



تصحيح مباراة الأولمبياد في الرياضيات (المرحلة الأولى)

تمرين 1 (3ن)

نضع :  $A = \sqrt{57 - 40\sqrt{2}} - \sqrt{57 + 40\sqrt{2}}$

بين أن  $A \in \mathbb{Z}$

الجواب :

نلاحظ أن :  $57 - 40\sqrt{2} < 57 + 40\sqrt{2}$  إذن :  $\sqrt{57 - 40\sqrt{2}} < \sqrt{57 + 40\sqrt{2}}$   
ومنه :  $A < 0$

نحسب  $A^2$  :  $A^2 = \left( \sqrt{57 - 40\sqrt{2}} - \sqrt{57 + 40\sqrt{2}} \right)^2$

$A^2 = \left( \sqrt{57 - 40\sqrt{2}} \right)^2 - 2\sqrt{57 - 40\sqrt{2}}\sqrt{57 + 40\sqrt{2}} + \left( \sqrt{57 + 40\sqrt{2}} \right)^2$

$A^2 = 57 - 40\sqrt{2} - 2\sqrt{(57 - 40\sqrt{2})(57 + 40\sqrt{2})} + 57 + 40\sqrt{2}$

إذن :  $A^2 = 114 - 2\sqrt{3249 - 3200}$  أي :  $A^2 = 114 - 2\sqrt{57^2 - (40\sqrt{2})^2}$

$A^2 = 114 - 2\sqrt{49}$  أي :  $A^2 = 100$  يعني  $A = \sqrt{100}$  أو  $A = -\sqrt{100}$

ونعلم أن  $A < 0$  إذن :  $A = -\sqrt{100} = -10$

تمرين 2 (2ن)

أحسب :  $G = (2015200052004)^2 - (2015200052002 \times 2015200052006)$

الجواب : نلاحظ أن الأعداد الثلاثة تختلف فقط في رقم وحداتها لتبسيط الحساب

نضع :  $x = 2015200052004$

إذن :  $x + 2 = 2015200052006$  و  $x - 2 = 2015200052002$

ومنه :  $G = x^2 - (x - 2)(x + 2)$

$G = x^2 - (x^2 - 2^2) = x^2 - x^2 + 4 = 4$  يعني  $G = x^2 - (x^2 - 2^2)$

تمرين 3 (4ن) :  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين موجبين

بين أن :  $(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq 4ab$

الجواب :

$a \in \mathbb{R}$  نقارن :  $2a$  و  $a^2 + 1$

$(a^2 + 1) - 2a = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \geq 0$

ومنه  $a^2 + 1 \geq 2a$  :  $a \in \mathbb{R}$

ثانوية عبد الله العروي التأهيلية

بنفس الطريقة نقارن :  $b^2 + 1$  و  $2b$

فنجد :  $b^2 + 1 \geq 2b$

$$\begin{cases} a^2 + 1 \geq 2a \\ b^2 + 1 \geq 2b \end{cases}$$

اذن وجدنا :

وبضرب المتفاوتتين طرف طرف نجد :

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq 4ab \quad \text{أي} \quad (a^2 + 1) \times (b^2 + 1) \geq 2a \times 2b$$

### تمرين 4 (4ن)

عمل :  $B = x^4 + 1$  و  $A = x^4 - 6x^2 + 8$

$$A = x^4 - 6x^2 + 8 = (x^2)^2 - 2 \times 3 \times x^2 + 3^2 - 1 = (x^2 - 3)^2 - 1 \quad \text{الجواب :}$$

$$A = (x^2 - 3)^2 - 1^2 = (x^2 - 3 - 1)(x^2 - 3 + 1) = (x^2 - 4)(x^2 - 2)$$

$$A = (x^2 - 2^2)(x^2 - 2) = (x - 2)(x + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

$$B = x^4 + 1 = x^4 - 2x^2 + 2x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2$$

$$B = (x^2)^2 + 2x^2 \times 1 + 1^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2$$

$$B = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x)$$

$$B = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

### تمرين 5 (3ن)

$$A = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015} + \sqrt{2016}} + \frac{1}{\sqrt{2016} + \sqrt{2017}} \quad \text{أحسب :}$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{-1} = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \quad \text{الجواب :}$$

قمنا بالضرب في المرافق

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \quad \text{نقوم بنفس العملية بالنسبة ل :}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} = \sqrt{4} - \sqrt{3} \quad \text{ونجد} \quad \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} \quad \text{نقوم بنفس العملية بالنسبة ل :}$$

وهكذا نقوم بنفس العملية بالنسبة للباقي الى أن نصل الى :

$$\frac{1}{\sqrt{2015} + \sqrt{2016}} = \sqrt{2016} - \sqrt{2015}$$

ثانوية عبد الله العروي التأهيلية

$$\frac{1}{\sqrt{2016} + \sqrt{2017}} = \sqrt{2017} - \sqrt{2016}$$

ونعوض في A :

فنحصل على :

$$A = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2016} - \sqrt{2015} + \sqrt{2017} - \sqrt{2016}$$

نلاحظ أن هناك أعداد متقابلة

$$A = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2016} - \sqrt{2015} + \sqrt{2017} - \sqrt{2016}$$

وبعد التبسيط نجد :

$$A = \sqrt{2017} - 1$$

**تمرين 6(4ن)** أنظر الشكل جانبه

علما أن دائرة (C) قطرها  $AB = 8cm$  والنقطة M تنتمي للدائرة بحيث

$$BM = 4cm \quad \text{أحسب مساحة المستطيل } ABEF$$

**الجواب :**

M ∈ (C) و قطر الدائرة هو [AB] اذن : المثلث : ABM قائم الزاوية في M

$$\text{ومنه حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فان : } AM^2 = AB^2 - MB^2 \text{ أي : } AM^2 = 64 - 16$$

$$\text{أي : } AM^2 = 48 \text{ أي : } AM = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}cm$$

ولدينا : (EF) || (AB) لأن : ABEF مستطيل ولدينا (BM) قاطع لهما

اذن :  $\widehat{ABM} = \widehat{BME}$  (زاويتان متبادلتان داخليا)

ولدينا  $\widehat{AMB} = \widehat{BEM} = 90^\circ$  لأن : المثلث قائم الزاوية في M و ABEF مستطيل

اذن المثلثان : BMA و MEB متشابهان ومنه :  $\frac{BM}{ME} = \frac{BA}{MB} = \frac{MA}{EB}$  (الأضلاع المتناظرة متناسبة)

$$\text{اذن : } \frac{8}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{EB} \text{ يعني : } 8EB = 16\sqrt{3} \text{ يعني : } EB = 2\sqrt{3}$$

$$\text{ومنه مساحة المستطيل } ABEF \text{ هي : } AB \times BE = 8 \times 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}cm^2$$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.

c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un

mathématicien

le : 17/12/2016

