أولامبيادالرياضيات **الجدعالمشتركالعلمي**

تمرين I : حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $x+y-2\sqrt{x-2}-2\sqrt{y-3}=3$.

تمرين II: a و b و c و d أعداد حقيقية تحقق : $a^2+b^2+c^2+d^2=ab+bc+cd+da$.
بين أن: a=b=c=d .

تمرين III :
ABC مثلث. نعتبر نقطة C_1 من القطعة [AB] مخالفة للنقطتين A و B. الموازي للمستقيم (CC_1) و المار من A يقطع (BC) في نقطة A_1 و الموازي للمستقيم (CC_1) و المار من B يقطع (AC) في نقطة B_1.
بين أن : $\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}=\frac{1}{CC_1}$.

تمرين IV :

$n\in\mathbb{N}^*$ و ABC مثلث يحقق الشروط التالية :
$AB=n$ و $BC=n+2$ و $AC=n+1$ و $\widehat{A}=2\alpha$ و $\widehat{C}=\alpha$.

1) بين أن: $\cos 2\alpha=\frac{n-3}{2n}$ ثم اكتب $\cos\alpha$ بدلالة n .
2) نقبل في هدا السؤال العلاقة التالية : $(*):\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
باستعمال العلاقة $(*)$ بين أن : $2n^3-n^2-25n-12=0$ ثم استنتج أنه يوجد مثلث و حيد يحقق الشروط الواردة أعلاه.

إنجاز

تمـــــــــرين I : لـــدينا: $(\sqrt{x-2}-1)^2=x-2\sqrt{x-2}-1$ و $(\sqrt{y-3}-1)^2=y-2\sqrt{y-3}-2$ إذن

$$(\sqrt{x-2}-1)^2+(\sqrt{y-3}-1)^2=(x-2\sqrt{x-2}-1)+(y-2\sqrt{y-3}-2)$$
$$=x+y-2\sqrt{x-2}-2\sqrt{y-3}-3$$

ومنه:

$x+y-2\sqrt{x-2}-2\sqrt{y-3}=3$ **تكـــــافئ:** $x+y-2\sqrt{x-2}-2\sqrt{y-3}-3=0$ **تكـــــافئ:**
$(\sqrt{x-2}-1)^2+(\sqrt{y-3}-1)^2=0$ **تكـــــافئ:** $(\sqrt{x-2}-1)^2=(\sqrt{y-3}-1)^2=0$ **تكـــــافئ:**
$(\sqrt{x-2}-1)^2=0 et (\sqrt{y-3}-1)^2=0$ **تكـــــافئ:** $\sqrt{x-2}-1=0 et \sqrt{y-3}-1=0$ **تكـــــافئ:**
$\sqrt{x-2}=1 et \sqrt{y-3}=1$ **تكافئ:** $x-2=1$ و $y-3=1$ **تكافئ:** $x=3; y=4$ و بالتالي مجموعة الحلول هي:

$$S=\{(3;4)\}$$

تمرين II: لدينا: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ و $(b-c)^2=b^2-2bc+c^2$ و $(c-d)^2=c^2-2cd+d^2$ و $(d-a)^2=d^2-2ad+a^2$ إذن: $(a-b)^2+2ab=a^2+b^2$ و $(b-c)^2+2bc=b^2+c^2$ و $(c-d)^2+2cd=c^2+d^2$ و $(d-a)^2+2ad=d^2+a^2$ و منه بجمع المتساويات طرفا طرفا نحصل على:

أي $\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(a-b)^2+2ab+2bc+2cd+2da=2(a^2+b^2+c^2+d^2)\right.$:

ومنه $a^2+b^2+c^2+d^2=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(a-b)^2\right]+ab+bc+cd+da$:

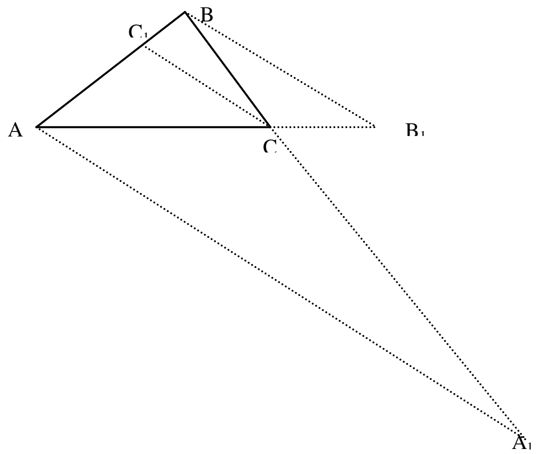
$a^2+b^2+c^2+d^2=ab+bc+cd+da$ تكافئ:

أي: $\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(a-b)^2\right]+ab+bc+cd+da=ab+bc+cd+da$

$\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(a-b)^2\right]=0$ أي: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(a-b)^2=0$ أي :

أي: $(a-b)^2=(b-c)^2=(c-d)^2=(a-b)^2=0$ أي: $(a-b)=(b-c)=(c-d)=(a-b)=0$ أي: a=b=c=d

تمرين III :

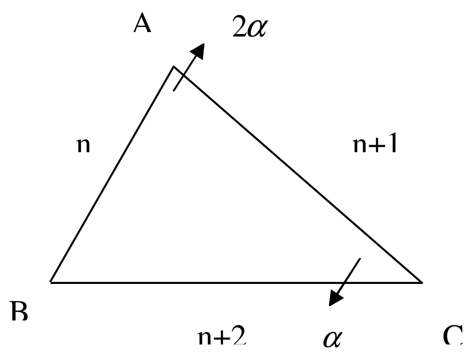


حسب خاصية طاليس المطبقة على المثلث ABA_1 لدينا : $\frac{CC_1}{AA_1}=\frac{BC}{BA_1}=\frac{BC_1}{BA}$ ومنه: $\frac{BC_1}{BA}=\frac{CC_1}{AA_1}$ (1) و على المثلث ABB_1 لدينا:

$\frac{CC_1}{BB_1}=\frac{AC}{AB_1}=\frac{AC_1}{AB}$ ومنه: $\frac{AC_1}{AB}=\frac{CC_1}{BB_1}$ (2) إذن بجمع (1) و (2) نستنتج أن: $\frac{BC_1}{BA}+\frac{AC_1}{AB}=\frac{CC_1}{AA_1}+\frac{CC_1}{BB_1}$ أي:

$\frac{BC_1+AC_1}{BA}=\frac{CC_1}{AA_1}+\frac{CC_1}{BB_1}$ أي: $\frac{BA}{BA}=\frac{CC_1}{AA_1}+\frac{CC_1}{BB_1}$ أي : $1=\frac{CC_1}{AA_1}+\frac{CC_1}{BB_1}$ و بالتالي: $\frac{1}{CC_1}=\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}$

تمرين IV :



1) حسب مبرهنة الكاشي المطبقة على الزاوية $\widehat{A}$ لدينا : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\widehat{A}$ أي :

$(n+2)^2=n^2+(n+1)^2-2n.(n+1).\cos 2\alpha$ أي: $n^2+4n+4=n^2+n^2+2n+1-2n.(n+1).\cos 2\alpha$ أي:

أي: $\cos 2\alpha = \frac{-(n+1)(n-3)}{-2n.(n+1)}$ أي: $\frac{-n^2+2n+3}{-2n.(n+1)} = \cos 2\alpha$: أي $-n^2+2n+3 = -2n.(n+1).\cos 2\alpha$

$. \cos 2\alpha = \frac{(n-3)}{2n}$

بالمثل حسب مبرهنة الكاشي المطبقة على الزاوية $\widehat{C}$ لدينا : $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC.AC.\cos\widehat{C}$ أي :

أي: $n^2 = 2n^2+6n+5-2(n+1).(n+2).\cos\alpha$ أي: $n^2 = (n+1)^2+(n+2)^2-2(n+1).(n+2).\cos\alpha$

أي: $\cos\alpha = \frac{-(n+1)(n+5)}{-2(n+2).(n+1)}$ أي: $\frac{-n^2-6n-5}{-2(n+2).(n+1)} = \cos\alpha$: أي $-n^2-6n-5 = -2(n+1).(n+2).\cos\alpha$

$. \cos\alpha = \frac{(n+5)}{2(n+2)}$

2) لدينا $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ و $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$ إذن بجمع المتساويتين نحصل على : أي $\cos 2\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha$: $\cos 2\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = 0$ و حسب السؤال (1) لدينا:

$\frac{n-3}{2n} - 2\left[\frac{(n+5)}{2(n+2)}\right]^2 + 1 = 0$ أي: $\frac{n-3}{2n} - 2\frac{n^2+10n+25}{4(n^2+4n+4)} + 1 = 0$ أي: $\frac{n-3}{2n} - \frac{n^2+10n+25}{2(n^2+4n+4)} = -1$

أي: $\frac{(n-3)(n^2+4n+4) - n(n^2+10n+25)}{2n(n^2+4n+4)} = -1$ أي:

$(n-3)(n^2+4n+4) - n(n^2+10n+25) = -2n(n^2+4n+4)$ أي:

$-9n^2-33n-12 = -2n^3-8n^2-8n$ أي: $(E): 2n^3-n^2-25n-12 = 0$.

نلاحظ أن:3- حل للمعادلة :(E) وبإنجاز القسمة الأقليدية للحدودية $2n^3-n^2-25n-12$ على الحدية : n+3 نحصل على:(E) تكافئ: $(n+3)(2n^2-7n-4) = 0$ أي: $(2n^2-7n-4) = 0$أو$(n+3) = 0$. مميز المعادلة من الدرجة 2هو:Δ=81

إذن حليها في المجموعة $\mathbb{R}$ هما: 4و $\frac{-1}{2}$ ومنه حلول المعادلة:(E) في المجموعة $\mathbb{R}$ هي: 4و $\frac{-1}{2}$ و 3- وبما أن $n \in \mathbb{N}^*$ فإن n=4

خلاصة : يوجد مثلث وحيد يحقق الشروط الواردة في معطيات التمرين وهو المثلث الذي طول أضلاعه الثلاث هي: 4 و 5 و 6 .