BP$ و $DQ = DR$.

2. لتكن I نقطة تماس الدائرة ω_1 مع (AC)، ولتكن J نقطة تماس الدائرة ω_2 مع (AC). سنبرهن الآن أنّ $AI = CJ$.

لنرمز بالرمز p_1 إلى نصف محيط المثلّث ABC، وبالرمز p_2 إلى نصف محيط المثلّث ADC. عندئذ نرى أنّ

$$AI = p_1 - BC \quad \text{و} \quad CI = p_1 - BA$$

إذن $AI - CI = BA - BC$. وكذلك نجد

$$AJ = p_2 - CD \quad \text{و} \quad CJ = p_2 - AD$$

إذن $CJ - AJ = CD - AD$. فإذا استفدنا من (1) استنتجنا أنّ

$$AI - CI = CJ - AJ$$

فإذا جمعنا AC إلى طرفي المساواة السابقة استنتجنا أنّ $2AI = 2CJ$ وأخيراً $AI = CJ$.

3. لتكن ω_3 الدائرة الماسّة خارجاً لأضلاع المثلّث ABC من جهة الضلع $[AC]$. عندئذ تمسّ هذه الدائرة الضلع $[AC]$ في J، ذلك لأنّ $CJ = AI = p_1 - BC$.

وكذلك نرى أنّ الدائرة ω_4 الماسّة خارجاً لأضلاع المثلّث ADC من جهة الضلع $[AC]$، تمسّ الضلع $[AC]$ في I، ذلك لأنّ $AI = CJ = p_2 - AD$.

4. لتكن K النقطة المقابلة قطريّاً للنقطة I في ω_1، ولتكن L النقطة المقابلة قطريّاً للنقطة J في ω_2، وأخيراً لنرسم المماس Δ للدائرة ω الموازي للمستقيم (AC) والقريب من D، فيقطع هذا المماس الدائرة ω في النقطة Z. من الواضح أنّ المماس للدائرة ω_1 في K يوازي (AC) وكذلك يفعل المماس للدائرة ω_2 في L.

- التحاكي المباشر الذي مركزه B وينقل ω_1 إلى ω_3 ينقل المماس في K للدائرة ω_1 إلى (AC) الذي يمس ω_3 في J. إذن تقع النقاط B و K و J على استقامة واحدة.

- وكذلك فإنّ التحاكي المباشر الذي مركزه B وينقل ω_1 إلى ω ينقل المماس في K للدائرة ω_1 إلى Δ الذي يمس ω في Z. إذن تقع النقاط B و K و Z على استقامة واحدة.

- التحاكي المباشر الذي مركزه D وينقل ω_2 إلى ω_4 ينقل المماس في L للدائرة ω_2 إلى (AC) الذي يمس ω_4 في I. إذن تقع النقاط D و L و I على استقامة واحدة.

□ وكذلك فإنّ التحاكي غير المباشر الذي مركزه D وينقل ω_2 إلى ω ينقل المماس L للدائرة ω_2 إلى Δ الذي يمس ω في Z. إذن تقع النقاط D و L و Z على استقامة واحدة.
بالنتيجة نرى أنّ النقطة Z من ω هي نقطة تقاطع المستقيمين (BJ) و (DI).
(لاحظ أنّ هذين المستقيمين غير منطبقين، لأن انطباقهما يقتضي أنّ $AI = CI$ ومن ثَمّ أنّ $AB = BC$ وهذا خُلفٌ واضح.)
لنتأمّل الآن التحاكي المباشر $\mathcal{H}$ الذي مركزه Z ويُحقّق $\mathcal{H}(L) = I$. لمّا كان المستقيمان (LJ) و (IK) عموديين على (AC) استنتجنا أنّهما متوازيان، إذن $\mathcal{H}(J) \in (IK)$، كما إنّ $\mathcal{H}(J) \in (ZJ)$ إذن $\mathcal{H}(J)$ هي نقطة تقاطع المستقيمين (IK) و (ZJ) أي K.

وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $\mathcal{H}([LJ]) = [IK]$، ومن ثَمّ $\mathcal{H}(\omega_2) = \omega_1$ لأنّ $[LJ]$ قطرٌ في ω_2 و $[IK]$ قطرٌ في ω_1. ولكنّ مركز التحاكي المباشر الذي ينقل ω_2 إلى ω_1 هو بالتحديد نقطة تقاطع المماسين الخارجيين المشتركين لهاتين الدائرتين، إذن هذه النقطة هي Z وهي بحسب إنشائها تقع على الدائرة ω. وهذا يُكمل الإثبات. ■

① **ليكن** n **عدداً طبيعياً موجباً تماماً ولتكن** $a_1, a_2, \ldots, a_k$ **، حيث** $(k \geq 2)$ **، أعداداً صحيحة مختلفة من المجموعة** $\{1, 2, \ldots, n\}$ **بحيث يقسم العددُ** n **كلاً من الأعداد** $a_i(a_{i+1} - 1)$ **عندما تتحوّل** i **في المجموعة** $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ **. أثبت أنّ** n **لا يقسم** $a_k(a_1 - 1)$ **.**

لنبدأ أوّلاً بإثبات الخاصّة التالية :

$$\mathbb{P}_i : \quad a_1 \equiv a_1 a_i \bmod n$$

عندما تتحوّل i في المجموعة $\{2, \ldots, k\}$.

- في الحقيقة، الخاصّة $\mathbb{P}_2$ صحيحة لأنّ n يقسم $a_1(a_2 - 1)$ بحسب الفرضْ الذي سنرمز إليه بالرمز $\mathbb{H}$.
- لنبرهن أنّ صحّة $\mathbb{P}_i$ تقتضي صحّة $\mathbb{P}_{i+1}$. لدينا استناداً إلى الفرض

$$a_i \equiv a_i a_{i+1} \bmod n$$

ومن ثَمّ

$$a_1 \overset{\mathbb{P}_i}{\equiv} a_1 a_i \overset{\mathbb{H}}{\equiv} a_1(a_i a_{i+1}) \equiv (a_1 a_i) a_{i+1} \overset{\mathbb{P}_i}{\equiv} a_1 a_{i+1} \bmod n$$

وهذا يبرهن صحّة $\mathbb{P}_{i+1}$.

نستنتج بوجه خاصّ أنّ $\mathbb{P}_k$ صحيحة، أي إنّ

$$a_1 a_k \equiv a_1 \bmod n$$

فإذا افترضنا على سبيل الجدل أنّ n يقسم $a_k(a_1 - 1)$ ، كان $a_1 a_k \equiv a_k \bmod n$ ، وعندها يكون لدينا $a_1 \equiv a_k \bmod n$. ولمّا كان $a_1 \neq a_k$ استنتجنا أنّ

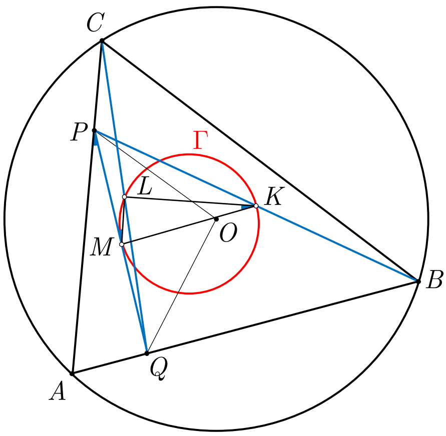
$$|a_1 - a_k| \geq n$$

وهذا يُناقض انتماء العددين a_1 و a_k إلى المجموعة $\{1, 2, \ldots, n\}$. ◼

② **ليكن ABC مثلّثاً والنقطة O مركز الدائرة المارّة برؤوسه. ولتكن P نقطة من داخل الضلع $[CA]$ و Q نقطة من داخل الضلع $[AB]$. ثُمّ لنتأمّل النقاط K و L و M، منتصفات القطع المستقيمة $[BP]$ و $[CQ]$ و $[PQ]$ بالترتيب. نفترض أنّ المستقيم (PQ) يمس الدائرة Γ المارّة بالنقاط K و L و M. أثبت أنّ $OP = OQ$.**

في المثلّث PQC يمر المستقيم (ML) بمنتصفي الضلعين $[PQ]$ و $[CQ]$ فهو يوازي (AC). وبالمثل، في المثلث PQB يمر المستقيم (MK) بمنتصفي الضلعين $[PQ]$ و $[BQ]$ فهو يوازي (AB). نستنتج إذن أنّ

$$\widehat{LMK} = \widehat{CAQ} \tag{1}$$



ومن جهة أخرى، $\widehat{APM} = \widehat{PML}$ بالتبادل الداخلي لأنّ $(AP) \parallel (ML)$. كما إنّ الزاوية $\widehat{PML}$ زاوية مماسيّة في الدائرة Γ تحصر القوس $\widehat{ML}$ الذي تُقابله الزاوية المحيطيّة $\widehat{MKL}$. إذن $\widehat{MKL} = \widehat{PML}$. نستنتج من ذلك أنّ

$$\widehat{MKL} = \widehat{APQ} \tag{2}$$

من (1) و (2) نستنتج تشابه المثلّثين APQ و MKL وبوجه خاص

$$\frac{MK}{AP} = \frac{ML}{AQ} \tag{3}$$

ولكن $QB = 2MK$ و $PC = 2ML$. إذن نستنتج من (3) أنّ

$$AQ \cdot BQ = AP \cdot CP \tag{4}$$

إنّ $AP \cdot CP$ هي قوّة النقطة P بالنسبة إلى الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC فهي إذن تساوي $R^2 - OP^2$ حيث R هو نصف قطر هذه الدائرة. وبالمثل نجد أنّ $AQ \cdot BQ$ يساوي $R^2 - OQ^2$ وهكذا تنتج المساواة $OP = OQ$ من (4).

③ نتأمّل متتالية متزايدة تماماً $(s_k)_{k\geq 1}$ من أعداد طبيعيّة موجبة تماماً. نفترض أنّ المتتاليتين الجزئيّتين $(s_{s_k})_{k\geq 1}$ و $(s_{s_k+1})_{k\geq 1}$ متتاليتان حسابيّتان. أثبت أنّ المتتالية $(s_k)_{k\geq 1}$ نفسها متتالية حسابيّة.

استناداً إلى الفرْض توجد أعداد طبيعيّة موجبة تماماً A و d_A و B و d_B بحيث يكون

$$\forall k \geq 1, \quad s_{s_k} = A + kd_A, \quad s_{s_k+1} = B + kd_B$$

لّما كانت $(s_k)_{k\geq 1}$ متزايدة تماماً كان

$$\forall k \geq 1, \quad s_k < s_k + 1 \leq s_{k+1}$$

ونتج من ذلك

$$\forall k \geq 1, \quad s_{s_k} < s_{s_k+1} \leq s_{s_{k+1}}$$

أو

$$\forall k \geq 1, \quad A + kd_A < B + kd_B \leq A + (k+1)d_A$$

وهذا يُكافئ

$$\forall k \geq 1, \quad \frac{A-B}{k} < d_B - d_A \leq \frac{A + d_A - B}{k}$$

مما يُبرهن على أنّ $d_A = d_B$ بجعل k تسعى إلى اللانهاية. لنضع $d = d_A = d_B$.

من ناحية أخرى لدينا في حالة $k \geq 1$ المتراجحة التالية :

$$d = s_{s_{k+1}} - s_{s_k} = \sum_{g=s_k+1}^{s_{k+1}} \underbrace{(s_j - s_{j-1})}_{1\leq \text{ـب}} \geq s_{k+1} - s_k \geq 0$$

فالمتتالية $(s_{k+1} - s_k)_{k\geq 1}$ متتالية محدودة، نعرّف إذن

$$M = \max_{n\geq 1}(s_{n+1} - s_n), \quad m = \min_{n\geq 1}(s_{n+1} - s_n)$$

وليكن p و q عددين طبيعيين يُحقّقان

$$M = s_{p+1} - s_p, \quad m = s_{q+1} - s_q$$

الآن

$$s_{s_{s_{p+1}}} - s_{s_{s_p}} = s_{s_{s_p+M}} - s_{s_{s_p}} = A + d(s_p + M) - A - ds_p = dM$$

وعليه

$$dM = s_{s_{s_{p+1}}} - s_{s_{s_p}} = \sum_{j=s_{s_p}+1}^{s_{s_{p+1}}} (s_j - s_{j-1}) \le M(s_{s_{p+1}} - s_{s_p}) = Md$$

إذن

$$\forall j \in \{s_{s_p+1}, s_{s_p+1} + 1, \ldots, s_{s_{p+1}}\}, \quad s_j - s_{j-1} = M$$

وبوجه خاص

$$M = s_{s_p+1} - s_{s_p} = B - A \qquad ❶$$

وبالمثل لدينا

$$s_{s_{s_{p+1}}} - s_{s_{s_p}} = s_{s_{s_q+m}} - s_{s_{s_q}} = B + d(s_q + m) - B - ds_q = dm$$

وعليه

$$dm = s_{s_{s_{q+1}}} - s_{s_{s_q}} = \sum_{j=s_{s_q}+1}^{s_{s_{q+1}}} (s_j - s_{j-1}) \ge m(s_{s_{q+1}} - s_{s_q}) = md$$

إذن

$$\forall j \in \{s_{s_q+1}, s_{s_q+1} + 1, \ldots, s_{s_{q+1}}\}, \quad s_j - s_{j-1} = m$$

وبوجه خاص

$$m = s_{s_q+1} - s_{s_q} = B - A \qquad ❷$$

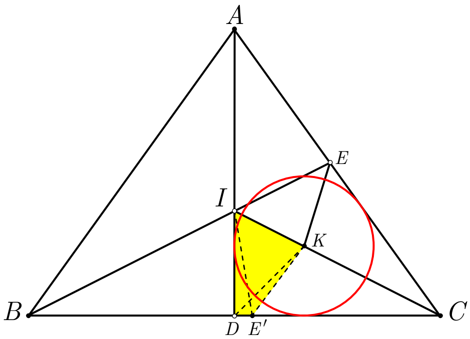
نستنتج من ❶ و ❷ أنّ $m = M$، أي إنّ

$$\forall n \ge 1, \quad s_{n+1} - s_n = m$$

فالمتتالية $(s_n)_{n\ge1}$ متتالية حسابيّة، ويكتمل الإثبات. ■

④ **ليكن ABC مثلّثاً فيه $AB = AC$. يلاقي منصّف الزاوية $\widehat{CAB}$ الضلع $[BC]$ في D ، وكذلك يلاقي منصّف الزاوية $\widehat{ABC}$ الضلع $[CA]$ في E . ليكن K مركز الدائرة الماسّة لأضلاع المثلّث ADC داخلاً. بافتراض أنّ $\widehat{BEK} = 45°$ أوجد جميع القيم الممكنة لقياس الزاوية $\widehat{CAB}$.**

ليكن I مركز الدائرة الماسّة لأضلاع المثلّث ABC داخلاً. ولنتأمّل النقطة E' من $[DC]$ نظيرة النقطة E بالنسبة إلى المستقيم (IC) مُنصّف الزاوية $\widehat{ACB}$. هناك حالتان :



■ حالة $E' = D$. هذا يقتضي أنّ $\widehat{IEC} = \widehat{IDC} = 90°$ ، والمنصّف (BE) للزاوية $\widehat{ABC}$ هو ارتفاع أيضاً، ومن ثَمّ $BA = BC$ ، فالمثلّث $\widehat{ABC}$ متساوي الأضلاع، وعلى الخصوص $\widehat{CAB} = 60°$.

■ حالة $E' \neq D$. هنا لدينا $\widehat{IDK} = \widehat{IE'K} = \widehat{IEK} = 45°$ ، فالرباعي $IDE'K$ رباعي دائري، وعليه باستعمال التناظر يمكن أن نكتب

$$\widehat{KIE} = \widehat{KIE'} = \widehat{KDE'} = 45°$$

ومنه، في المثلّث BIC ، لدينا

$$45° = \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = \frac{1}{2}(180° - \widehat{CAB})$$

أي $\widehat{CAB} = 90°$.

■ ونتيقّن بسهولة أنّه في حالة $\widehat{CAB} = 90°$ أو $\widehat{CAB} = 60°$ لدينا $\widehat{BEK} = 45°$ فهما إذن القيمتان الممكنتان للزاوية $\widehat{CAB}$.

⑤ **أوجد جميع التوابع f المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية الموجبة تماماً $\mathbb{N}^*$ ، التي تُحقّق أنّه أيّاً كان العددان الطبيعيان الموجبان تماماً a و b يوجد مثلّث غير تافه أطوال أضلاعه هي :**

$$a \text{ و } f(b) \text{ و } f(b+f(a)-1)$$

(نقول إنّ المثلّث غير تافه إذا لم تقع رؤوسه على استقامة واحدة.)

ليكن $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ تابعاً يُحقّق شروط المسألة، ولنلاحظ النقاط التالية :

1. ليكن a و b عددين طبيعيّين موجبين تماماً. ولنفترض أنّ الأعداد $\{1,a,b\}$ تُمثّل أطوال أضلاع مثلّث غير تافه عندئذ يجب أن يكون $b = a$. في الحقيقة، لدينا استناداً إلى متراجحة المثلّث ما يلي :

$$a-1 < b < a+1$$

ومن ثَمّ لا بُدّ أن يكون $b = a$.

2. لنفترض على سبيل الجدل أنّ $\tau = f(1) - 1 \neq 0$. ليكن b عدداً من $\mathbb{N}^*$. استناداً إلى الفرْض تُكوّن الأعداد $\{1, f(b), f(b+\tau)\}$ أطوال أضلاع مثلّث غير تافه، والنقطة السابقة تقتضي أن يكون $f(b) = f(b+\tau)$. وعليه إذا عرّفنا

$$M = \max_{1\le\beta\le\tau} f(\beta) \text{ ،}$$

كان

$$\forall b \ge 1,\ \ f(b) \le M$$

فإذا اخترنا $a = 2M+1$ و $b = 1$ كان

$$a > f(b) + f(b+f(a)-1)$$

ولا تُكوّن الأعداد a و $f(b)$ و $f(b+f(a)-1)$ أطوال أضلاع مثلّث. نستنتج من هذا التناقض أنّه من الواجب أن يكون $\tau = 0$ ، أي $f(1) = 1$.

3. باختيار $b = 1$ و a عدداً ما من $\mathbb{N}^*$ ، نستنتج من كون الأعداد a و 1 و $f(f(a))$ تُكوّن أطوال أضلاع مثلّث غير تافه، أنّ $f(f(a)) = a$. وهذا يقتضي على وجه الخصوص أنّ f تقابلٌ.

4. لمّا كان $f(1)=1$ ، استنتجنا من النقطة السابقة أنّ $\kappa = f(2)-1>0$. بتطبيق الفرْض على $a=2$ و b من $\mathbb{N}^*$ نستنتج أنّ الأعداد 2 و $f(b)$ و $f(b+\kappa)$ تُكوّن أطوال أضلاع مثلّث، وبوجه خاص لدينا

$$f(b)-2<f(b+\kappa)<f(b)+2$$

ولأنّ $f(b)\neq f(b+\kappa)$ ، وجدنا

$$0<\left|f(b+\kappa)-f(b)\right|\leq 1$$

وأخيراً

$$\forall b\in\mathbb{N}^*,\quad \left|f(b+\kappa)-f(b)\right|=1$$

5. ليكن b من $\mathbb{N}^*$ ، استناداً إلى النقطة السابقة، مهما تكن n من $\mathbb{N}^*$ ، يوجد $\varepsilon_n(b)$ من $\{-1,1\}$ يُحقّق

$$f(b+n\kappa)-f(b+(n-1)\kappa)=\varepsilon_n(b)$$

إذا كان $\varepsilon_n(b)\varepsilon_{n+1}(b)<0$ كان $\varepsilon_n(b)+\varepsilon_{n+1}(b)=0$ وهذا يعني أنّ

$$f(b+(n+1)\kappa)=f(b+(n-1)\kappa)$$

وهذا يؤدّي إلى التناقض $2\kappa=0$ لأنّ f متباينٌ. إذن

$$\forall n>0,\quad \varepsilon_n(b)=\varepsilon_{n+1}(b)$$

وعليه يوجد $\varepsilon(b)$ في $\{-1,1\}$ يُحقّق $\varepsilon_n(b)=\varepsilon(b)$ أياً كانت قيمة n . ومنه

$$\forall n>0,\quad f(b+n\kappa)-f(b+(n-1)\kappa)=\varepsilon(b)$$

وإذا افترضنا على سبيل الجدل أنّ $\varepsilon(b)=-1$ استنتجنا من المساواة السابقة أنّ

$$\forall n>0,\quad f(b+n\kappa)-f(b)=-n$$

وهذا يُؤدّي إلى تناقض عند اختيار n مُساوية $f(b)$. إذن ينبغي أن يكون $\varepsilon(b)=1$ ، ومن ثَمّ

$$\forall n>0,\quad f(b+n\kappa)-f(b+(n-1)\kappa)=1$$

أو

$$\forall n \geq 0, \quad f(b + n\kappa) = f(b) + n$$

وعلى الخصوص، باختيار $b = 1$ واستبدال $n - 1$ بالعدد n نجد

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(1 + (n-1)\kappa) = n$$

وإذا اخترنا $f(2) = \kappa + 1 = n$، وجدنا $f(1 + \kappa^2) = f(2)$، ومنه $\kappa = 1$، لأنّ f متباينٌ، و $\kappa > 0$. إذن

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = n$$

وبالطبع، يُحقّق التابع $n \mapsto n$ الخاصّة المطلوبة، فهو إذن الحلّ الوحيد للمسألة المطروحة. ■

⑥ **لتكن $a_1, a_2, \ldots, a_n$ أعداداً طبيعيّة موجبة تماماً مختلفة. ولتكن M مجموعة مكوّنة من أعداد صحيحة عدد عناصرها $n - 1$ ولا ينتمي إليها العدد**

$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

نفترض أنّ جرادةً تقفز على طول المحور الحقيقي بدءاً من النقطة 0، وتُجري n قفزة إلى اليمين أطوالها $a_1, a_2, \ldots, a_n$ في ترتيب ما. أثبت أنّه يمكن اختيار هذا الترتيب بحيث لا تقع الجرادة على أيّ نقطة من نقاط M.

لنبرهن على صحّة هذه النتيجة بالتدريج على العدد n. في حالة $n = 1$ أو $n = 2$ النتيجة صحيحة وضوحاً. لنفترض أنّ $n \geq 3$، وأنّ النتيجة صحيحة عند جميع القيم التي هي أصغر تماماً من n. يمكننا بعد إعادة ترتيب إذا تطلّب الأمر أن نفترض أنّ

$$a_n = \max(a_1, \ldots, a_n), \quad m_1 = \min M$$

لنناقش الحالات التالية :

(a) حالة $m_1 < a_n$ و $a_n \notin M$. عندئذ تبدأ الجرادة بقفزة طولها a_n، فتتجنّب بهذه القفزة العقبة m_1، واستناداً إلى فرْض التدريج يمكن للجرادة أن تُرتّب قفزاتها اللاحقة التي عددها $n - 1$ لتتجنّب عناصر المجموعة $M \backslash \{m_1\}$ التي عدد عناصرها $n - 2$.

(b) حالة $m_1 < a_n$ و $a_n = m_j \in M$ عند إحدى قيم j . عندئذ نتأمّل مجموعة أزواج قفزات البدء : $(a_1, a_n), (a_2, a_n), \ldots, (a_{n-1}, a_n)$ التي عددها $n-1$ زوجاً والتي بنتيجتها تقع الجرادة عند $n-1$ قيمة مختلفة هي $(a_k + a_n)_{1 \le k < n}$ وهي جميعها مختلفة عن $a_n = m_j$. ولمّا كان عدد عناصر المجموعة $M \backslash \{m_j\}$ يساوي $n-1$ فيوجد عنصر i يُحقّق $1 \le i < n$ بحيث يكون $a_i + a_n \notin M$ ، وعندها إذا بدأت الجرادة بالقفزتين (a_i, a_n) فإنها تتجاوز العقبتين m_1 و m_j ، واستناداً إلى فرْض التدريج يمكنها أن تُرتّب قفزاتها اللاحقة التي عددها $n-2$ لتتجنّب عناصر المجموعة $M \backslash \{m_1, m_j\}$ التي عدد عناصرها $n-3$.

(c) حالة $a_n \le m_1$. هنا تحتاج الجرادة لاستراتيجيّة جديدة. لتبدأ بتجاهل قيمة m_1 ، ولتقفز الجرادة قفزة قدرها a_n ، ثُمّ لتُرتّب الجرادة استناداً إلى فرض التدريج بقية القفزات لتتجنّب عناصر $M \backslash \{m_1\}$. فإذا أمكن بهذا الترتيب تجنّب القيمة m_1 أيضاً تحقّق المطلوب. وإلاّ فإنّ الجرادة تقع مثلاً على القيمة m_1 مباشرة قبل إجراء القفزة a_i ، عندها تُعيد ترتيب القفزات بمناقلة القفزتين a_n و a_i . نتحقّق مباشرة أنّ متتالية القفزات الناتجة تتجنّب المجموعة M .

وهكذا يكتمل الإثبات بالتدريج. ■

أولمبياد الرياضيّات الحادي والخمسون

① **أوجد جميع التوابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ التي تُحقّق، أياً كان x و y من $\mathbb{R}$، المساواة التالية :**

$$f(\lfloor x\rfloor y)=f(x)\lfloor f(y)\rfloor$$

حيث $\lfloor a\rfloor$ هو الجزء الصحيح للعدد a، أي أكبر عدد صحيح أصغر أويساوي a.

لنتأمّل تابعاً f يُحقّق الشرط

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(\lfloor x\rfloor y)=f(x)\lfloor f(y)\rfloor \qquad (\mathcal{E})$$

بوضع $x=0$ و $y=0$ في $(\mathcal{E})$، نستنتج أنّ

$$f(0)\big(\lfloor f(0)\rfloor-1\big)=0$$

نناقش إذن حالتين :

- حالة $\lfloor f(0)\rfloor=1$. نضع $y=0$ في $(\mathcal{E})$، فنجد

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=f(0)$$

ولأنّ $\lfloor f(0)\rfloor=1$ استنتجنا أنّ $f(0)\in[1,2[$، أي يوجد c في المجال $[1,2[$ يُحقّق

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=c$$

- حالة $f(0)=0$. بوضع $x=1$ و $y=1$ في $(\mathcal{E})$، نجد

$$f(1)\big(\lfloor f(1)\rfloor-1\big)=0$$

نناقش من جديد حالتين :

- حالة $f(1)=0$. بوضع $x=1$ في $(\mathcal{E})$، نجد

$$\forall y\in\mathbb{R},\quad f(y)=0$$

- حالة $\lfloor f(1)\rfloor=1$. بوضع $y=1$ في $(\mathcal{E})$، نجد

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=f(\lfloor x\rfloor)$$

وعلى الخصوص $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(0)=0$. ولكن عند وضع $x=2$ و $y=\frac{1}{2}$ في $(\mathcal{E})$ نصل إلى **التناقض** التالي : $f(1)=f(2)\lfloor f(\frac{1}{2})\rfloor=0$، وهي حالة غير ممكنة.

إذن التابع f تابعٌ ثابتٌ قيمته عددٌ من المجموعة $[1,2[\,\cup\{0\}$. ووضوحاً كلُّ تابع من هذا النوع يُحقّق $(\mathcal{E})$. ■

② **ليكن ABC مثلّثاً وليكن I مركز الدائرة الماسّة لأضلاعه داخلاً. نرمز بالرمز Γ إلى الدائرة المارّة برؤوس هذا المثلّث. يقطع المستقيم (AI) الدائرة Γ ثانية في D. لتكن E نقطة من القوس $\overset{\frown}{BDC}$، ولتكن F نقطة من القطعة المستقيمة $[BC]$، بحيث تتحقّق المساواة $\widehat{BAF} = \widehat{CAE} < \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. إذا كانت G منتصف $[IF]$. أثبت أن نقطة تقاطع المستقيمين (EI) و (DG) تقع على الدائرة Γ.**

■ لتكن D' نظيرة I بالنسبة إلى D. يمر المستقيم (GD) بمنتصفي الضلعين $[IF]$ و $[ID']$ في المثلّث IFD' فهو إذن يوازي (FD'). وبوجه خاص لدينا

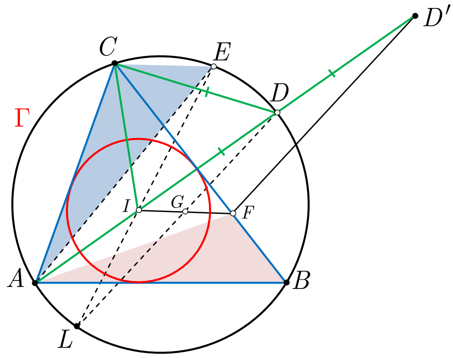
$$\widehat{GDI} = \widehat{FD'A} \tag{1}$$

■ المثلّثان ABF و AEC متشابهان. لأنّ $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}$ (محيطيّتان تُقابلان القوس نفسه) و $\widehat{BAF} = \widehat{EAC}$ بالفرض. نستنتج إذن أنّ

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AF}{AC}$$

أو

$$AB \cdot AC = AE \cdot AF \tag{2}$$



■ $ID = CD$. في الحقيقة لدينا

$$\widehat{DIC} = \widehat{IAC} + \widehat{ICA} = \frac{1}{2}\left(\hat{A} + \hat{C}\right)$$

$$\widehat{ICD} = \widehat{ICB} + \widehat{BCD} = \widehat{ICB} + \widehat{BAD} = \frac{1}{2}\left(\hat{A} + \hat{C}\right)$$

■ نستنتج أنّ الدائرة التي قطرها $[ID']$ تمر بالنقطة C، ومن ثَمّ $\widehat{ICD'}=\frac{\pi}{2}$. إذن

$$\widehat{CD'A}=\frac{\pi}{2}-\widehat{DIC}=\frac{1}{2}\big(\pi-\hat{A}-\hat{C}\big)=\frac{1}{2}\hat{B}=\widehat{IBA}$$

ومن جهة أخرى، $\widehat{IAB}=\widehat{CAD'}$. إذن المثلّثان AIB و ACD' متشابهان، ومنه

$$\frac{AB}{AD'}=\frac{AI}{AC}$$

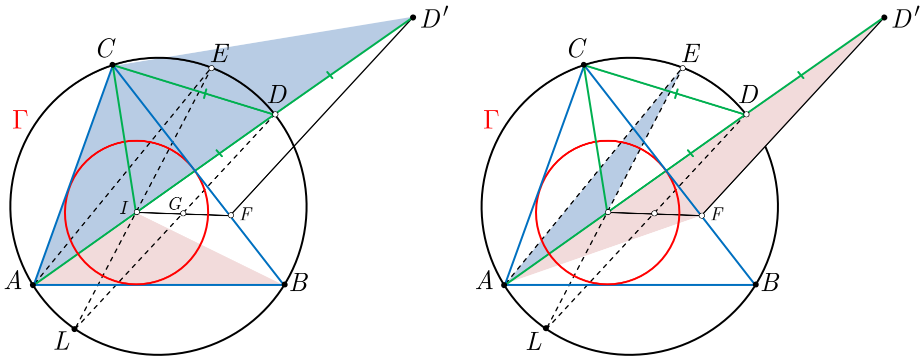
أو

$$AB\cdot AC=AI\cdot AD' \tag{3}$$

نستنتج من (2) و (3) أنّ

$$\frac{AE}{AD'}=\frac{AI}{AF}$$

ولّما كان $\widehat{FAI}=\widehat{IAE}$ استنتجنا تشابه المثلّثين AEI و $AD'F$.



وبوجه خاص لدينا

$$\widehat{IEA}=\widehat{FD'A} \tag{4}$$

نستنتج من (1) و (4) أنّ

$$\widehat{GDI}=\widehat{IEA}$$

وإذا رمزنا L إلى نقطة تقاطع المستقيمين (EI) و (DG) استنتجنا أنّ

$$\widehat{LDA}=\widehat{LEA}$$

فالرباعي $ALDE$ رباعي دائري، ومن ثَمّ تقع L على Γ . ■

③ **أوجد جميع التوابع** $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ **التي تُحقّق أنّه مهما يكن العددان الطبيعيان** n **و** m **يكن المقدار** $(g(m)+n)(g(n)+m)$ **مربّعاً كاملاً.**

■ لنفترض على سبيل الجدل وجود عددٍ n يُحقّق $g(n+1)=g(n)$. عندئذ، إذا رمزنا بالرمز a إلى هذه القيمة المشتركة ووضعنا $m=n+1$، كان لدينا

$$(a+n)^2<(g(m)+n)(g(n)+m)<(a+n+1)^2$$

ولا يمكن أن يكون $(g(m)+n)(g(n)+m)$ مربّعاً كاملاً. إذن

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad g(n+1)\neq g(n)$$

■ وكذلك إذا افترضنا وجود عددٍ n يُحقّق $g(n+2)=g(n)$. عندئذ، إذا رمزنا بالرمز a إلى هذه القيمة المشتركة ووضعنا $m=n+2$، كان لدينا أيضاً

$$(a+n)^2<(g(m)+n)(g(n)+m)<(a+n+1)^2$$

ولا يمكن أن يكون $(g(m)+n)(g(n)+m)$ مربّعاً كاملاً أيضاً في هذه الحالة. إذن

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad g(n)\notin\{g(n+2),g(n+1)\}$$

■ لنفترض الآن وجود عددٍ n يُحقّق $\left|g(n+1)-g(n)\right|\geq 2$. عندئذ، يوجد عددٌ أوّلي p يقسم $g(n+1)-g(n)$. فنعرّف $r\geq 1$ بأنّه أكبر أُسّ للعدد p يقسم العدد $g(n+1)-g(n)$. فيكون

$$g(n+1)-g(n)=p^rq \text{ حيث } \gcd(p,q)=1$$

① في حالة $r=2\ell+1$. نختار عدداً طبيعياً t يُحقّق الشرطين

$$t>\ell \text{ و } p^{2t+1}>g(n)$$

ونضع $m=p^{2t+1}-g(n)$. فيكون لدينا

$$g(n)+m=p^{2t+1}$$
$$g(n+1)+m=p^{2t+1}+p^{2\ell+1}q=p^{2\ell+1}(p^{2(t-\ell)}+q)$$

ومن ثَمّ، فإنّ p^{2t+1} هي أكبر قوّة للعدد p تقسم $g(n)+m$، ولا بُد استناداً إلى الفرْض أن يقسم p العدد $g(m)+n$.

وكذلك فإنّ $p^{2\ell+1}$ هي أكبر قوّة للعدد p تقسم $g(n+1)+m$. وإذا استعملنا الفرْض مجدداً استنتجنا أنّ p يجب أن يقسم أيضاً $g(m)+n+1$. وهذا يُؤدّي إلى **تناقض** إذْ لا يمكن أن يقسم p الفرق $(g(m)+n+1)-(g(m)+n)=1$.

② في حالة $r=2\ell\geq 2$. نختار عدداً طبيعياً t يُحقّق الشرطين

$t\geq 2$ و $p^t+p>g(n)$.

ونضع $m=p^t+p-g(n)$. فيكون لدينا

$$g(n)+m=p(p^{t-1}+1)$$
$$g(n+1)+m=p^t+p+p^{2\ell}q=p(p^{t-1}+p^{2\ell-1}q+1)$$

ومن ثَمّ، فإنّ p هي أكبر قوّة للعدد p تقسم $g(n)+m$ ، ولا بُد استناداً إلى الفرْض أن يقسم p العدد $g(m)+n$.

وكذلك فإنّ p هي أكبر قوّة للعدد p تقسم $g(n+1)+m$. وإذا استعملنا الفرْض مجدداً استنتجنا أنّ p يجب أن يقسم أيضاً $g(m)+n+1$. وهذا يُؤدّي إلى **تناقض** إذْ لا يمكن أن يقسم p الفرق $(g(m)+n+1)-(g(m)+n)=1$.

نستنتج من التناقض السابق أنّ

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \left|g(n+1)-g(n)\right|\leq 1$$

واستناداً إلى النقطة الأولى لا يمكن لهذا الفرق أن يكون معدوماً. وعليه

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \left|g(n+1)-g(n)\right|=1$$

■ لقد أثبتنا إذن وجود متتالية $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ من عناصر المجموعة $\{-1,+1\}$ تُحقّق

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad g(n+1)-g(n)=\varepsilon_n$$

وعملاً بالنقطة الثانية لدينا

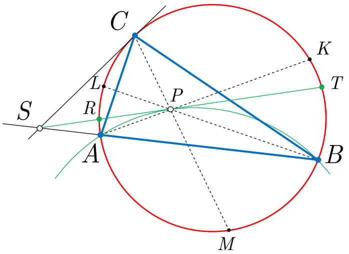
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}\neq 0$$

أي $\forall n\in\mathbb{N},\quad \varepsilon_n=\varepsilon_{n+1}$. وعليه

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad g(n+1)=g(n)+\varepsilon_0$$

أو $\forall n\in\mathbb{N},\ g(n)=g(0)+n\varepsilon_0$ ، ولأنّ جميع قيم g موجبة استنتجنا أنّ $\varepsilon_0=1$ ، فللتابع g الصيغة $g(n)=n+c$. وبالعكس، كل تابع من هذا النمط يُحقّق المطلوب. ◼

④ **لتكن** P **من داخل المثلّث** ABC **(حيث** $CA \neq CB$**).** **تُلاقي المستقيمات** (AP) **و** (BP) **و** (CP) **الدائرة** Γ **المارّة برؤوس المثلّث** ABC **ثانية في** K **و** L **و** M **بالترتيب. المماس في** C **للدائرة** Γ **يُلاقي المستقيم** AB **في** S**. أثبت أنّه من الشرط** $SC = SP$ **ينتج أنّ** $MK = ML$.



لتكن R و T نقطتي تقاطع (SP) مع الدائرة Γ، R على القوس $\overset{\frown}{ALC}$.

■ لمّا كان $SC = SP$ كان $\widehat{SCP} = \widehat{SPC}$. ومنه

$$\begin{aligned} \widehat{SCP} &= \frac{1}{2}\overset{\frown}{CAP} &= \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{CR} + \overset{\frown}{RM}\right) \\ \widehat{SPC} &= \widehat{RPC} &= \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{CR} + \overset{\frown}{MT}\right) \end{aligned}$$

إذن

$$\overset{\frown}{RM} = \overset{\frown}{MT} \qquad (1)$$

■ لمّا كان $SP^2 = SC^2 = SA \cdot SB$ استنتجنا أنّ (SP) يمس الدائرة المارّة برؤوس المثلّث APB ومن ثَمّ $\widehat{SPA} = \widehat{PBA}$. ومنه

$$\begin{aligned} \widehat{PBA} &= \frac{1}{2}\overset{\frown}{LRA} &= \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{LR} + \overset{\frown}{RA}\right) \\ \widehat{SPA} &= \widehat{RPA} &= \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{RA} + \overset{\frown}{TK}\right) \end{aligned}$$

إذن

$$\overset{\frown}{LR} = \overset{\frown}{TK} \qquad (2)$$

بجمع (1) و (2) نستنتج أنّ

$$\overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{MK}$$

ومنه $LM = MK$. وهي النتيجة المرجوّة. ■

⑤ **في البدء، تحتوي كلٌّ واحدة من العلب $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ على قطعة نقود واحدة. العمليتان التاليتان مسموحتان :**

❶ **نختار علبة غير خالية B_j حيث $1 \leq j \leq 5$، نحذف منها قطعة نقود واحدة، ونضيف اثنتين إلى B_{j+1}.**

❷ **نختار علبة غير خالية B_k حيث $1 \leq k \leq 4$، نحذف منها قطعة نقود واحدة، ونبادل بين محتويات العلبتين B_{k+1} و B_{k+2}.**

أتوجد متتالية منتهية من العمليات المسموحة تؤدي إلى الوضع الذي تكون فيه العلب B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 خالية، وتحتوي العلبة B_6 على $2010^{(2010^{2010})}$ قطعة نقدية.

يمكن صياغة العمليتين ❶ و ❷ رمزاً بكتابة :

$$❶ \quad : [a,b] \xrightarrow{T_1} [a-1, b+2]$$

$$❷ \quad : [a,b,c] \xrightarrow{T_2} [a-1, c, b]$$

وانطلاقاً من هاتين العمليّتين يمكننا تعريف عمليات أخرى كما يلي :

■ العملية T_3' :

$$T_3' : \quad [a, 2^b, 0] \xrightarrow{(T_1)^{2^b}} [a, 0, 2^{b+1}] \xrightarrow{T_2} [a-1, 2^{b+1}, 0]$$

■ العملية T_3 وهي تنتج من تكرار العملية السابقة a مرّة :

$$T_3 : \quad [a, 2^b, 0] \xrightarrow{(T_3')^a} [0, 2^{b+a}, 0]$$

■ العملية T_4' :

$$T_4' : \quad [c, d, 0, 0] \xrightarrow{T_1} [c, d-1, 2, 0] \xrightarrow{T_3} [c, 0, 2^d, 0] \xrightarrow{T_2} [c-1, 2^d, 0, 0]$$

■ العملية T_4 وهي تنتج من تكرار العملية السابقة c مرّة :

$$T_4 : \quad [c, d, 0, 0] \xrightarrow{(T_4')^c} [0, \underbrace{E \circ E \circ \cdots \circ E}_{c \text{ مرة}}(d), 0, 0]$$

حيث كتبنا $E(x)$ دلالة على 2^x.

لنأتِ الآن إلى المسألة المطروحة ولنتأمّل سلسلة العمليات التالية :

$$[1,1,1,1,1,1] \xrightarrow{T_1} [1,1,1,1,0,3] \xrightarrow{T_2} [1,1,1,0,3,0]$$

$$[1,1,1,0,3,0] \xrightarrow{T_2} [1,1,0,3,0,0] \xrightarrow{T_1} [0,3,0,3,0,0]$$

$$[0,3,0,3,0,0] \xrightarrow{T_2} [0,2,3,0,0,0] \xrightarrow{T_1} [0,1,5,0,0,0]$$

$$[0,1,5,0,0,0] \xrightarrow{T_1} [0,0,7,0,0,0] \xrightarrow{T_1} [0,0,6,2,0,0]$$

$$[0,0,6,2,0,0] \xrightarrow{T_4} [0,0,0,\underbrace{E\circ E\circ\cdots\circ E}_{6}(2),0,0]$$

ثُمّ لنتأمّل العدد الفائق الكِبر

$$D = \underbrace{E\circ E\circ\cdots\circ E}_{6}(2) = 2^{2^{2^{2^{2^{2}}}}}$$

بملاحظة أنّ $2^{11} = 2048 > 2010$ نستنتج أنّ $2^{11\times 2010} > 2010^{2010}$ ومنه

$$2010^{(2010^{2010})} < 2^{11\times 2010^{2010}} < 2^{2^4\times 2^{22110}} = E(2^{22114}) = E\circ E(22114)$$

ولكن

$$22114 < 2^{16} = E\circ E(4) = E\circ E\circ E(2)$$

إذن

$$2010^{(2010^{2010})} < E\circ E\circ E\circ E\circ E(2) < D$$

من الواضح أنّ العدد $2010^{(2010^{2010})}$ يقبل القسمة على 4 ، ليكن إذن

$$U = \frac{1}{4}\times 2010^{(2010^{2010})}$$

لمّا كان $D > U$ يمكننا تطبيق التحويل T_2 عدداً $D-U$ من المرّات كما يلي :

$$[0,0,0,D,0,0] \xrightarrow{(T_2)^{D-U}} [0,0,0,U,0,0]$$

وهنا نُطبّق T_1 عدداً من المرّات يساوي $3U$ مرّة، كما يلي

$$[0,0,0,U,0,0] \xrightarrow{(T_1)^{U}} [0,0,0,0,2U,0] \xrightarrow{(T_1)^{2U}} [0,0,0,0,0,4U]$$

فنصل إلى الوضع النهائي المطلوب. ■

⑥ **لتكن** $a_1, a_2, a_3, \ldots$ **متتالية من الأعداد الحقيقيّة الموجبة تماماً. وليكن** s **عدداً طبيعياً موجباً تماماً، يُحقّق**

$$\forall n > s, \quad a_n = \max\{a_k + a_{n-k} : 1 \le k \le n-1\}$$

أثبت أنّه يوجد عددان طبيعيان ℓ **و** N **يُحقّقان** $\ell \le s$ **، و**

$$\forall n > N, \quad a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$$

ليكن ℓ عدداً من المجموعة $\{1,2,\ldots,s\}$ يُحقّق

$$\frac{a_\ell}{\ell} = \max\left\{\frac{a_k}{k} : 1 \le k \le s\right\}$$

■ لنبرهن بالتدريج على العدد n أنّ

$$\forall n \ge 1, \quad \frac{a_n}{n} \le \frac{a_\ell}{\ell} \qquad (1)$$

في الحقيقة، هذه النتيجة صحيحة وضوحاً في حالة $n \le s$ وذلك استناداً إلى تعريف ℓ. لنفترض صحّتها عند جميع قيم n التي تُحقّق $n < m$. استناداً إلى التعريف، يوجد k من المجموعة $\{1,2,\ldots,m-1\}$ يُحقّق $a_m = a_k + a_{m-k}$ فإذا استفدنا من فرض التدريج أمكننا أن نكتب ما يلي :

$$a_m = a_k + a_{m-k} \le k\frac{a_\ell}{\ell} + (m-k)\frac{a_\ell}{\ell} = m\frac{a_\ell}{\ell}$$

وهذا يُثبت صحّة المتراجحة (1) في حالة $n = m$، ويُنجز إثبات (1) بالتدريج.

☜ لنعرّف في حالة $n > 0$ العدد b_n بالصيغة

$$b_n = na_\ell - \ell a_n$$

استناداً إلى (1) لدينا $b_n \ge 0$ أياً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n.

■ مهما تكن $1 \le n$ فتوجد أعداد $(\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_s^{(n)})$ من $\mathbb{N}^s$ تُحقّق

$$b_n = \lambda_1^{(n)} b_1 + \lambda_2^{(n)} b_2 + \cdots + \lambda_s^{(n)} b_s$$

هذه النتيجة صحيحة وضوحاً في حالة $n \leq s$. لنفترض صحّتها عند جميع قيم n التي تُحقّق $n < m$. استناداً إلى التعريف، يوجد k من المجموعة $\{1,2,\ldots,m-1\}$ يُحقّق $a_m = a_k + a_{m-k}$، وعندئذ

$$\begin{aligned} b_m &= ma_\ell - \ell a_m \\ &= ka_\ell + (m-k)a_\ell - \ell a_k - \ell a_{m-k} \\ &= b_k + b_{m-k} \end{aligned}$$

فإذا استفدنا من فرْض التدريج وجدنا

$$b_m = \sum_{j=1}^{s} (\lambda_j^{(k)} + \lambda_j^{(m-k)}) b_j$$

يكفي إذن أن نعرّف $\lambda_j^{(m)} = \lambda_j^{(k)} + \lambda_j^{(m-k)}$ في حالة $j = 1,2,\ldots,s$.

■ مهما تكن n التي تحقّق $n > s$، فلدينا $b_n \leq b_{n-\ell}$. في الحقيقة،

$$\begin{aligned} b_{n-\ell} - b_n &= (n-\ell)a_\ell - \ell a_{n-\ell} - na_\ell + \ell a_n \\ &= \ell(a_n - a_{n-\ell} - a_\ell) \geq 0 \end{aligned}$$

إذ نتجت المتراجحة الأخيرة من تعريف a_n ومن كون $n > s$.

☜ فالمتتاليات $\left(b_{r+k\ell}\right)_{k\geq 0}$ حيث $0 \leq r < \ell$ جميعها متتاليات متناقصة بدءاً من حدٍّ معين.

■ لتكن

$$M = \max\{b_j : 1 \leq j \leq s\}$$

عندئذ مهما تكن $1 \leq n$ يكن $b_n \leq M$. تنتج هذه الخاصّة مباشرة من النقطة السابقة بالتدريج على العدد n.

☜بالطبع إذا كان $M = 0$ كان $b_n = 0$ أياً كانت قيمة n، وكان

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = n\frac{a_\ell}{\ell}$$

والمساواة $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ مُحقّقة وضوحاً أياً كانت قيمة n.

■ لنفترض فيما يلي أنّ $M > 0$، عندئذ تكون المجموعة J التالية غير خالية

$$J = \left\{j : 1 \leq j \leq s, b_j > 0\right\}$$

في حالة j من J لدينا

$$\forall n \geq 1, \quad \lambda_j^{(n)} b_j \leq \sum_{i \in J} \lambda_i^{(n)} b_i = b_n \leq M$$

ومن ثَمّ، إذا عرّفنا $\beta = \max_{j \in J} \lfloor M / b_j \rfloor$، كان

$$\forall n \geq 1, \forall j \in J, \quad \lambda_j^{(n)} \leq \lfloor M / b_j \rfloor \leq \beta$$

إذن تأخذ المتتالية $(b_n)_{n \geq 1}$ قيمها في المجموعة **المنتهية** :

$$\left\{ \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_s b_s : (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in \{0, \ldots, \beta\}^s \right\}$$

■ لتكن r من $\{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$. نستنتج من كون المتتالية $\left(b_{r+k\ell}\right)_{k \geq 0}$ متناقصة بدءاً من حدٍّ معيّن وتأخذ عدداً منتهياً من القيم، أنّها ثابتة بدءاً من حدٍّ معيّن، فيوجد K_r يُحقّق

$$\forall k > K_r, \quad b_{r+k\ell} = b_{r+(k-1)\ell}$$

فإذا عرّفنا $K = \max(K_0, \ldots, K_{\ell-1})$، كان لدينا

$$\forall k > K, \forall r \in \{0, \ldots, \ell - 1\}, \quad b_{r+k\ell} = b_{r+k\ell-\ell}$$

أو بوضع $N = \ell K$،

$$\forall n > N, \quad b_n = b_{n-\ell}$$

وهذا يُكافئ القول

$$\forall n > N, \quad a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$$

وهي النتيجة المطلوبة. ◼

بعض المعارف والمراجع المفيدة

التطبيقات والتحليل التوافقي

- يُعرّف التطبيق $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ بمجموعة X تسمّى المنطلق، وأخرى Y تسمّى المستقر، وقاعدة ربطٍ $x \mapsto f(x)$ تقرن بكلِّ عنصر x من X عنصراً $y = f(x)$ من Y.
- يكون التطبيق $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ متبايناً إذا تحقّق الاقتضاء

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- ويكون التطبيق $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ غامراً إذا كان للمعادلة $f(x) = b$ بالمجهول x حلٌّ في X وذلك مهما كان العنصر b من Y.
- وأخيراً نقول إنّ التطبيق $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ تقابلٌ إذا وفقط إذا كان متبايناً وغامراً في آن معاً.
- إذا كانت X و Y مجموعتين منتهيتين كان

$$\operatorname{card}(X \times Y) = \operatorname{card}(X)\operatorname{card}(Y)$$

- إذا كانت X و Y مجموعتين جزئيّتين منتهيتين من مجموعة Z كان

$$\operatorname{card}(X \cup Y) = \operatorname{card}(X) + \operatorname{card}(Y) - \operatorname{card}(X \cap Y)$$

ويمكن تعميم هذه النتيجة لنحصل على مبدأ الاحتواء والاستثناء.

- إذا كان $f : X \to Y$ تطبيقاً بين مجموعتين منتهيتين، عندئذ
  - إذا كان f متبايناً كان $\operatorname{card}(X) \le \operatorname{card}(Y)$.
  - وإذا كان f غامراً كان $\operatorname{card}(X) \ge \operatorname{card}(Y)$.
  - وإذا كان f تقابلاً كان $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y)$.
  - في حالة $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y)$، هناك تكافؤ بين كون f متبايناً وكون f غامراً، وكون f تقابلاً.
- عددُ التقابلات بين مجموعتين عددُ عناصر كلٍّ منهما يساوي n هو $n!$.

- عددُ التطبيقات المتباينة من مجموعة عددُ عناصرها k إلى مجموعة عددُ عناصرها n يساوي

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times \cdots (n-k+1)$$

وهو نفسه عدد طرائق اختيار k عنصراً من مجموعة فيها n عنصراً واحداً إثر آخر دون إعادة.

- عددُ المجموعات الجزئيّة المكوّنة من k عنصراً مأخوذة من مجموعة فيها n عنصراً يساوي

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

وهو نفسه عدد طرائق اختيار k عنصراً دفعة واحدة من مجموعة فيها n عنصراً.

- مبدأ أدراج ديرخليه Dirichlet.

عند تجزئة مجموعة مكوّنة من $nk+1$ عنصراً إلى n مجموعة جزئيّة، فلا بُدّ أن تحوي إحدى هذه المجموعات على $k+1$ عنصراً على الأقلّ.

الحساب ونظريّة الأعداد

- ليكن m و n عددين صحيحين، نقول إنّ m يقسم n، أو إنّ n مُضاعفٌ للعدد m، ونعبّر عن ذلك بالكتابة $m \mid n$، إذا وفقط إذا وُجِدَ عددٌ صحيح k يُحقّق $n = km$.
- نرمز عادة بالرمز $m\mathbb{Z}$ إلى مجموعة مُضاعفات العدد m. وهي زمرة جزئيّة من زمرة الأعداد الصحيحة.
- إنّ أي زمرة جزئيّة من $\mathbb{Z}$ هي من النمط $m\mathbb{Z}$ و m عددٌ طبيعي.
- إذا كانت $(x_1, \ldots, x_n)$ جملة من الأعداد الصحيحة عرّفنا $\gcd(x_1, \ldots, x_n)$ بأنّه أكبر القواسم المشتركة الموجبة لأعداد الجملة $(x_1, \ldots, x_n)$، وأسميناه القاسم المشترك الأكبر لهذه الأعداد. وعرّفنا $\operatorname{lcm}(x_1, \ldots, x_n)$ بأنّه أصغر المضاعفات المشتركة الموجبة لأعداد الجملة $(x_1, \ldots, x_n)$، وأسميناه المضاعف المشترك الأصغر لهذه الأعداد.
- نقول إنّ الأعداد $(x_1, \ldots, x_n)$ أوّليّة فيما بينها إذا وفقط إذا كان 1 هو قاسمها المشترك الأكبر.

- ونقول إنّ العدد الطبيعي p عددٌ أوّلي إذا وفقط إذا كان $p > 1$ وتحقّق الاقتضاء

$$a \mid p \Rightarrow a \in \{-p, -1, 1, p\}$$

- مبرهنة بِزو Bézout.

ليكن x و y عددين صحيحين، عندئذ يكون $\gcd(x, y) = 1$ إذا وفقط إذا وُجِدَ عددان صحيحان a و b يُحقّقان $ax + by = 1$.

وبوجه عام، إذا كانت $(x_1, \ldots, x_n)$ جملة من الأعداد الصحيحة، عندئذ يكون $\gcd(x_1, \ldots, x_n) = 1$ إذا وفقط إذا وُجِدَت أعدادٌ صحيحة $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ تُحقّق $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 1$.

- توطئة غاوس Gauss.

إذا كان $a \mid bc$ و $\gcd(a, b) = 1$ كان $a \mid c$

- المبرهنة الأساسيّة في الحساب.

لتكن $\mathcal{P}$ مجموعة الأعداد الأوّليّة، عندئذ أيّاً كان العدد الطبيعي n غير المعدوم فيوجد تطبيق وحيدٌ $\nu(n) : \mathcal{P} \to \mathbb{N}, p \mapsto \nu_p(n)$ يُحقّق الشرطين

❶ $\operatorname{card}\left(\{p \in \mathcal{P} : \nu_p(n) > 0\}\right) < +\infty$.

❷ $n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(n)}$.

- القسمة الإقليديّة. أيّاً كان (a, b) من $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})$ فيوجد زوجٌ وحيدٌ (q, r) من $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ يُحقّق $a = qb + r$ و $0 \le r < |b|$.

- في حالة $n \neq 0$، نقول إنّ العددين الصحيحين a و b متساويان بالقياس n، ونكتب $a = b \bmod n$، أو $a \equiv b \bmod n$، إذا وفقط إذا كان $n \mid (b - a)$، أو كان $b - a \in n\mathbb{Z}$. ونبرهن بسهولة الخواص التالية :

❶ $(a = b \bmod n) \wedge \left(a' = b' \bmod n\right) \Rightarrow a + a' = \left(b + b'\right) \bmod n$

❷ $(a = b \bmod n) \wedge \left(a' = b' \bmod n\right) \Rightarrow aa' = bb' \bmod n$

- تعرّف العلاقة $x \sim_n y \Leftrightarrow x = y \bmod n$ علاقة تكافؤ على مجموعة الأعداد الصحيحة، نرمز عادة بالرمز $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ إلى مجموعة صفوف تكافئها، وهي حلقة تبديليّة بالنسبة إلى الجمع والضرب بالقياس n.

- مبرهنة فِرما Fermat الصغيرة.
إذا كان p عدداً أوّليّاً كان $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad p \nmid n \Rightarrow n^{p-1} = 1 \bmod p$.

الهندسة المستوية

- في المثلّث، تتلاقى الارتفاعات في نقطة واحدة.
- كذلك تتلاقى المتوسطّات في مركز ثقل المثلّث وهي نقطة تقسم كلاً من المتوسطات بنسبة $1:2$.
- وتتلاقى محاور الأضلاع في مركز الدائرة المارّة برؤوس المثلّث. وأخيراً تتلاقى المنصفات الداخليّة في مركز الدائرة التي تمسّ أضلاع المثلّث داخلاً.
- في المثلّث يقسم منصّف أي زاوية من زواياه الضلع المقابل بنسبة الضلعين اللذين يجاورانها.
- إذا كان ABC مثلّثاً أطوال أضلاعه $[BC]$ و $[CA]$ و $[AB]$ تساوي a و b و c وزواياه $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$.
  - عندئذ يكون لدينا
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$
  - إذا رمزنا بالرمز R إلى نصف قطر الدائرة المارّة برؤوسه، كان
$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$$
  - وإذا رمزنا بالرمز $\mathcal{A}(ABC)$ إلى مساحة ABC كان
$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$$
أو
$$\mathcal{A}(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
مع $2p = a+b+c$.
  - وإذا رمزنا بالرمز r إلى نصف قطر الدائرة التي تمس أضلاع المثلّث ABC داخلاً كان
$$r = \frac{\mathcal{A}(ABC)}{p}$$

- ليكن $ABCD$ مضلّعاً رباعيّاً. عندئذ
  - يكون $ABCD$ رباعيّاً دائريّاً إذا وفقط إذا كان $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.
  - ويكون $ABCD$ رباعيّاً دائريّاً إذا وفقط إذا كان $\widehat{ABC} = \pi - \widehat{ADC}$.

المتراجحات الشهيرة

- متراجحة كوشي شوارتز. إذا كانت $(a_1,\ldots,a_n)$ و $(b_1,\ldots,b_n)$ أعداداً كان
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$
وتتحقّق المساواة إذا وفقط إذا وُجِدَ عددان غير معدومين معاً λ و μ يُحقّقان
$$\forall k \in \{1,2,\ldots,n\}, \quad \lambda a_k = \mu b_k$$

- متراجحة هولدر. إذا كانت $(a_1,\ldots,a_n)$ و $(b_1,\ldots,b_n)$ أعداداً موجبة، وكان p و q عددان من $]1,+\infty[$ يُحقّقان $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ كان
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q}$$
وتتحقّق المساواة إذا وفقط إذا وُجِدَ عددان موجبان غير معدومين معاً λ و μ يُحقّقان
$$\forall k \in \{1,2,\ldots,n\}, \quad \lambda a_k = \mu b_k$$

- إذا كانت $(a_1,\ldots,a_n)$ أعداداً موجبة تماماً، عرّفنا المتوسطّ الحسابي AM، والمتوسّط الهندسي GM، والمتوسّط التوافقي HM، والمتوسّط التربيعي QM كما يلي :
$$GM = \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \quad \text{و} \quad AM = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$
$$QM = \sqrt{\frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}} \quad \text{و} \quad HM = n\Big/\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$
وعندئذ
$$HM \le GM \le AM \le QM$$
وتقع المساواة إذا وفقط إذا كان $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

سنكتفي بهذا القدر، ونعيد القارئ إلى المراجع التالية للاستزادة.

- HARDY & WRIGHT. *An Introduction to the theory of numbers.* Oxford University Press.
- GRAHAM & KNUTH & PATASHNIK. *Concrete Mathematics.* Addison-Wesely Publishing Company.
- DIEUDONNÉ. *Algèbre linéare et géometrie élémentaire.* Hermann.
- HARDY & LITTLEWOOD & PÓLYA. *Inequalities.* Cambridge University Press.

بعض الرموز المستخدمة

$\varnothing$	المجموعة الخالية.
$\mathbb{N}$	مجموعة الأعداد الطبيعيّة $\{0,1,2,\ldots\}$.
$\mathbb{N}^*$	مجموعة الأعداد الطبيعيّة الموجبة تماماً $\{1,2,\ldots\}$.
$\mathbb{N}_n$	مجموعة الأعداد الطبيعيّة بين 1 و n . مع $\mathbb{N}_0=\varnothing$
$\mathbb{Z}$	مجموعة الأعداد الصحيحة.
$\mathbb{Z}[X]$	حلقة كثيرات الحدود ذات الأمثال الصحيحة.
$\mathbb{Z}_n$	مجموعة الأعداد الصحيحة بين 0 و $n-1$.
$n\mathbb{Z}$	مجموعة مضاعفات العدد n .
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	حلقة بواقي القسمة على العدد n .
$\mathbb{F}_p$	الحقل المنتهي $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ في حالة عددٍ أوّلي p .
$\mathbb{Q}$	مجموعة الأعداد العاديّة.
$\mathbb{R}$	مجموعة الأعداد الحقيقيّة.
$\mathbb{R}[X]$	حلقة كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة
$\mathbb{R}_+$	مجموعة الأعداد الحقيقيّة غير السالبة.
$\mathbb{R}_+^*$	مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة تماماً.
$\mathbb{C}$	مجموعة الأعداد العقديّة.
$\overline{z}$	مرافق العدد العقدي z
i	العدد العقدي $\sqrt{-1}$.
$\lvert z\rvert$	طويلة العدد العقدي z
$\arg(z)$	زاوية العدد العقدي z .
(AB)	المستقيم المارّ بالنقطتين A و B .
$[AB]$	القطعة المستقيمة التي طرفاها A و B .
$[AB)$	نصف المستقيم الذي مبدؤه A ويمر بالنقطة B .
AB	طول القطعة المستقيمة $[AB]$.
$\overrightarrow{AB}$	الشعاع الذي مبدؤه A ونهايته B .
$C(O,R)$	الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها R .

$\widehat{ABC}$	الزاوية التي رأسها B وضلعاها $(BA]$ و $(BC]$، ونكتب $\widehat{B}$ إذا لم يكن هناك التباس.
$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$	الزاوية الموجّهة بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بهذا الترتيب.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$	الجداء السلّمي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.
$\gcd(a,b)$	القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .
$\operatorname{lcm}(a,b)$	المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b .
$a \mid b$	a يقسم b .
$a \nmid b$	a لا يقسم b .
$a \bmod n$	باقي القسمة الإقليديّة للعدد a على n .
$n!$	n عاملي أي $n\times(n-1)\times\cdots\times 1$ مع $0!=1$.
C_n^k	عدد توافيق n عنصراً مأخوذة k بعد k، أي $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
$\mathfrak{S}_n$	مجموعة التقابلات على المجموعة $\mathbb{N}_n$.
$\det$	المحدّد.

أين ومتى ونوع المسائل المطروحة

يبيِّن الجدول التالي الدول التي انعقدت فيها دورات الأولمبياد العالمي للرياضيّات، إضافة إلى أنماط المسائل التي طُرحت في كلِّ دورة . وقد اعتمدنا عموماً التصنيف التالي :

N	الحساب ونظريّة الأعداد.
E	توابع حقيقيّة ومعادلات.
G	هندسة مستوية.
G3	هندسة فراغيّة.

I	متراجحات.
C	تحليل توافقي.
F	معادلات تابعيّة.
A	خوارزميّات.

في الحقيقة هذا تصنيفٌ عام، وهو غير دقيق في بعض الأحيان، فقد تقع بعض المسائل على الحدود بين موضوعات مختلفة، فنجد متراجحات هندسية، صُنِّفت ضمن إطار المتراجحات، وأخرى ضمن إطار الهندسة، وكذلك الأمر بالنسبة إلى مسائل الحساب ونظرية الأعداد، ومسائل التحليل التوافقي.

الأولمبياد	السنة	المكان	المسائل ①	②	③	④	⑤	⑥
الأوّل	1959	رومانيا	N	E	E	G	G	G3
الثاني	1960	رومانيا	N	I	G	G	G3	G3
الثالث	1961	هنغاريا	E	I	E	G	G	G3
الرابع*	1962	تشيكوسلوفاكيا	N	I	G3	E	G	G
الخامس	1963	بولونيا	E	G3	G	E	E	C
السادس	1964	الاتحاد السوفييتي	N	I	G	C	C	G3
السابع	1965	ألمانيا الشرقيّة	I	E	G3	E	G	G
الثامن	1966	بلغاريا	C	G	G3	E	E	G
التاسع	1967	يوغوسلافيا	G	G3	N	G	N	C

* في هذا الأولمبياد طُرِحتْ مسألة سابعة في الهندسة الفراغيّة.

الأولمبياد	السنة	المكان	المسائل					
			①	②	③	④	⑤	⑥
العاشر	1968	الاتحاد السوفييتي	G	N	E	G3	F	N
الحادي عشر	1969	رومانيا	N	E	G3	G	C	I
الثاني عشر	1970	هنغاريا	G	N	I	C	G3	C
الثالث عشر	1971	تشيكوسلوفاكيا	I	G3	N	G3	G	C
الرابع عشر	1972	بولونيا	C	G	N	I	F	G3
الخامس عشر	1973	الاتحاد السوفييتي	G	G3	I	G	E	I
السادس عشر	1974	ألمانيا الشرقيّة	C	G	N	C	I	C
السابع عشر	1975	بلغاريا	I	N	G	N	G	F
الثامن عشر	1976	النمسا	G	E	C	C	E	E
التاسع عشر	1977	يوغوسلافيا	G	I	N	I	E	F
العشرون	1978	رومانيا	N	G3	F	G	I	C
الحادي والعشرون	1979	انكلترا	N	C	G	G3	E	C
الثاني والعشرون	1981	الولايات المتحدة	G	C	C	N	G	F
الثالث والعشرون	1982	هنغاريا	F	G	I	E	G	G
الرابع والعشرون	1983	فرنسا	F	G	N	G	N	I
الخامس والعشرون	1984	تشيكوسلوفاكيا	I	N	G	G	I	N
السادس والعشرون	1985	فنلندا	G	N	I	N	G	I
السابع والعشرون	1986	بولونيا	N	G	C	G	F	C
الثامن والعشرون	1987	كوبا	C	G	I	F	G	N
التاسع والعشرون	1988	أستراليا	G	C	F	I	G	N
الثلاثون	1989	ألمانيا الغربيّة	C	G	C	G	N	C
الحادي والثلاثون	1990	الصين	G	C	N	F	C	N
الثاني والثلاثون	1991	السويد	G	N	C	A	G	I
الثالث والثلاثون	1992	روسيا	N	F	C	G	G3	N
الرابع والثلاثون	1993	تركيا	N	G	A	G	F	N
الخامس والثلاثون	1994	هونغ كونغ	C	G	N	N	F	N
السادس والثلاثون	1995	كندا	G	I	G	E	I	C
السابع والثلاثون	1996	الهند	C	G	F	N	G	C
الثامن والثلاثون	1997	الأرجنتين	I	G	I	C	N	F
التاسع والثلاثون	1998	تايوان	G	C	N	N	G	F
الأربعون	1999	رومانيا	G	I	C	N	G	F
الحادي والأربعون	2000	كوريا الجنوبيّة	G	C	G	C	N	G
الثاني والأربعون	2001	الولايات المتحدة	G	I	C	N	G	N

الأولمبياد	السنة	المكان	المسائل					
			①	②	③	④	⑤	⑥
الثالث والأربعون	2002	انكلترا	C	G	N	N	F	I
الرابع والأربعون	2003	اليابان	C	N	G	G	I	N
الخامس والأربعون	2004	اليونان	G	F	C	I	G	N
السادس والأربعون	2005	المكسيك	G	N	I	N	G	C
السابع والأربعون	2006	سلوفينيا	G	C	I	E	E	G
الثامن والأربعون	2007	فييتنام	I	G	A	G	N	C
التاسع والأربعون	2008	اسبانيا	G	I	N	F	C	G
الخمسون	2009	ألمانيا	N	G	N	G	F	A
الحادي والخمسون	2010	كازاخستان	F	G	N	G	A	N

تمّت

يحمل الدكتور عمران قوبا شهادة الدكتوراه في الرياضيات البحتة من فرنسا، وهو حائز على جائزة عبد السلام للعلماء الشباب عام 1992، وقد احتل المركز الثاني في مسابقة انتقاء أساتذة التعليم العالي في فرنسا عام 1985.

ألّف الدكتور عمران قوبا ما يزيد عن خمسة عشر كتاباً في فروع مختلفة من الرياضيات باللغتين العربيّة والفرنسيّة.

وهو يهتم بطرائق تدريس الرياضيات، ويعمل في تدريس الرياضيات في المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا منذ عام 1990. تنصبّ أبحاثه واهتماماته في مجالات التحليل التابعي والتحليل التقليدي والجبر التبديلي وطرائق حل المسائل.

في هذا الكتاب يضع الدكتور قوبا مجموعة مسائل الرياضيات التي جرى طرحها في الأولمبياد العالمي للرياضيات منذ إنشائه عام 1959 مع حلول مُختارة لها، آملاً أن يجد المهتمّون والطلاب في هذه المجموعة الفائدة والمُتعة.

منشورات الهيئة الوطنيّة للأولمبياد العلمي السوري