

الجدع مشترك علمي
نماذج من أولمبياد الرياضيات

تمرين 1: x و y عدنان حقيقيان بحيث : $x > 2$ و $y > 2$

1. قارن : 8 و $\frac{x^2}{x-2}$

2. استنتج أن : $\frac{x^2}{x-2} + \frac{y^2}{y-2} \geq 16$

تمرين 2: أخذ محمد ثلاث أعداد و حسب المجموع ووجد 2607 ثم مسح عددين و قال لأخيه علي : ماهي قيمة العددين المسوحين علما أن

أحدهم يزيد عن الآخر ب 15 ؟

ماهو جواب علي الصحيح ؟

$$2607 = \dots + \dots + 850$$

تمرين 3: n عدد صحيح طبيعي

بين أن $(n^3 + 3n^2 + n)(n + 3n^2 + n + 2) + 1$ مربع كامل

تمرين 4: a و b أعداد حقيقية

بين أن $(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq 4ab$

تمرين 5: n عدد صحيح طبيعي غير منعدم

1. بين أن : $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

2. نضع : $A = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{100}}$

3. استنتج أن $2(\sqrt{101} - 1) < A < 20$

تمرين 6: n عدد صحيح طبيعي غير منعدم

1. تحقق أن : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

2. أحسب وبسط : $S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2013 \times 2014} + \frac{1}{2014 \times 2015}$

تمرين 7: $a \in \mathbb{R}^+$ و $b \in \mathbb{R}^+$ و $c \in \mathbb{R}^+$

1. بين أن $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

2. استنتج أن $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$

تمرين 8: a و b أعداد حقيقية بحيث : $a^2 + b^2 = 0$

1. بين أن $a = 0$ و $b = 0$

2. حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ المعادلة : $\sqrt{x} + \sqrt{y-2} = \frac{1}{2}(x+y)$

الجدع مشترك علمي نماذج من أولمبياد الرياضيات

تمرين 9: a و b و c أعداد حقيقية مختلفة مثلي مثلي

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} = \frac{1}{(c-b)(a-c)} \quad \text{أثبت أن}$$

تمرين 10: ليكن ABC مثلثا و نعتبر النقطتان D و E بحيث: $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

1. أنشئ شكلا مناسبيا

2. بين أن النقط: D و E و A مستقيمية

تمرين 11: x و y عدنان حقيقيان

1. بسط: $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

2. بين أن: $3^{36} - 2^{36}$ قابل للقسمة على 13

تمرين 12: x عدد حقيقي موجب قطعاً بحيث: $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{6}$

بين أن: $x^2 + \frac{1}{x^2} + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$ عدد صحيح طبيعي

تمرين 13: x عدد حقيقي عمل $x^4 + 1$

تمرين 14: علما أن (C) دائرة قطرها: $AB = 8cm$ و النقطة M تنتمي الى الدائرة

بحيث: $BM = 4cm$ (أنظر الشكل الجانبية)

أحسب مساحة المستطيل $ABEF$

تمرين 15: أحسب وبسط:

$$A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2014}} + \frac{1}{\sqrt{2014}+\sqrt{2015}}$$

تمرين 16: $a > 0$ و $b > 0$ و $c > 0$ نضع: $B = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 9$

1. بين أن $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0$

2. استنتج أن $B \geq 0$

تمرين 17: حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية a و b و c بحيث: $2^a \times 3^b \times 7^c = 7056$ أو $2^a \times 5^b \times 7^c = 700$

تمرين 18: بين أن: $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} > \frac{1}{2}$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.