تمارين تحضيرية لأولامبياد الرياضيات

لنبين أن :

لكل x و y من IR لدينا : $x^2+y^2\geq 2xy$

<u>الحل</u> : ليكن x و y من IR لدينا :

$$x^2+y^2-2xy=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\geq 0$$

إذن : $x^2+y^2-2xy\geq 0$

ومنه : $x^2+y^2\geq 2xy$

فيما يلي تطبيق لهذه الخاصية في 5 أسئلة ، فيها المحلولة وغير المحلولة ، و لكن فكر في الحل قبل متابعة القراءة ، ولا ننسى أنه لمقارنة عددين يمكن التفكير في دراسة إشارة فرقهما :

1 -

لكل و من IR لدينا :

<u>الحل</u> :

ليكن و من IR لدينا :

$$(*) \quad (a^2+1)(b^2+1)-4ab=a^2b^2+a^2+b^2+1-4ab$$

وبتطبيق الخاصية مرتين وذلك بأخذ :

في الحالة الأولى $x=a$ و $y=b$ فنجد : $a^2+b^2\geq 2ab$ $\boxed{1}$

وفي الحالة الثانية $x=ab$ و $y=1$ فنجد : $a^2b^2+1\geq 2ab$ $\boxed{2}$

وبجمع $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نجد :

$$a^2b^2+1+a^2+b^2\geq 2ab+2ab$$

يعني أن : $a^2b^2+a^2+b^2+1\geq 4ab$

أي أن : $a^2b^2+a^2+b^2+1-4ab\geq 0$

وباستعمال $(*)$ نستنتج أن : $(a^2+1)(b^2+1)-4ab\geq 0$

و بالتالي : $(a^2+1)(b^2+1)\geq 4ab$

http:// xyzmath.e-monsite.com

وعوضا عن إتباع الطريقة السابقة يمكن لنا إعادة صياغة الحل كما يلي :

دائما بتطبيق الخاصية مرتين وذلك بأخذ :

في الحالة الأولى $x=a$ و $y=1$ فنجد : $a^2+1\geq 2a$ $\boxed{3}$

وفي الحالة الثانية $x=b$ و $y=1$ فنجد : $b^2+1\geq 2b$ $\boxed{4}$

وبضرب $\boxed{3}$ و $\boxed{4}$ نجد مباشرة : $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\geq 4ab$

2 -

لكل a من IR_+^* لدينا : $a+\frac{1}{a}\geq 2$

<u>الحل :</u>

بتطبيق الخاصية دائما وذلك بأخذ : $x=\sqrt{a}$ و $y=\frac{1}{\sqrt{a}}$ (لأن $a>0$)

نجد : $$\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\geq 2\sqrt{a}.\frac{1}{\sqrt{a}}$$

ومنه : $$a+\frac{1}{a}\geq 2$$

<u>ملاحظة</u> : هناك عدة طرق للبرهان على هذا السؤال ، ويبقى الهدف من هذه الطريقة هو كيفية استعمال الخاصية .

3 -

لكل a و b من IR_+^* لدينا :

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

الوسط التوافقي ، الوسط الهندسي ، الوسط الحسابي ، الوسط التربيعي

4 -

لكل a و b و c من IR^+ لدينا : $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\geq 6abc$

5 -

لكل a و b من IR_+^* لدينا : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 4$

http:// xyzmath.e-monsite.com